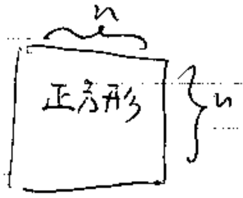
固有値問題

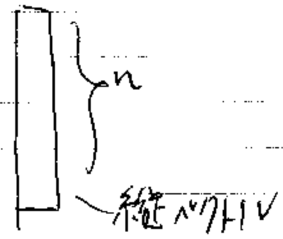
§ 固有値問題

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$　$n \times n$ 型

正方行列



ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$　$n \times 1$ 型
行列として書く



スカラー　λ.

定義

固有値問題 (eigen problem)　$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$

ただし、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

λ: 固有値 (eigenvalue)

$\boldsymbol{x}$: λに属する固有ベクトル (eigenvector)

注意　$\boldsymbol{x}$, λ が未知変数

注意

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のとき $A\boldsymbol{0} = \lambda \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ と成立する。
任意のλに対して成立する。
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は固有ベクトルから除外する

§固有多項式

固有値問題

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ O & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \Bigg\} n$$

を書きかえると

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (I: 単位行列)$$

となる。これは同次形方程式であるから、

$$\mathrm{rank}(A - \lambda I) = n$$

のときは自明解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみしかもたない。

∵ $\mathrm{rank}(A - \lambda I) = n$
$\Rightarrow$ $A - \lambda I$: 正則
$\Rightarrow$ $(A - \lambda I)^{-1}$: 存在
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x} = (A - \lambda I)^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

非自明解をもつためには

$$\mathrm{rank}(A - \lambda I) < n$$

でなければならない。この必要十分条件は

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

である。ここで左辺は λ に関する多項式であるから、

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

とおく。$\varphi_A(\lambda)$ を A に関する固有多項式という
(eigenpolynomial)

注
多項式 $p(x)$
方程式
$p(x) = 0$
の解 (solution)
を $p(x)$ の根
という。

$\varphi_A(\lambda)$ は n 次の多項式であるから、必らず n 個の根 (root) をもつ。

よって、行列 A の固有値は n 個ある。

$\boxed{定理}$

A の固有値は重複を別と数えると n 個ある。

No.
Date.

§ 相似変換

定義
$$\begin{cases} A, B, P : n \times n \\ P : \text{正則} \end{cases}$$

$$A \mapsto B = P^{-1}AP \quad : \text{相似変換}$$
similarity transformation

注
$A \mapsto B = PAP^{-1}$ も相似変換 ∵ $P \to P^{-1}$ ととりかえる.

定理
$B = P^{-1}AP$ のとき
A と B の固有値はすべて等しい.

∵
$$\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P)$$
$$= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P)$$
$$= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P)$$
$$= \det(P^{-1})\det(P)\det(A - \lambda I)$$
$$= \det(P^{-1}P)\det(A - \lambda I)$$
$$= \underbrace{\det(I)}_{1}\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) = \varphi_A(\lambda)$$

よって, $\varphi_A(\lambda)$ と $\varphi_B(\lambda)$ は等しいので, A, B の固有値はすべて等しい.

注
行列 X, Y
$$XY \neq YX$$
$$\det(XY) = \det(X)\det(Y)$$
$$= \det(Y)\det(X)$$
$$= \det(YX)$$
スカラーだから

注
$$\det(I) = \det\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

§ 固有対

行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ と書くことにする。
n 個の

このとき固有値 λ_k に属する固有ベクトルは固有値問題

$$Ax = \lambda_k x$$

を x について解けばよい。式変形すると

$$(A - \lambda_k I)x = 0$$

となり同次形方程式である。これを解いて解の1つを $x = \mathbb{p}_k$ とおく。

このとき、任意のスカラー α に対して $x = \alpha \mathbb{p}_k$ も解となることに注意する。

注意　固有ベクトルはノルム（長さ）に関して任意性がある。

固有ベクトルの長さは適当に選び、固有値と固有ベクトルの組を書くと

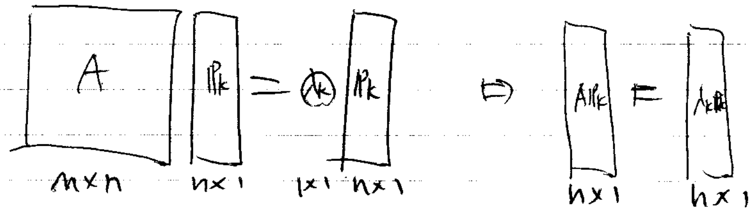
$$(\lambda_1, \mathbb{p}_1), (\lambda_2, \mathbb{p}_2), (\lambda_3, \mathbb{p}_3), \cdots, (\lambda_n, \mathbb{p}_n)$$

である。それぞれの組を固有対 (eigen pair) という。

§対角化

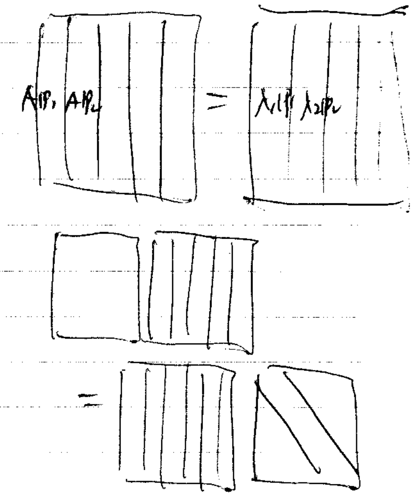
すべての固有対 $(\lambda_k, \mathbb{p}_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ は当然固有値問題をみたすので、

$$\begin{cases} A\mathbb{p}_1 = \lambda_1\mathbb{p}_1 \\ A\mathbb{p}_2 = \lambda_2\mathbb{p}_2 \\ \quad\vdots \\ A\mathbb{p}_n = \lambda_n\mathbb{p}_n \end{cases}$$



が成り立つ。各式の左辺,右辺ともに縦ベクトルであるから

$$\left(A\mathbb{p}_1\ A\mathbb{p}_2 \cdots A\mathbb{p}_n\right) = \left(\lambda_1\mathbb{p}_1\ \lambda_2\mathbb{p}_2 \cdots \lambda_n\mathbb{p}_n\right)$$



$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2 \cdots \mathbb{p}_n)}_{P} = \underbrace{(\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2 \cdots \mathbb{p}_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D}$$

$\Leftrightarrow AP = PD$

$\Leftrightarrow$ P が正則であれば、左から P^{-1} をかけて、

$P^{-1}AP = P^{-1}PD \Leftrightarrow P^{-1}AP = ID \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$

定義

$A \mapsto D = P^{-1}AP$: 対角化
diagonalization

注意

対角成分以外すべてが0の行列を対角行列という。

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & O \\ & b_{22} & \\ & & \ddots \\ O & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$ ← 対角成分は0でもそれ以外でもよい。

$B = \mathrm{diag}(b_{11}, b_{22}, b_{33}, \cdots, b_{nn})$

とも書く。

定理　$P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2 \cdots \mathbb{p}_n)$ が正則なとき、
Aは対角化可能である。

注　常に対角化可能ではない。
対角化できないときはでも常にジョルダン分解は可能である
(→ §ジョルダン分解)

注
対角化 $A \mapsto D$ は相似変換である。
よって、AとDの固有値はすべて等しい。

$$\varphi_D(\lambda) = \det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda)$$

より、Dの固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ である。

No.
Date.

§固有値分解

$AP = PD$ より、P^{-1} を右からかけると、

$$APP^{-1} = PDP^{-1} \Rightarrow AI = PDP^{-1} \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

定義

$A = PDP^{-1}$: A の固有値分解
eigendecomposition.

注 ある行列 A を別の行列 $B_1, B_2, \cdots B_\ell$ の積で

$$A = B_1 B_2 \cdots B_\ell$$

と書けるとき、(○△×)分解と呼ぶことがある。
もちろん意味のある積に関して名前がつく。
固有値分解は、固有値、固有ベクトルによる相似変換。

§ 固有値分解の応用例

固有値分解 $A = PDP^{-1}$ が可能であるとする。

定理 $A^k = PD^kP^{-1}$

(証) $A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})(PDP^{-1})$

$= PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}D\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}D\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}\cdots\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}D\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}DP^{-1}$

$= P\underbrace{DDD\cdots D}_{k}P^{-1}$

$= PD^kP^{-1}$ (証)

定理
$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

(証)
$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = DD^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^3 \end{pmatrix}$$

以下同様 (証)

(問) 帰納法で証明せよ.

No.
Date.

§ 漸化式の解法

例
漸化式（差分方程式）

$$\begin{cases} a_0=1,\ a_1=1 \\ a_{k+2}+a_{k+1}-6a_k=0,\ k=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

により定まる数列 $\{a_k\}_{k=0,1,\cdots}$ の一般項（解）を求めよ.

$b_k=a_{k+1}$ とおくと.

$$\begin{cases} a_{k+1}=b_k \\ b_{k+1}+b_k-6a_k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{k+1}=b_k \\ b_{k+1}=6a_k-b_k \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix}}_{x_{k+1}}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}}_{x_k}$$

より，ベクトル列 $\{x_k\}_{k=0,1,2\cdots}$ の漸化式

$$x_{k+1}=Ax_k$$

が得られる. x_k の一般項は

$$x_k=Ax_{k-1}=AAx_{k-2}=AAAx_{k-3}=\cdots=\underbrace{AA\cdots A}_{k}x_0=A^kx_0$$

と求まる. ここで A が固有値分解

$$A=PDP^{-1}$$

ができるとすると，前頁の定理より

$$x_k=A^kx_0=(PDP^{-1})^kx_0=PD^kP^{-1}x_0=P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}P^{-1}x_0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

と表される. この1行目より一般項が求まる.
※以後は A の固有値分解を行う.

Aの固有値は

$$g_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix}0&1\\6&-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}-\lambda&1\\6&-\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}-\lambda&1\\6&-\lambda-1\end{vmatrix} = +\lambda(\lambda+1)-6 = \lambda^2+\lambda-6 = (\lambda-2)(\lambda+3)=0$$

より $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-3$ と求まる.

固有ベクトルはそれぞれ $Ax=2x$, $Ax=-3x$ を解いて求める.

$\lambda=\lambda_1=2$

$$Ax=2x \Rightarrow (A-2I)x=0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix}0&1\\6&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-2&1\\6&-3\end{pmatrix}x=0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-2&1\\6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \times 3 \Rightarrow \begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \times -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1-\frac{1}{2}x_2=0 \Rightarrow$ $x_2=c$(任意)とおく. $\Rightarrow$ $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}c\\x_2=c\end{cases}$ $\Rightarrow x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}c\\c\end{pmatrix}=\frac{c}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 固有ベクトルはノルムの任意性があるので、1つどれかをえらべばよい.

$x=P_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ とおく.

!

$$\begin{pmatrix}0&1\\6&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

必ずチェック!!
テストでは計算まちがい
きわめて多し
$\Rightarrow AP_1=\lambda_1 P_1$ o.k.

$\lambda=\lambda_2=-3$

$$Ax=-3x \Rightarrow (A+3I)x=0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix}0&1\\6&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\right)x=0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}3&1\\6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \times(-2)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \times\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1+\frac{1}{3}x_2=0$

$\Rightarrow x_2=c$ (c:任意)

$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{3}c\\x_2=c\end{cases}$

$$\Rightarrow x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}c\\c\end{pmatrix}=\frac{c}{3}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}}_{P_2}$$

$\Rightarrow x=P_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ とえらぶ.

!

$$\begin{pmatrix}0&1\\6&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow AP_2=\lambda_2 P_2$ o.k.

$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$, $P=(\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$ とおくと、

Aは $A=PDP^{-1}$ と固有値分解で表される。

$$P^{-1}=\frac{1}{3-(-2)}\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}$$

より一般項は

$$\begin{pmatrix}a_k\\a_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0\\0&(-3)^k\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\times2^k&2^k\\-2\times(-3)^k&(-3)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\times2^k+2\times(-3)^k&2^k-(-3)^k\\3\times2^{k+1}+2\times(-3)^{k+1}&2^{k+1}-(-3)^{k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $a_k=\frac{1}{5}\left\{(3\times2^k+2\times(-3)^k)a_0+(2^k-(-3)^k)a_1\right\}$

$$=\frac{3a_0+a_1}{5}2^k+\frac{2a_0-a_1}{5}(-3)^k$$

$\Rightarrow$ $a_0=1,\ a_1=1$ より

$a_k=\frac{4}{5}2^k+\frac{1}{5}(-3)^k$, $k=0,1,2,\cdots$ 答

特異値分解

§ 特異値分解

A：$n \times n$ 正方行列

固有値分解　$A = PDP^{-1}$

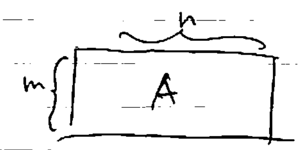
$\Updownarrow$

対角化　$D = P^{-1}AP$

ただし $\begin{cases} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ P = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n) \\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ p_i \in \mathbb{R}^n \\ A p_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$

固有方程式

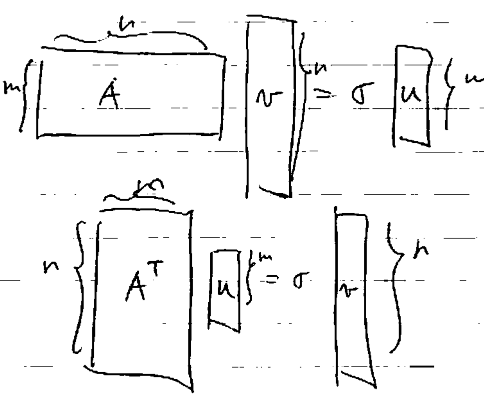
A：$m \times n$ 長方行列



ただし、簡単のため $m \leq n$

$\sigma_i \in \mathbb{R},\ u_i \in \mathbb{R}^m,\ v_i \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} A v_i = \sigma_i u_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ A^T u_i = \sigma_i v_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ A v_i = 0 & (i = m+1, \cdots, n) \end{cases}$$



ただし $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \cdots, \sigma_m \geq 0$.

- σ_i：特異値 (singular value)
- u_i：左特異ベクトル (left singular vector)
- v_i：右特異ベクトル (right singular vector)

注 $B=A^TA$, $C=AA^T$ は対称行列である。 ∵ $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$
$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$

$$A \; A^T = \underbrace{AA^T}_{m}\Big\}m \qquad A^T \; A = \underbrace{A^TA}_{n}\Big\}n$$

注 ① $Bv_i=(A^TA)v_i=A^T(Av_i)=A^T(\sigma_i u_i)=\sigma_i(A^Tu_i)=\sigma_i(\sigma_i v_i)=\sigma_i^2 v_i$

⇒ $Bv_i=\sigma_i^2 v_i$ ⇔ $B=A^TA$の固有値 σ_i^2, 固有ベクトル v_i.

② $Cu_i=(AA^T)u_i=A(A^Tu_i)=A(\sigma_i v_i)=\sigma_i(Av_i)=\sigma_i(\sigma_i u_i)=\sigma_i^2 u_i$

⇔ $Cu_i=\sigma_i^2 u_i$ ⇒ $C=AA^T$の固有値 σ_i^2, 固有ベクトル u_i

③ $Av_i=0$ ⇒ $A^TAv_i=A^T0=0$ ⇒ $Bv_i=0=0\cdot v_i$ ⇒ $Bv_i=0\cdot v_i$ ⇒ Bは $n-m$個の0固有値

よって, B, Cは対称行列のため $V=(v_1\,v_2\cdots v_n)$, $U=(u_1\cdots u_m)$は直交行列にとれる.

⇒ $U^TU=I$, $V^TV=I$

⇒ $U^{-1}=U^T$, $V^{-1}=V^T$.

注 $A: n\times n$; $A^T=A$

対称行列の異なる固有値の固有ベクトルは直交する.

∵ $Ax=\lambda x$, $Ay=\mu y$, $\lambda\neq\mu$ ⇒ $\lambda(x,y)=(\lambda x,y)=(Ax,y)=(Ax)^Ty=x^TA^Ty=(x,A^Ty)$
$=(x,Ay)=(x,\mu y)=\mu(x,y)$
⇒ $(\lambda-\mu)(x,y)=0$ ⇒ $(x,y)=0$ ⇒ $x\perp y$

注 $A: m\times n$.

$Av_{m+1}=0,\dots,Av_n=0$ より $v_{m+1}\in \mathrm{Ker}\,A$, $v_{m+2}\in \mathrm{Ker}\,A$, …, $v_n\in \mathrm{Ker}\,A$ である.

$\{v_{m+1},\dots,v_n\}$を1次独立にえらべば $\mathrm{Ker}\,A=\langle v_{m+1},\dots,v_n\rangle_{\mathbb{R}}$ となる.

グラム・シュミットの直交化法などで $\{v_{m+1},\dots,v_n\}$は正規直交系としてとれる.

よって, $V^TV=I$ が成立する.

注 $A: n\times n$, $A^T=A$.

対称行列の重複固有値の固有ベクトルは正規直交系としてとれる.

$Ax=\lambda x$ ⇒ $(A-\lambda I)x=0$ ⇒ $x\in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$

① $Av_i = \sigma_i u_i \quad (i=1,\cdots,m)$

② $A^T u_i = \sigma_i v_i \quad (\quad '' \quad)$

③ $Av_i = 0 \quad (i=m+1,\cdots,n)$

①,③より $(\overbrace{\underbrace{Av_1 \cdots Av_m}_{m} \ Av_{m+1} \cdots Av_n}^{n}) = (\overbrace{\underbrace{\sigma_1 u_1 \cdots \sigma_m u_m}_{n} \ 0 \cdots 0}^{n})$

$\Leftrightarrow m\{ \overset{m}{A}(\underbrace{v_1 \cdots v_n}_{n}) \}^{m} = \{ (\underbrace{u_1 \cdots u_m}_{m}) \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\sigma_1 & & O}_{m} & \\ & \ddots & & O \\ O & & \sigma_m & \end{array}\right)}_{n} \}m$

$\Leftrightarrow AV = U\Sigma$

$\Leftrightarrow A = U\Sigma V^T$ 特異値分解 (SVD ; singular value decomposition)

②,③より $(A^T u_1 \cdots A^T u_m) = (\sigma_1 v_1 \cdots \sigma_m v_m)$

$\Leftrightarrow A^T(\underbrace{u_1 \cdots u_m}_{m})\}m = (\underbrace{\underbrace{v_1 \cdots v_m}_{m} \ v_{m+1} \cdots v_n}_{n}) \left.\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \sigma_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_m \end{matrix}}^{m} \\ \hline O \end{pmatrix}\right\} n$

$\Leftrightarrow A^T U = V\Sigma^T$

$\Leftrightarrow A^T = V\Sigma^T U^T$

$\Leftrightarrow A = U\Sigma V^T$ SVD

逆に書くと. $\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & O & \\ & \ddots & & O \\ O & & \sigma_m & \end{array}\right) = U^T A V$.

特異値標準形

長方行列に対する
ある種の対角化

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \cdots \geq \sigma_m \geq 0$

注 普通は特異値を大きい順に並べる.

No
Date

§ 特異値と固有値

$A = U\Sigma V^T$, $U^TU = I$, $V^TV = I$ より

$$B = A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T \boxed{\overset{I}{U^TU}}\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^T\Sigma = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2\end{matrix} & O \\ \underbrace{O}_{m} & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{pmatrix} = V^TBV = V^T(A^TA)V$$

$B = A^TA$ の対角化

$$C = AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma \overset{I}{\cancel{V^TV}}\Sigma^TU^T = U\Sigma\Sigma^TU^T$$

$$\Leftrightarrow \Sigma\Sigma^T = \underbrace{\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2\end{pmatrix}}_{m} \Big\} m = U^T C U = U^T(AA^T)U$$

$C = AA^T$ の対角化

(注) $B = A^TA$ の固有値 $\lambda_1 = \overset{>0}{\sigma_1^2}, \lambda_2 = \overset{>}{\sigma_2^2}, \cdots, \lambda_m = \overset{\sigma_2}{\sigma_m^2}$, $\lambda_{m+1} = 0, \cdots, \lambda_n = 0$
$C = AA^T$ の固有値 $\lambda_1 = \sigma_1^2, \lambda_2 = \sigma_2^2, \cdots, \lambda_m = \sigma_m^2$.
全て正　同じ

$\Rightarrow$ A の特異値 $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sigma_m = \sqrt{\lambda_m}$.
非負のみをえらぶ.

B, C の固有値は全て非負 $\lambda_i = \sigma_i^2 \geq 0$.

(注) $A : m\times n$
$\mathrm{rank}\,A = r < m$ のとき,
$(\mathrm{rank}\,A^T = \mathrm{rank}\,A)$ 　 $\dim \mathrm{Ker}\,A^T = \mathrm{null}\,A^T = m - r > 0$ ｝である.

$A^Tu = 0$ の1次独立な解は $m-r$ 個ある.
$A^Tu = 0 \cdot v$ より 特異値 $\sigma = 0$ が $m-r$ 個ある.
$\Rightarrow$ $\sigma_{r+1} = 0, \sigma_{r+2} = 0, \cdots, \sigma_m = 0$.

$$A = U\Sigma V^T = U \underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{matrix}}_{r} & O & O \\ O & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} & O \\ O & O & O \end{pmatrix}}_{n} \begin{matrix}\}r \\ \\ \end{matrix} \Big\}m \Big\} n, \quad r = \mathrm{rank}\,A$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

§ スペクトル分解

$A : m \times n$

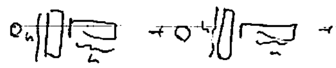
$A = U\Sigma V^T$

$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$ スペクトル分解

$A : n \times n$

$A = PDP^T$

$A = \lambda_1 p_1 p_1^T + \lambda_2 p_2 p_2^T + \cdots + \lambda_n p_n p_n^T$ スペクトル分解



No.
Date

§ ベクトルのノルム

$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ 上の数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ のベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$$ に対して，ノルム $\|x\|$ とは次のように定義される．

定義　次の(1),(2),(3)をみたす写像 $V \to \mathbb{R}$ をノルム(norm)と呼ぶ．

(1) $\|x\| \geq 0$;　$\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,　$\alpha \in K$,　$x \in V$.

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,　$x, y \in V$.

例

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$　2乗ノルム，(ベクトルの)ユークリッドノルム

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$　絶対値ノルム

$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$　p乗ノルム

$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ ― 最大値ノルム．

$= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

注　$x \in \mathbb{C}^n$ のとき $(\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i = x^* x$.

$x \in \mathbb{R}^n$ のとき $(\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = x^T x$.

注　$A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$ ← 複素共役，$x^* = (\overline{x})^T = \overline{(x^T)}$ ← 複素共役．

§ 行列ノルム

定義 次の(1)〜(4)をみたす写像 $A \mapsto \|A\| \in \mathbb{R}$ を<u>行列ノルム</u>と呼ぶ

(1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \iff A = O$.

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(4) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

例

行列ノルム　　ベクトルノルム

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

<u>自然ノルム</u> (natural norm), <u>スペクトルノルム</u>, <u>作用素ノルム</u> (operator norm)

定理 $\|A\|_p$ は (1)〜(4) をみたす.

∵ (3) $\|A+B\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|(A+B)x\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax + Bx\|_p \leq \max_{\|x\|_p=1} (\|Ax\|_p + \|Bx\|_p)$

$\leq \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p + \max_{\|x\|_p=1} \|Bx\|_p = \|A\|_p + \|B\|_p$ 図

定理

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$A = (a_1\ a_2 \cdots a_n) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

$= \max_{j=1,\dots,n} \|a_j\|_1$ ← 列ベクトルの絶対値ノルムの最大

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$= \max_{i=1,\dots,m} \|a^i\|_1$ ← 行ベクトルの絶対値ノルムの最大

∵ $\|Ax\|_1 = \sum_i \left|\sum_j a_{ij} x_j\right| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x_{j}| = \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}|$

$\leq \left(\sum_j |x_j|\right) \left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right) = \|x\|_1 \left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right)$

$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ 図

No.
Date

定理 $\|A\|_2 = \sigma_1$ ← Aの最大特異値
ただし $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$

∵ $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$ とおく。ただし $A = U\Sigma V^T$ とする。

$Ax = c_1 Av_1 + c_2 Av_2 + \cdots + c_n Av_n = c_1\sigma_1 u_1 + c_2\sigma_2 u_2 + \cdots + c_m\sigma_m u_m + c_{m+1}0 + \cdots + c_n 0$

$(\|Ax\|_2)^2 = (c_1\sigma_1 u_1 + \cdots + c_m\sigma_m u_m)^T(c_1\sigma_1 u_1 + \cdots + c_m\sigma_m u_m)$
$= c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_m^2\sigma_m^2$ ただし $\|u_i\| = 1$, $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$

$(\|x\|_2)^2 = (c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n)^T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$

$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \max_{c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1} \sqrt{c_1^2\sigma_1^2 + \cdots + c_m^2\sigma_m^2}$

$= \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1$ (∵ $c_1 = 1, c_2 = 0, \cdots, c_n = 0$ のとき最大値をとる。$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ より) 証

定理 $A^T A = I$ のとき $\|A\|_2 = 1$

∵ $(\|Ax\|_2)^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T \overbrace{A^T A}^{I} x = x^T x = (\|x\|_2)^2$

$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|x\|_2 = 1$ 証

定理 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}$ のとき全てのpで $\|A\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$

∵ $\|A\|_p = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p = \max_{x_1^p + \cdots + x_n^p = 1} \sqrt[p]{|a_{11}|^p|x_1|^p + \cdots + |a_{nn}|^p|x_n|^p}$

$|a_{11}|, \cdots, |a_{nn}|$ のうち $|a_{ii}|$ が最大であるとすると、$x_1^p = 0, x_2^p = 0, \cdots x_i^p = 1, \cdots x_n^p = 0$ のとき最大値をとる。
よって $\|A\|_p = \sqrt[p]{|a_{ii}|^p} = |a_{ii}|$ となる。
証

定理 $A_{n\times n}$: 正則のとき $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{1}{\lambda_n}$ ← 最小特異値(固有値)の逆数

ただし $\begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \end{cases}$

No
Date

定義 $$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Frobenius norm
フロベニウス・ノルム

行列のユークリッドノルム

定理 $\|A\|_F$ はノルムの(1)〜(4)の性質をみたす.

∵(4) $$(\|AB\|_F)^2 = \sum_i\sum_j\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \le \sum_i\sum_j\left(\sum_k |a_{ik}||b_{kj}|\right)^2$$
$$\le \sum_i\sum_j\left(\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_l |b_{lj}|^2\right) = \left(\sum_i\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_j\sum_l |b_{lj}|^2\right) = \|A\|_F^2\|B\|_F^2$$ 口

定理 $$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_m^2}$$

∵ $$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)} = \sqrt{\mathrm{tr}(U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T)} = \sqrt{\mathrm{tr}(V\Sigma^T \underbrace{U^TU}_{=I}\Sigma V^T)}$$
$$= \sqrt{\mathrm{tr}(V\Sigma^T\Sigma V^T)} = \sqrt{\mathrm{tr}(\Sigma^T\Sigma \underbrace{V^TV}_{=I})} = \sqrt{\mathrm{tr}(\Sigma^T\Sigma)}$$
$$= \sqrt{\mathrm{tr}\left(\begin{array}{cccc|c} \sigma_1^2 & & & & \\ & \sigma_2^2 & & O & O \\ & O & \ddots & & \\ & & & \sigma_m^2 & \\ \hline & O & & & 0 \ \ddots \ 0 \end{array}\right)} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_m^2}$$ 口

定理 $$\|A\|_2 \le \|A\|_F .$$

∵ $$\|A\|_2 = \sigma_1 \le \sqrt{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_m^2} = \|A\|_F$$ 口

§ 行列のトレース

<u>行列のトレース</u> $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, $A : n\times n$

定理
(1) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$
(2) $\mathrm{tr}A^T = \mathrm{tr}A$
(3) $\mathrm{tr}\,\alpha A = \alpha\,\mathrm{tr}A$
(4) $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$.

No.
Date

定義

$A: n\times n$　固有値の集合 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ← スペクトル (spectrum)

$A: m\times n$　特異値の集合 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ ←

スペクトル半径　$\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$

$\rho(A) = \max_{i=1,\dots,m} \sigma_i$

定理

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

$\because$ $\|A\|_2 = \sigma_1 = \rho(A) = \max(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ ← ただし $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_m$.　証

定理

$$\|A\|_p \geq \rho(A) \quad (p = 1, 2, \dots, \infty)$$

定理

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$$

$\because$ $\|A\|_p = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p = \max \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \Leftrightarrow \|A\|_p \geq \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

$\Leftrightarrow \|A\|_p \|x\|_p \geq \|Ax\|_p$　証

§ 条件数

定義 $A : n \times n$

$$\mathrm{cond}_p\, A = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$$

条件数 (Condition number)

例 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ のとき $\mathrm{cond}_p\, A = \dfrac{\max_i |a_{ii}|}{\min_i |a_{ii}|}$.

$A^T A = I$ のとき $\mathrm{cond}_2\, A = 1$.

A の特異値 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ のとき $\mathrm{cond}_2\, A = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_n}$ ← 最大と最小の比.

注 条件数の大きい行列のほど、多くの数値計算アルゴリズムで、数値誤差の拡大が起りやすいことが知られている.

注 $\mathrm{cond}_p\, A \geq \dfrac{1}{\varepsilon_M}$ であるとき 悪条件 であるという.

ただし、ε_M はマシンイプシロン.

倍精度 $\varepsilon_M = 2^{-54} \simeq 10^{-16} \sim 10^{-16}$

単精度 $\varepsilon_M = 2^{-26} \simeq 10^{-7} \sim 10^{-8}$

No.
Date.

§ 一般逆行列

定義 A : $\underset{\sim}{m \times n}$

$$\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times m}{A^-}\,\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{A} \overset{def}{\Longleftrightarrow} A^- : \text{一般逆行列 (generalized inverse)}$$

擬逆行列 (pseudo inverse)

注 ☆ $\mathrm{rank}(A) < n$ でもよい.

☆ 一意に定まるとは限らない.

☆ A: 正則のとき $A^- = A^{-1}$.

定理 $y = Ax$ の解は $x = A^- y \Longleftrightarrow AA^-A = A$ (Rao, 1962).

∵ ($\Leftarrow$). $AA^-A = A \Rightarrow AA^-\underbrace{Ac}_{y} = \underbrace{Ac}_{y} \Rightarrow A\underbrace{A^-y}_{x} = y \Rightarrow x = A^-y$ は $Ax = y$ の解 ∎

($\Rightarrow$) $Ax = y$, $x = A^-y$, $y = Ac \Rightarrow AA^-Ac = Ac \Rightarrow AA^-A = A$ ∎

定義 A : $m \times n$

$$\left.\begin{array}{l} AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^* = AA^+,\ (A^+A)^* = A^+A \end{array}\right\} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \text{Moor-Penrose 形一般逆行列}$$

定理 $y = Ax$ のとき $x = A^+y$ が解.

∵ $\left.\begin{array}{l} y = Ax \\ x = A^+y \end{array}\right\} \Rightarrow y = AA^+y \Rightarrow A^+y = A^+AA^+y = A^+y \Rightarrow A^+y = A^+y$. ∎

定理 A^+ は一意に定まり, $(A^+)^+ = A$ が成立する. (Kalman, 1972)

No.
Date.

定理

$$\underset{n\times m}{A^+} = \underset{n\times n}{V}\,\underset{n\times m}{\Sigma^+}\,\underset{m\times m}{U^T}, \quad \Sigma^+ = \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c}\left.\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & O \\ & \frac{1}{\sigma_2} & \\ O & \ddots & \frac{1}{\sigma_m} \\ \hline & O & \end{pmatrix}\right\}m \end{array}\right\} n \end{array}$$

ただし、$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U}\,\underset{m\times n}{\Sigma}\,\underset{n\times n}{V^T}$, $\Sigma = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \underbrace{\begin{matrix}\sigma_1 & \\ O & \sigma_m\end{matrix}}_{m} & & O \end{array}\right)}_{n}$

$$(\because)\ AA^+A = U\Sigma \underbrace{V^TV}_{=I}\Sigma^+\underbrace{U^TU}_{=I}\Sigma V^T$$
$$= U\Sigma I \Sigma^+ I \Sigma V^T = U\Sigma\Sigma^+\Sigma V^T = U\Sigma V^T = A$$

§ 例

$\boxed{例}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$B = A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 \\ 10 & 5 & 15 \\ 30 & 15 & 45 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix} = 14\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 14-\lambda & 28 \\ 28 & 56-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-14)(\lambda-56) - 28^2 = \lambda^2 - 70\lambda + \cancel{4\times 14^2} - \cancel{4\times 14^2}$$

$$= \lambda^2 - 70\lambda = \lambda(\lambda - 70) = 0 \Rightarrow C\text{の固有値 } \lambda = 0, 70.$$

Aの特異値は $\sigma_1 = \sqrt{70}$, $\sigma_2 = 0$ であり,

$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{70}$, $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{70+0} = \sqrt{70}$. を得る.

または, $\|A\|_F = \sqrt{2^2+1^2+3^2+4^2+2^2+6^2} = \sqrt{70}$ としても等しい.

$\boxed{例}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-6)^2 - (-3)^2 = \lambda^2 - 12\lambda + 36 - 9 = \lambda^2 - 12\lambda + 27$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-9) = 0 \Rightarrow \lambda = 3, 9.$$

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -4 \\ -1 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-5)^2 - 4 - 4 + (\lambda-5) + (\lambda-5) + 16(\lambda-2)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 10\lambda + 25) + 18\lambda - 50$$

$$= -\lambda^3 + \boxed{10\lambda^2} - 25\lambda + \boxed{2\lambda^2} - 20\lambda + \cancel{50} + 18\lambda - \cancel{50}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-9) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 3, 9$$

No.
Date.

$\lambda_1=9,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=0$ より Aの特異値は $\begin{cases}\sigma_1=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{9}=3\\ \sigma_2=\sqrt{\lambda_2}=\sqrt{3}\end{cases}$ となる

$\|A\|_2=\sigma_1=3$ である.

$\|A\|_F=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}=\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}$ であり,

$\|A\|_F=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2+1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{12}$ で等しい.

特異ベクトルを求める.

$(C-\lambda I)x=0$ より

$\lambda=9$ のとき $C-9I=\begin{pmatrix}-3&-3\\-3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=3$ のとき $C-3I=\begin{pmatrix}3&-3\\-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}x_2\\x_2\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$(B-\lambda I)x=0$ より

$\lambda=9$ のとき $B-9I=\begin{pmatrix}-7&-1&-1\\-1&-4&-4\\-1&-4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}0\\-x_3\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=3$ のとき

$B-3I=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&2&-4\\-1&-4&2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}-2x_3\\x_3\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda=0$ のとき

$B-0I=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&5&-4\\-1&-4&5\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}x_3\\x_3\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

No.
Date.

Aの特異値分解(SVD)は

$$A = U\Sigma V^T,\quad U = (u_1\ u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$$

$$V = (v_1\ v_2\ v_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

となる。 注 u_1, u_2, v_1, v_2 の正負は $Av_i = \sigma_i u_i$ が成立するように選ぶ。
Aの一般逆行列は (に関するMoore-Penrose)

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-2\sqrt{3} & -2\sqrt{3}\\ 0 & -2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 0\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

このとき $AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+$, $(AA^+)^T = AA^+,\ (A^+A)^T = A^+A$ が成立する

$Ax = y$ の解(の1つ)は $x = A^+y$ である。 $x = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}y_1+y_2\\ -y_2\\ -y_1\end{pmatrix}$ となる。

一方、$Ax = y$ の解を簡約化して求めると

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & y_1\\ 1 & -2 & 1 & y_2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2\end{array}\right)$ より、 $x = c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2\\ \frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2\\ 0\end{pmatrix}$ となる。

$c = -\frac{1}{3}y_1$ のとき、$x = A^+y$ と一致する。これは $\|x\|$ が最小となるときである。
$\|x\|^2 = (c+\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2)^2 + (c+\frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2)^2 + c^2$ より
$\frac{\partial\|x\|^2}{\partial c} = 3c + y_1 = 0$ を求めると $c = -\frac{y_1}{3}$ のとき極小値をとる。

注 方程式 $Ax = y$ は任意性があり一意には定まらない。
$x = A^+y$ は $\|x\|_2^2$ が最小となるときの解である。

No.
Date

$c=\frac{a}{3}y_1+\frac{b}{3}y_2$ とおくと、

$$x=\begin{pmatrix} c+\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2 \\ c+\frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2 \\ c \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (a+2)y_1+(b+1)y_2 \\ (a+1)y_1+(b-1)y_2 \\ ay_1+by_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x=A^-y,\ A^-=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

と表される。このとき

$$AA^-A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=A$$

をみたすので A^- は A の一般逆行列である。

注　a, b は任意であるから、A の一般逆行列 A^- は一意には定まらない。

問　A^- が $A^-AA^-=A^-$, $(AA^-)^T=AA^-$, $(A^-A)^T=A^-A$ をみたすときの a, b の条件を定めよ。

問　$x=A^-y$ のノルム $\|x\|_2$ が最小となる a, b を定めよ。

(解) $\|x\|_2^2=\frac{1}{9}\{((a+2)y_1+(b+1)y_2)^2+((a+1)y_1+(b-1)y_2)^2+(ay_1+by_2)^2\}$ より

$$\frac{\partial\|x\|_2^2}{\partial a}=\frac{2}{3}y_1\{(a+1)y_1+by_2\}=0$$

$$\frac{\partial\|x\|_2^2}{\partial b}=\frac{2}{3}y_2\{(a+1)y_1+by_2\}=0$$

となるので $a=-1, b=0$ のとき $\|x\|_2^2$ は極小値をもち最小値をとる。

No.
Date.

§ 正規行列

定義 $A: n\times n$

$$A^*A = AA^* \overset{def}{\Longleftrightarrow} A: \text{正規行列 (normal matrix)}$$

定義 $A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$: 共役転置

例

エルミート行列 (Hermite matrix) $A^* = A$ $\quad \because \begin{rcases} A^*A = AA = A^2 \\ AA^* = AA = A^2 \end{rcases}$

歪エルミート行列 (skew Hermite matrix) $A^* = -A$ $\quad \because \begin{rcases} A^*A = -AA = -A^2 \\ AA^* = -AA = -A^2 \end{rcases}$

ユニタリー行列 (unitary matrix) $A^*A = AA^* = I$. $\quad \because$ 明らか

対称行列 (symmetric mat.) $A^T = A$ $\quad \because \begin{rcases} A^*A = A^TA = AA = A^2 \\ AA^* = AA^T = AA = A^2 \end{rcases}$

$\begin{rcases} \text{歪対称行列 (skew sym. mat.)} \\ \text{交代行列 (alternative mat.)} \end{rcases}$ $A^T = -A$. $\quad \because \begin{rcases} A^*A = A^TA = -AA = -A^2 \\ AA^* = AA^T = -AA = -A^2 \end{rcases}$

直交行列 (Orthogonal matrix) $A^TA = AA^T = I$. $\quad \because \begin{rcases} A^*A = A^TA = I \\ AA^* = AA^T = I \end{rcases}$

定理 $A^*A = AA^* \Rightarrow$ 異なる固有値の固有ベクトルは直交.

定理 $A^*A = AA^* \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = U^*AU$, U: ユニタリー行列

または

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = U^TAU$; U: 直交行列

No.
Date.

§ 正定値

定義 $A: n \times n,\ x \in \mathbb{C}^n$

$$h(x;A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j = x^*Ax = (x, Ax) \in \mathbb{R}$$

エルミートの2次形式 (Hermite quadratic)

定義 $x, y \in \mathbb{C}^n$

内積 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = x^* y \in \mathbb{R}$

注 A:エルミート行列 $\Rightarrow \overline{h(x)} = h(x)$

定義

$h(x;A) > 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A$: 正定値 (positive-definite)

$h(x;A) \geq 0 \Longleftrightarrow A$: 非負定値 (nonnegative-), 半正定値 (positive-semidefinite)

$h(x;A) < 0 \Longleftrightarrow A$: 負定値 (negative-definite)

$h(x;A) \leq 0 \Longleftrightarrow A$: 非正定値 (nonpositive-), 半負定値 (positive-semidefinite)

定理 A: エルミート行列, 対称行列.

$$h(x;A) > 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \cdots, \lambda_n > 0.$$

∵ Aはユニタリー行列で対角化できるので, $A p_i = \lambda_i p_i$, $(p_i, p_j) = \delta_{ij}$として.
$x = c_1 p_1 + \cdots + c_n p_n$とおく. このとき
$Ax = c_1 A p_1 + \cdots + c_n A p_n = c_1 \lambda_1 p_1 + \cdots + c_n \lambda_n p_n$であり
$h = (x, Ax) = (c_1 p_1 + \cdots + c_n p_n,\ c_1 \lambda_1 p_1 + \cdots + c_n \lambda_n p_n) = \sum_i \sum_j \lambda_j \overline{c_i} c_j (p_i, p_j)$
$= \sum_j \lambda_j |c_j|^2 = \lambda_1 |c_1|^2 + \cdots + \lambda_n |c_n|^2$
となる. $|c_1|^2, \cdots, |c_n|^2$は任意の実数であるから, $h > 0$となるのは.
$\lambda_1 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$のときのみである.

注 エルミート行列, 対称行列の固有値はすべて実数

No.
Date

定理 $\begin{cases} A : m\times n \\ B = \underset{n\times m,\ m\times n}{A^*A} : n\times n \end{cases}$ は $\begin{cases} B & \text{:正定値} \\ B & \text{:エルミート行列} \end{cases}$ ⟺ Bの固有値は全て正

∵ $h = (x, Bx) = x^*Bx = x^*A^*Ax = \underset{y}{(Ax)}^*\underset{y}{(Ax)} = y^*y = (y, y) = \|y\|^2 > 0$.

⟺ Bの固有値は正. ▢

定理 A : n×n, 正規行列, 正定値

⟹ 固有値分解と特異値分解は一致.

∵ SVD : $\underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{U}\underset{n\times n}{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}}\underset{n\times n}{V^*}$.

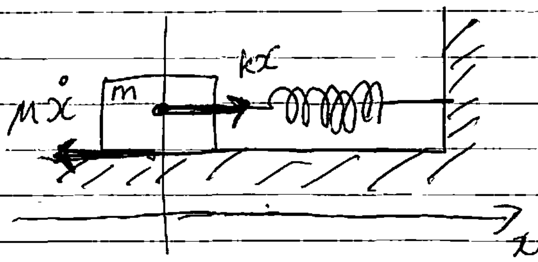
$A^*A = AA^*$ より $B = A^*A$ と $C = AA^*$ の固有値, 固有ベクトルは同じであるから
$U = V$ となる. よって

$A = U\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}U^*$ であり, これは固有値分解である. ▢

No.
Date.

§ 力学系の例

（線形バネの振動）



$\boxed{例}$ 運動方程式

$$m\frac{d^2x^2}{dt^2} = kx - \mu\frac{dx}{dt}.$$

$\begin{cases} m: 質量 \\ k: バネ定数 \\ \mu: 動まさつ係数 \end{cases}$

速度 $v = \frac{dx}{dt}$ とおくと．

$$m\frac{dv}{dt} = kx - \mu v$$

となるので，連立すると．

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}v \end{cases}$$

である ここでは

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

とおくと．

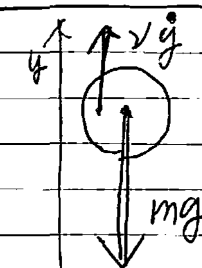
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

と表されるから．

$$\frac{d}{dt}\mathbb{x} = A\mathbb{x}$$

と書ける．同次線形自励系の力学系である。

$\boxed{例}$（自由落下運動）



運動方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + \nu\frac{dy}{dt}.$$

$\begin{cases} m: 質量 \\ g: 重力加速度 \end{cases}$

速度 $v = \frac{dy}{dt}$ とおくと．

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + \nu v$$

より

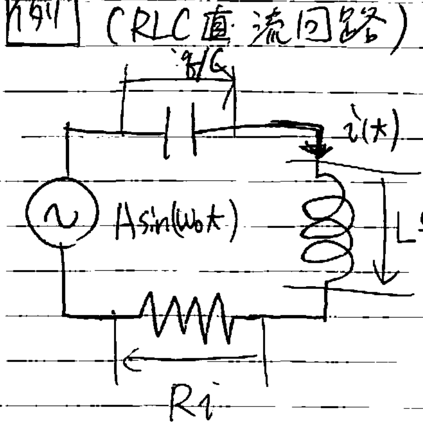
$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{\nu}{m}v + g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\nu}{m} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbb{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{b}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbb{x}}{dt} = A\mathbb{x} + \mathbb{b}.$$

と書ける。 非同次線形自励系。

$\boxed{例}$（RLC直流回路）



$\begin{cases} 電流 \ i(t) = \frac{dq}{dt} \\ Cの電荷 \ q(t) \end{cases}$

キルヒホッフの電圧則．

$$A\sin(\omega_0 t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \left(-\frac{R}{L}\right)i + \left(-\frac{1}{LC}\right)q + \left(\frac{A}{L}\right)\sin(\omega_0 t)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix}}_{=\mathbb{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{A}{L}\sin\omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{b}(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbb{x}}{dt} = A\mathbb{x} + \mathbb{b}(t)$$

非同次線形非自励系

力学系への応用

§ 力学系

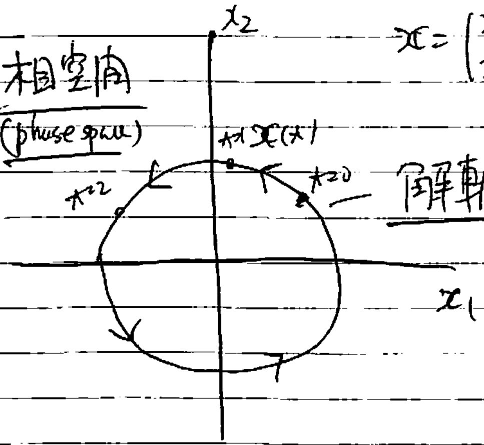
力学系 (dynamical system)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t: 時間, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(t, x) \cdots \text{ tが陽に表れる場合を非自励系という (nonautonomous)} \\ f(x) \cdots \text{ tが陽に表れない場合を自励系という (autonomous)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = Ax + b \cdots \text{ 非同次線形 (inhomogeneous)} \\ f(x) = Ax \cdots \text{ 同次線形 (homogeneous)} \end{cases}$$

相空間 (phase space)

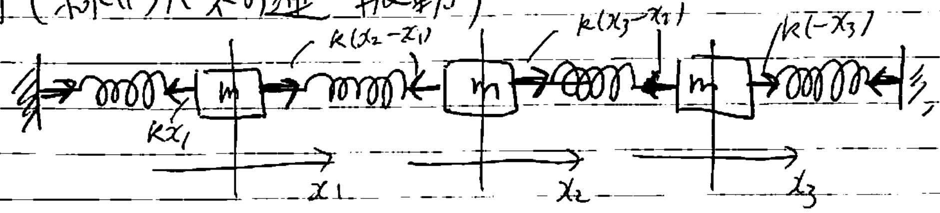


$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

解軌道 (orbit, trajectory)

No.
Date

例 (線形バネの連 振動)



3つの運動方程式

$$
\begin{cases}
m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2-x_1) - kx_1 = k(x_2-2x_1) \\[2ex]
m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_3-x_2) - k(x_2-x_1) = k(x_3-2x_2+x_1) \\[2ex]
m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = k(-x_3) - k(x_3-x_2) = k(-2x_3+x_2)
\end{cases}
$$

速度 $v_1=\dot{x}_1$, $v_2=\dot{x}_2$, $v_3=\dot{x}_3$ とおく。

$$
\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{=x}
=
\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)}_{=A}
\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{=x}
$$

$\Longrightarrow \dfrac{dx}{dt} = Ax$. 同次線形自励.

No.
Date.

§ 行列, ベクトルの微分

定義 $\frac{d}{dt}A \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \cdots & & \frac{da_{mn}}{dt} \end{pmatrix}$ 特に $m\times 1$ 型のとき $\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$

定理 $\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$

∵ $AB = C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ より

$\frac{dc_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_k a_{ik}b_{kj} = \sum_k \dot{a}_{ik}b_{kj} + a_{ik}\dot{b}_{kj}$ 図.

定理 $\frac{d}{dt}(A^{-1}) = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$

∵ $I = A^{-1}A$ を両辺微分すると.

$0 = \frac{dA^{-1}}{dt}A + A^{-1}\frac{dA}{dt} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dt}A = -A^{-1}\frac{dA}{dt} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$ 図

例 $y = Ax \Rightarrow \dot{y} = \dot{A}x + A\dot{x}$

No.
Date.

§ 同次線形自励系の一般解

力学系 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$n=1$ のとき $\boldsymbol{x} = (x)$, $A = (a)$ とおくと.

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

この一般解は

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

と得られる。よって一般の n のとき,

$$\boldsymbol{x}(t) = B(t)\boldsymbol{x}(0), \quad B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

と一般解を仮定する。これを $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ へ代入すると,

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dt}\left(B(t)\boldsymbol{x}(0)\right) = \frac{dB(t)}{dt}\boldsymbol{x}(0) + B(t)\underbrace{\boxed{\frac{d\boldsymbol{x}(0)}{dt}}}_{0} = \frac{dB(t)}{dt}\boldsymbol{x}(0) = \dot{B}\boldsymbol{x}(0)$$

$$(\text{右辺}) = A\boldsymbol{x} = AB\boldsymbol{x}(0)$$

$$\Rightarrow \dot{B}\boldsymbol{x}(0) = AB\boldsymbol{x}(0) \Rightarrow \dot{B} = AB.$$

となる。$\dot{B} = AB$ をみたす B がみつかれば解が得られる。
ここで

$$B(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n$$

とおく. このとき

$$\dot{B} = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots\right) = 0 + 1A + \frac{2}{2}tA^2 + \frac{3}{3!}t^2A^3 + \frac{4}{4!}t^3A^4 + \cdots$$

$$= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \frac{t^3}{3!}A^4 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \cdots \qquad \cdots + \frac{n}{n!}t^{n-1}A^n + \cdots$$

$$= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \cdots\right)$$

$$= A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n\right) = AB.$$

が成り立つ. よって, この B は $\dot{B} = AB$ をみたす. B を

$$\boxed{B(t) = e^{tA}}$$

と書くことにする

No.
Date.

一般解は

$$x(t) = e^{tA} x(0)$$

と表される。

非同次の場合は定数変化法を用いて解を$\underbrace{}_{\dot{x} = Ax + b}$

$$x(t) = e^{tA} C(t)$$

と仮定する. $\dot{x} = Ax + b$ へ代入すると,

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(e^{tA} C\right) = \frac{de^{tA}}{dt} C + e^{tA}\frac{dC}{dt} = A\underbrace{\boxed{e^{tA} C}}_{=x} + e^{tA}\dot{C} = \cancel{Ax} + e^{tA}\dot{C} = \cancel{Ax} + b$$

$$\Rightarrow e^{tA}\dot{C} = b \Rightarrow \dot{C} = (e^{tA})^{-1} b \overset{x}{=} e^{-tA} b$$

$$\Rightarrow \dot{C} = e^{-tA} b \Rightarrow C(t) = \int^{t} e^{-tA} b \, dt.$$

となる. よって

$$x(t) = e^{tA} C(t), \quad C(t) = \int^{t} e^{-tA} b \, dt.$$

と書ける.

No.
Date.

§ 固有値分解

固有方程式 (eigen-equation)　$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{x} \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda : \text{固有値 (eigen value)} \\ \boldsymbol{x} : \lambda \text{に属する固有ベクトル (eigen-vector)} \end{cases}$$

固有空間 (eigen-space)　$W(\lambda) = \{ \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \}$

固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とその固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \cdots, \mathbb{p}_n$ に対して

$$\begin{cases} A\mathbb{p}_1 = \lambda_1 \mathbb{p}_1 \\ A\mathbb{p}_2 = \lambda_2 \mathbb{p}_2 \\ \vdots \\ A\mathbb{p}_n = \lambda_n \mathbb{p}_n \end{cases} \Rightarrow (A\mathbb{p}_1 \ A\mathbb{p}_2 \cdots A\mathbb{p}_n) = (\lambda_1 \mathbb{p}_1 \ \lambda_2 \mathbb{p}_2 \cdots \lambda_n \mathbb{p}_n)$$

$$\Rightarrow A \underbrace{(\mathbb{p}_1 \ \mathbb{p}_2 \cdots \mathbb{p}_n)}_{=P} = \underbrace{(\mathbb{p}_1 \ \mathbb{p}_2 \cdots \mathbb{p}_n)}_{=P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=D}$$

$$\Rightarrow AP = PD.$$

が成立する。P が正則 (regular) のとき ($\{\mathbb{p}_1, \cdots, \mathbb{p}_n\}$ が1次独立なとき)

$$\Rightarrow P^{-1}AP = P^{-1}PD \Rightarrow D = P^{-1}AP$$

と書ける。A から D への変換

$$D = P^{-1}AP$$

を対角化という。左から P 右から P^{-1} をかけて、

$$A = PDP^{-1}$$

を A の固有値分解 (eigen decomposition) という。

定理　A が対角化可能なとき $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$

$\because$ $A^k = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1}) \cdots (P}_{I}DP^{-1}) = P\underbrace{DD \cdots D}_{k}P^{-1} = PD^kP^{-1}.$ 証

No.
Date.

§ 一般解の固有値分解

力学系 $\dot{x}=Ax$ の一般解は $x(t)=e^{tA}x(0)$ である。
ここに固有値分解 $A=PDP^{-1}$ を代入すると

$$e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}PD^nP^{-1}=P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D^n\right)P^{-1}=Pe^{tD}P^{-1}$$

と書ける。また、

$$e^{tD}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & & O\\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_N^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda_1)^n}{n!} & & & O\\ & \sum_{n}\frac{(t\lambda_2)^n}{n!} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \sum_{n}\frac{(t\lambda_N)^n}{n!}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & O\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e^{\lambda_N t}\end{pmatrix}$$

ともかける。よって一般解は A が対角化可能なとき、

$$x(t)=Pe^{tD}P^{-1}x(0)=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_N t}\end{pmatrix}P^{-1}x(0),\quad P=(p_1\ p_2\ \cdots\ p_N)$$

と表される。さらに書きかえて

$$\underbrace{\boxed{P^{-1}x(t)}}_{y(t)}=e^{tD}\underbrace{\boxed{P^{-1}x(0)}}_{y(0)}\quad\Rightarrow\quad y(t)=e^{tD}y(0)$$

となる。$y=P^{-1}x$ は

座標　基底

$$x=Py\ \Rightarrow\ x=(p_1\ p_2\ \cdots\ p_N)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_N\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_Ne_N$$

$$=y_1p_1+y_2p_2+\cdots+y_Np_N$$

基底　座標

と表されるので、$x\mapsto y$ は標準基底 $\Sigma=\{e_1,\dots,e_N\}$ の座標 $(x_1,\dots,x_N)_\Sigma$ から基底 $\Sigma'=\{p_1,\dots,p_N\}$ の座標 $(y_1,\dots,y_N)_{\Sigma'}$ への座標変換とみなされる。

基底 Σ' における座標系では、力学系は $y(t)=e^{tD}y(0)$ より

$$\begin{cases}y_1(t)=e^{\lambda_1 t}y_1(0)\\ y_2(t)=e^{\lambda_2 t}y_2(0)\\ \quad\vdots\\ y_N(t)=e^{\lambda_N t}y_N(0)\end{cases}$$

と書ける。これで解軌道を描き、座標変換 $x=Py$ で $(x_1,\dots,x_N)_\Sigma$ の解軌道に変換すればよい。

No.
Date.

§実固有値の場合

例

$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, $x = x(t)$

$\dot{x} = v$ とおくと、

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = 3v - 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

と書ける。Aの固有値, 固有ベクトル, 固有空間を求める。

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda = 1, 2$$

固有値は $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ である。それぞれ固有方程式 $A\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}$, $A\mathbf{x} = \lambda_2 \mathbf{x}$ を解く

<u>$\lambda = \lambda_1 = 1$ のとき</u>

$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \Rightarrow (A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\quad A - I = \begin{pmatrix} 0-1 & 1 \\ -2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$A - I \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow x - v = 0 \Rightarrow x = v.$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_1} = c\mathbf{p}_1 \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

固有空間は $W(\lambda_1) = W(1) = \langle \mathbf{p}_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

<u>$\lambda = \lambda_2 = 2$ のとき</u>

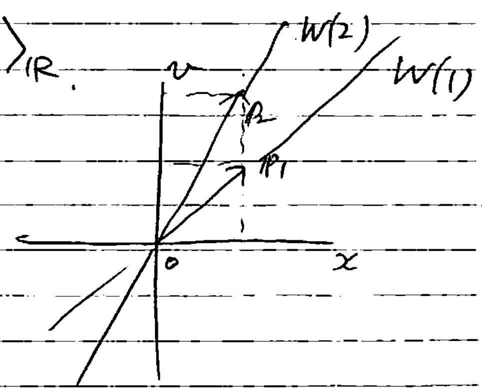
$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \Rightarrow (A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解く。

$A - 2I = \begin{pmatrix} 0-2 & 1 \\ -2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より $x - \frac{v}{2} = 0$

$\Rightarrow v = 2x$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_2} = c\mathbf{p}_2 \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

固有空間は $W(\lambda_2) = W(2) = \langle \mathbf{p}_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.



$P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく。

$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$ より P は正則であり、

Aは対角化可能である。よって

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

と書ける。

No.
Date.

力学系 $\dot{x}=Ax$ の一般解 $x=e^{tA}x(0)$ は

$$x=e^{tA}x(0)=e^{tPDP^{-1}}x(0)=Pe^{tD}P^{-1}x(0) \Rightarrow P^{-1}x(t)=e^{tD}P^{-1}x(0)$$
$$\Rightarrow y(t)=e^{tD}y(0)$$

ただし, $x=Py$

と書ける. $y=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}$ とおくと,

$$y(t)=e^{tD}y(0) \Rightarrow \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_0\\ \tilde{v}_0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\tilde{x}=e^{\lambda_1 t}x_0\\ \tilde{v}=e^{\lambda_2 t}v_0\end{cases}$$

と表される. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$ より

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{x}=e^{t}\tilde{x}_0\\ \tilde{v}=e^{2t}\tilde{x}_0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\tilde{x}^2=e^{2t}\tilde{x}_0^2\\ \tilde{v}=e^{2t}\tilde{v}_0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tilde{v}}{\tilde{x}^2}=\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{x}_0^2} \Rightarrow \tilde{v}=\left(\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{x}_0^2}\right)\tilde{x}^2$$

放物線

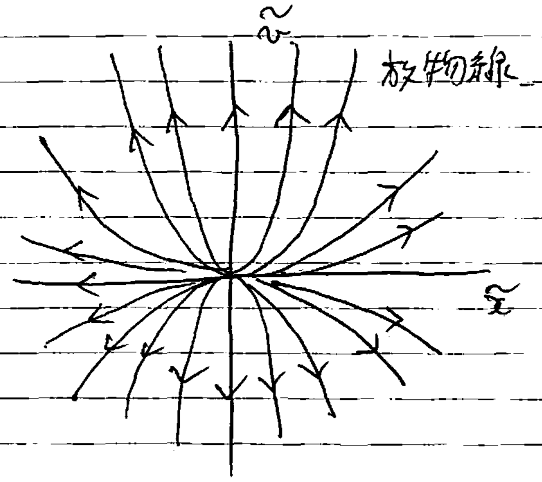
となる. 座標変換

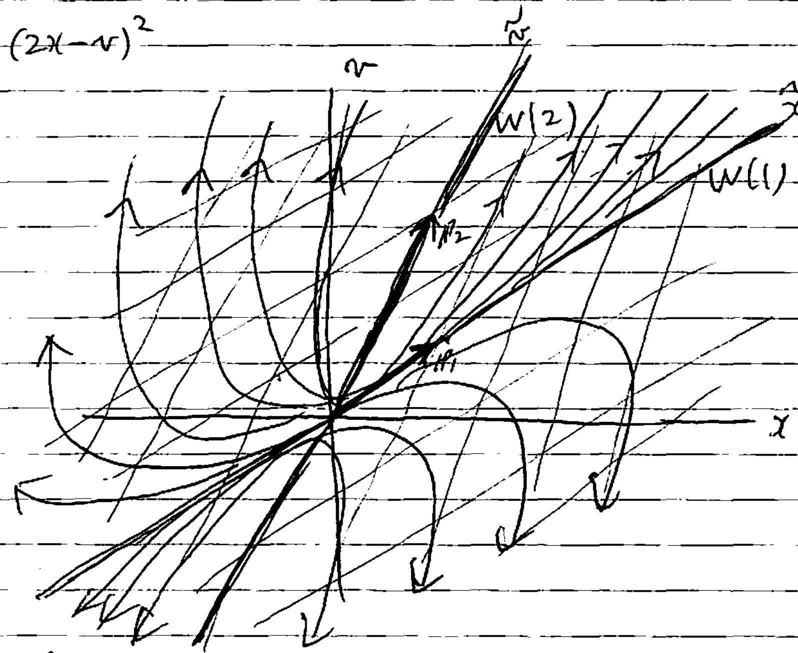
$$y=P^{-1}x \Rightarrow \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-v\\v-x\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\tilde{x}=2x-v\\ \tilde{v}=v-x\end{cases}$$

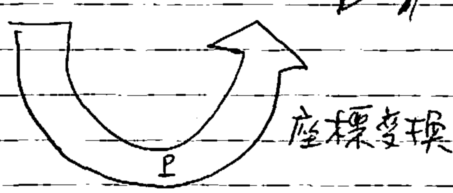
より, 解軌道は

$$(v-x)=\frac{v_0-x_0}{(2x_0-v_0)^2}(2x-v)^2$$

となる







No.
Date.

§ 複素固有値の場合

例1　$\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0.$

速度 $v=\dot{x}$ とおく。

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=-5x-2v\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\-5x-2v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{x}=A\mathbb{x}.$$

Aの固有値は

$$0=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}0-\lambda&1\\-5&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda(-2-\lambda)+5=\lambda^2+2\lambda+5$$

$$\Rightarrow \lambda=-1\pm 2i.$$

と求まる。

$$\begin{cases}\lambda_1=-1+2i\\ \lambda_2=-1-2i\end{cases}$$

とおく。$\lambda_2=\overline{\lambda_1}$ であることに注意する。

λ_1の固有ベクトルは $A\mathbb{x}=\lambda_1\mathbb{x}$ より

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}0-\lambda_1&1\\-5&-2-\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2i&1\\-5&-1-2i\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}5&1+2i\\5&1+2i\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}5&1+2i\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 5x+(1+2i)v=0 \Rightarrow x=-\frac{1+2i}{5}v$$

$$\Rightarrow \mathbb{x}=\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1-2i}{5}c\\c\end{pmatrix}=\frac{c}{5}\begin{pmatrix}-1-2i\\5\end{pmatrix}=\frac{c}{5}\mathbb{p}_1.$$

ここで

$$A\mathbb{p}_1=\lambda_1\mathbb{p}_1 \Rightarrow \overline{A\mathbb{p}_1}=\overline{\lambda_1\mathbb{p}_1}$$

$$\Rightarrow \overline{A}\,\overline{\mathbb{p}_1}=\overline{\lambda_1}\,\overline{\mathbb{p}_1} \Rightarrow A\overline{\mathbb{p}_1}=\lambda_2\overline{\mathbb{p}_1}$$

より λ_2の固有ベクトルは $\mathbb{p}_2=\overline{\mathbb{p}_1}$ である。

よって、Aは

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\overline{\lambda_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2i&0\\0&1-2i\end{pmatrix}=P^{-1}AP$$

$$P=(\mathbb{p}_1\ \overline{\mathbb{p}_1})=\begin{pmatrix}1+2i&1-2i\\5&5\end{pmatrix}$$

と対角化可能である。

$\dot{\mathbb{x}}=A\mathbb{x}$ の一般解は

$$\mathbb{x}(t)=e^{tA}\mathbb{x}(0)=e^{tPDP^{-1}}\mathbb{x}(0)=Pe^{tD}P^{-1}\mathbb{x}(0).$$

と表される。$\lambda_1=\alpha+i\omega,\ \lambda_2=\alpha-i\omega$ とおくと、

$$e^{tD}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\0&e^{\overline{\lambda_1}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\alpha t}e^{i\omega t}&0\\0&e^{\alpha t}e^{-i\omega t}\end{pmatrix}$$

$$=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}e^{i\omega t}&0\\0&e^{-i\omega t}\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}\alpha=Re(\lambda_1)=\frac{\lambda_1+\overline{\lambda_1}}{2}\\ \omega=Im(\lambda_1)=\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_1}}{2i}\end{cases}$$

$$=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)&0\\0&\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\end{pmatrix}$$

と表される。さらに、

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2i}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2i}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&-i\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta+i\sin\theta&0\\0&\cos\theta-i\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1}R(\theta)S^{-1}=\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}$$

と書ける。

よって、

$$x(t) = e^{\alpha t} PSR(\omega t)S^{-1}P^{-1}x(0) = e^{\alpha t}(PS)R(\omega t)(PS)^{-1}x(0)$$

となる。

$$PS = (p_1\ \ \bar{p}_1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2i} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{p_1-\bar{p}_1}{2i} & \frac{p_1+\bar{p}_1}{2}\end{pmatrix} = \left(\overset{q}{\overset{/\!/}{\boxed{Im(p_1)}}}\ \ \overset{r}{\overset{/\!/}{\boxed{Re(p_1)}}}\right) = (q\ \ r) = Q$$

とおくと、

$$x(t) = e^{\alpha t} Q R(\omega t) Q^{-1} x(0).$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{Q^{-1}x(t)}}_{y(t)} = e^{\alpha t}R(\omega t)\underbrace{\boxed{Q^{-1}x(0)}}_{y(0)}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = e^{\alpha t}R(\omega t)y(0)$$

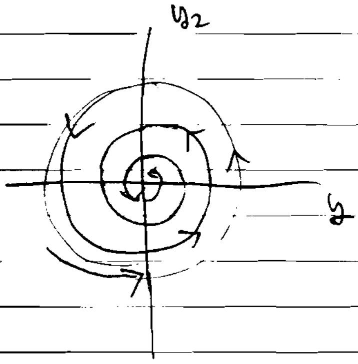
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{\alpha t}(y_1(0)\cos\omega t + y_2(0)\sin\omega t) \\ y_2(t) = e^{\alpha}(y_1(0)\sin\omega t + y_2(0)\cos\omega t) \end{cases}$$

注 $z \in \mathbb{C} \ni z = x+iy$

zの実部 $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = x.$

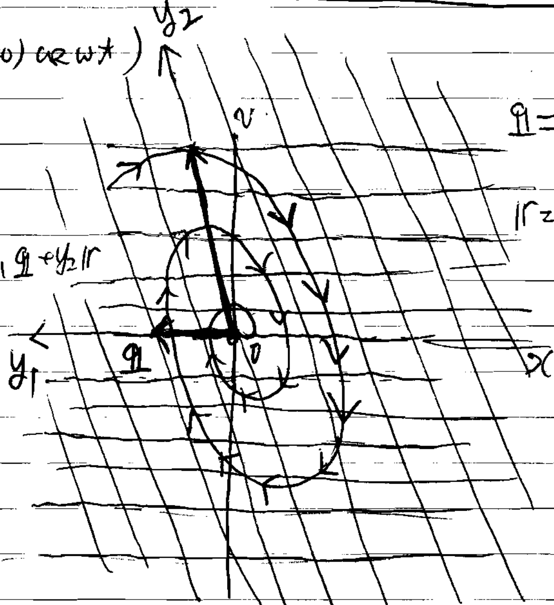
zの虚部 $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(x+iy)-(x-iy)}{2i} = y.$

$\boxed{\alpha=-1,\ \omega=2}$



$x = Qy = y_1 q + y_2 r$

座標変換



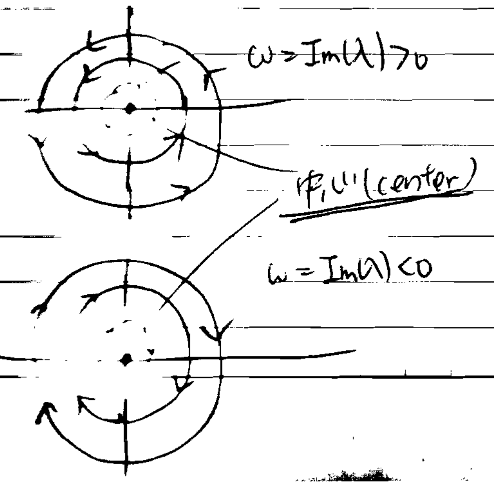
$q = Im(p_1) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

$r = Re(p_1) = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

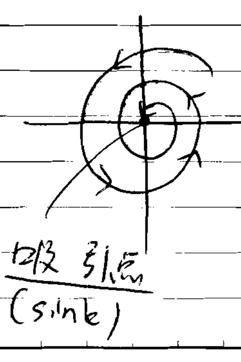
y_1軸の向きに注意

一般に、

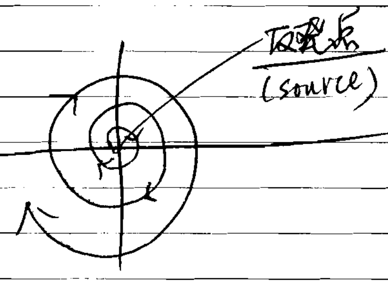
$\alpha = Re(\lambda) = 0$



$\alpha = Re(\lambda) < 0$

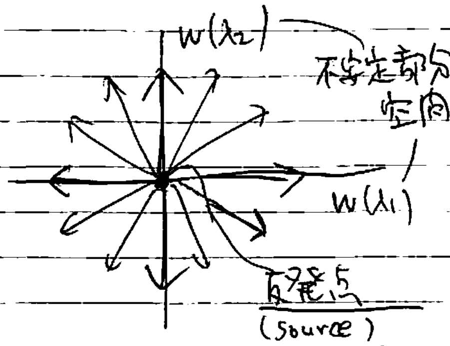


$\alpha = Re(\lambda) > 0$

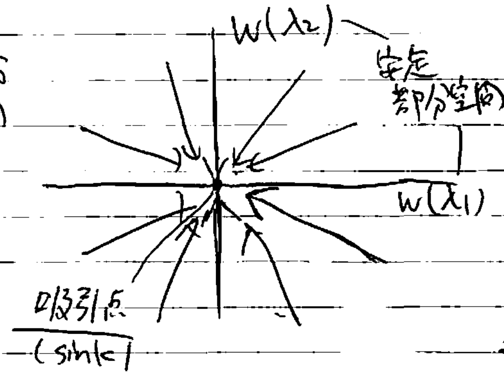


一般に

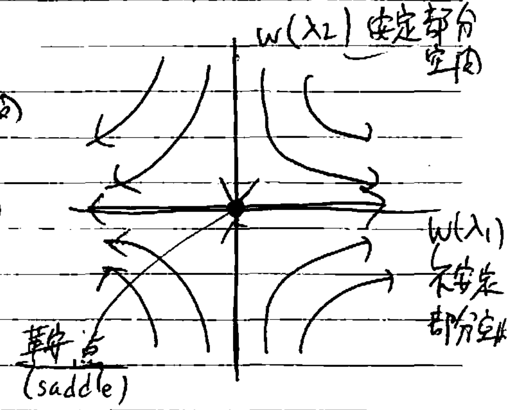
$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$



$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$



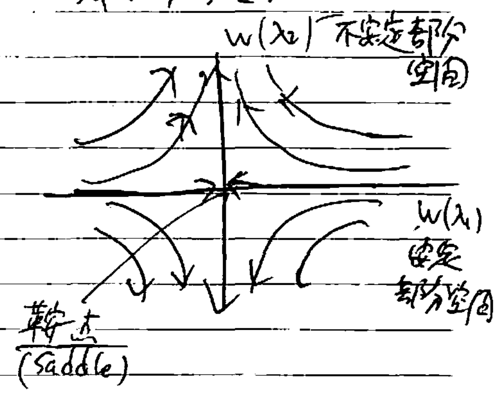
$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$



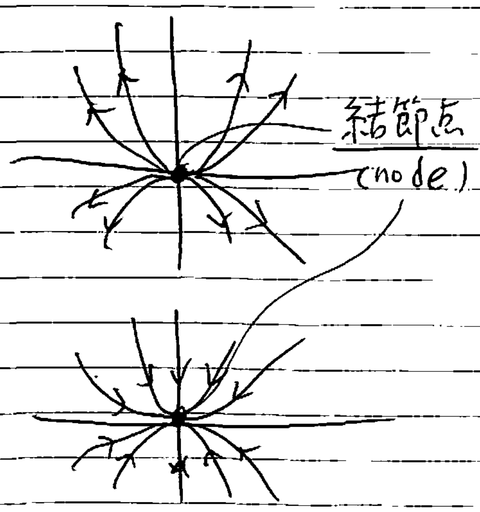
$\lambda > 0$ のとき $W(\lambda)$: 不安定部分空間 (unstable subspace)

$\lambda < 0$ のとき $W(\lambda)$ 安定部分空間 (stable subspace)

$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$



特に $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$



No.
Date.

§ 平衡点

固有空間 (eigen-space) $W(\lambda)=\{x \mid Ax=\lambda x\}$

$\mathrm{Re}(\lambda)<0$ のとき 安定部分空間 (stable subspace) $W_s(\lambda)$

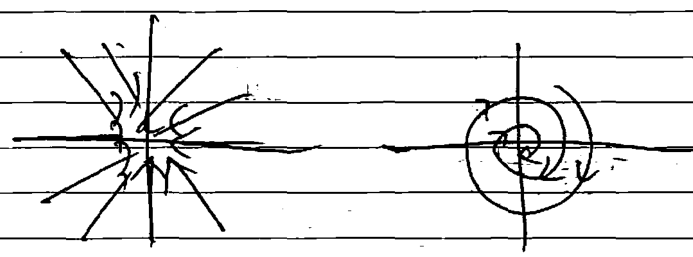
$\mathrm{Re}(\lambda)>0$ のとき 不安定部分空間 (unstable subspace) $W_u(\lambda)$

$\mathrm{Re}(\lambda)=0$ のとき 中心部分空間 (center subspace) $W_c(\lambda)$

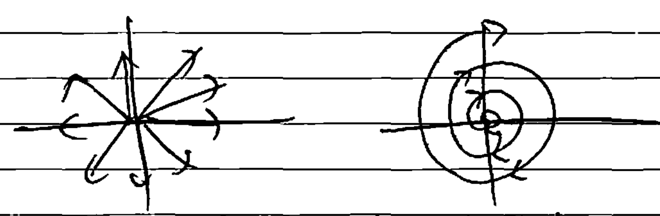
平衡点 (equibria) $\frac{dx^*}{dt}=0$ の点, $\iff$ $Ax^*=0$ の点,

$\iff \mathrm{Ker}(A)=\{x \mid Ax=0\}\ni x^*$

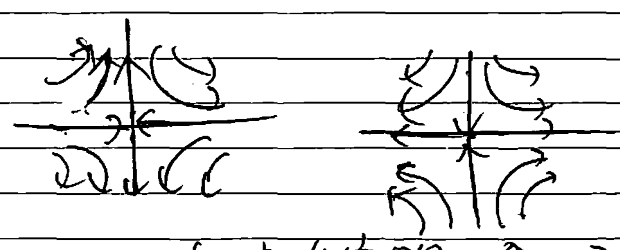
(i) $x^*\in W_s(\lambda_1)$, $x^*\in W_s(\lambda_2)$, $\cdots$ 全て安定部分空間に含まれるとき、
x^*は吸引点 (sink)



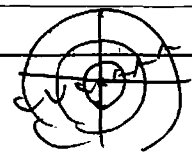
(ii) $x^*\in W_u(\lambda_1)$, $x^*\in W_u(\lambda_2)$, $\cdots$ 全て不安定部分空間に含まれるとき、
x^*は反発点 (source).



(iii) $x^*\in W_s(\lambda_1)$, $x^*\in W_u(\lambda_2)$, $\cdots$ 安定と不安定部分空間に含まれるとき、
x^*は鞍点 (saddle)



(iv) $x^*\in W_c(\lambda_1)$, $\cdots$ 中心部分空間に含まれるとき
x^*は中心 (center).



No.
Date.

§ 重複固有値の場合

例

$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$

$v = \dot{x}$ とおくと.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x}.$$

と書ける。Aの固有値は

$$0 = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(2-\lambda)+1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$$

より

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \ (2重)$$

となる. $\lambda=1$ の固有ベクトルは

$A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ より

$$(A - I) = \begin{pmatrix}0-1&1\\-1&2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

となるから. $x - v = 0 \Rightarrow x = v$

よって.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_1} = c\mathbb{P}_1$$

と得られる. $\lambda=1$ の固有空間は.

$$W(1) = \langle \mathbb{P}_1\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}}$$

であり 1次元となる.

Aは対角化できない.

Aをジョルダン分解する.

§ ジョルダン分解

一般固有空間を

$$W_m = \{\mathbf{x} \mid (A-\lambda I)^m \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

とおく. すると.

$$(A-\lambda I)\mathbb{P}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{P}_1 \in W_1(\lambda)$$

である. 次に

$$(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbb{P}_1$$

を解く.

$$(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbb{P}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}2-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

拡大係数行列を簡約化して.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\1&-1&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\0&0&0\end{array}\right)$$

である. これより $x - v = 1$ となるので

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+v\\v\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_1}$$

$$= \mathbb{P}_2 + c\mathbb{P}_1$$

を得る. $\mathbb{P}_2$ は

$$(A-\lambda I)\mathbb{P}_2 \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{P}_2 \notin W_1(\lambda)$$

$$(A-\lambda I)^2\mathbb{P}_2 = (A-\lambda I)\underbrace{(A-\lambda I)\mathbb{P}_2}_{\mathbb{P}_1}$$

$$= \underbrace{(A-\lambda I)\mathbb{P}_1}_{\mathbf{0}}$$

$$= \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{P}_2 \in W_2(\lambda)$$

をみたす, よって.

$$\begin{cases} A\mathbb{P}_1 = \lambda\mathbb{P}_1 \\ A\mathbb{P}_2 = \lambda\mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_1 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \mathbb{P}_1 \in W_1(\lambda) \\ \mathbb{P}_2 \notin W_1(\lambda),\ \mathbb{P}_2 \in W_2(\lambda) \end{array}$$

$$\Rightarrow (A\mathbb{P}_1\ \ A\mathbb{P}_2) = (\lambda\mathbb{P}_1\ \ \lambda\mathbb{P}_2+\mathbb{P}_1)$$

$$\Rightarrow A\underbrace{(\mathbb{P}_1\ \mathbb{P}_2)}_{P} = \underbrace{(\mathbb{P}_1\ \mathbb{P}_2)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}}_{J}$$

$\Rightarrow AP = PJ$. が成立する.

No.
Date.

P は正則なので

$$A = PJP^{-1}$$

が成り立つ。これをジョルダン分解という。

J をジョルダンブロック 細胞 (cell) という。

一般にジョルダンブロック

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \Bigg\} m$$

は、

$J = D + N$
$= \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$
$J^k = (D+N)^k$
$= D^k + kND + \cdots$
$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} N^{r} D^{k-r}$

(0) 示せ。

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{3}\lambda^{k-3} & \cdots \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \ddots & \\ & & \lambda^k & \ddots & \\ & & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix}, \quad J^0 = I, \; J^1 = J, \; k = 1, 2, \cdots$$

が成り立つ。これを用いると、

$\dot{x} = Ax$ の一般解は

$$x = e^{tA} x(0) = e^{tPJP^{-1}} x(0)$$
$$= Pe^{tJ}P^{-1} x(0)$$

と書ける。ここで e^{tJ} は、

$$e^{tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n = \begin{pmatrix} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!}}^{①} & \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot t^n \lambda^{n-1}}{n!}}^{②} & \boxed{③} & \cdots \\ & \boxed{①} & \boxed{②} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \boxed{4} & \cdots \\ & \boxed{①} & \boxed{②} & \boxed{3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$② = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n\lambda^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(t\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= t\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = te^{\lambda t}.$$

$$③ = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\binom{n}{2} t^n \lambda^{n-2}}{n!} = \sum_{n=2} \frac{\cancel{n!}}{(n-2)!\,2\,\cancel{n!}} t^n \lambda^{n-2} = \frac{t^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(t\lambda)^{n-2}}{(n-2)!}$$
$$= \frac{t^2}{2} e^{t\lambda}$$

λ は A の m 重固有値。

一般固有空間

$$W_m(\lambda) = \{ x \mid (A - \lambda I)^m x = 0 \}$$

$$\begin{cases} AP_1 = \lambda P_1 \\ AP_2 = \lambda P_2 + P_1 \\ AP_3 = \lambda P_3 + P_2 \\ \quad \vdots \\ AP_m = \lambda P_m + P_{m-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 \in W_1(\lambda) \\ P_2 \notin W_1(\lambda),\ P_2 \in W_2(\lambda) \\ P_3 \notin W_1(\lambda),\ P_3 \notin W_2(\lambda),\ P_3 \in W_3(\lambda) \\ \cdots \\ P_m \notin W_1(\lambda),\ P_m \notin W_2(\lambda), \cdots \\ \quad \cdots,\ P_m \notin W_{m-1}(\lambda),\ P_m \in W_m(\lambda) \end{cases}$$

$$(AP_1\ AP_2 \cdots AP_m) = (\lambda P_1\ \ \lambda P_2 + P_1\ \cdots\ \lambda P_m + P_{m-1})$$

$$\Rightarrow A(P_1\ P_2 \cdots P_m) = (P_1\ P_2 \cdots P_m) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow AP = PJ.$

$\Rightarrow A = PJP^{-1}$

$\Rightarrow J = P^{-1}AP$: ジョルダン標準形 (Jordan canonical form)

No.
Date.

$x = Pe^{tJ}P^{-1}x(0)$ より

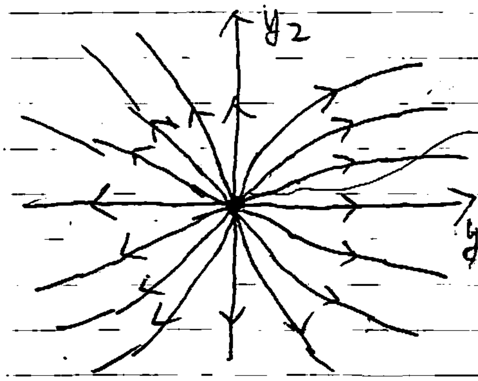
$$\underbrace{\boxed{P^{-1}x}}_{y} = e^{tJ}\underbrace{\boxed{P^{-1}x(0)}}_{y(0)}$$

$$\Rightarrow y = e^{tJ}y(0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\lambda t}y_1(0) + te^{\lambda t}y_2(0) \\ y_2 = e^{\lambda t}y_2(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1(0)}{y_2(0)} + t.$$



退化結節点

反発点 (source)

$y_1 = (C+t)y_2$ ← 傾きがC+tの直線. 傾きが時間tとともに増大するので放物線のような形となる.

ただし, $C = \dfrac{y_1(0)}{y_2(0)}$

$$y = P^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} x = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

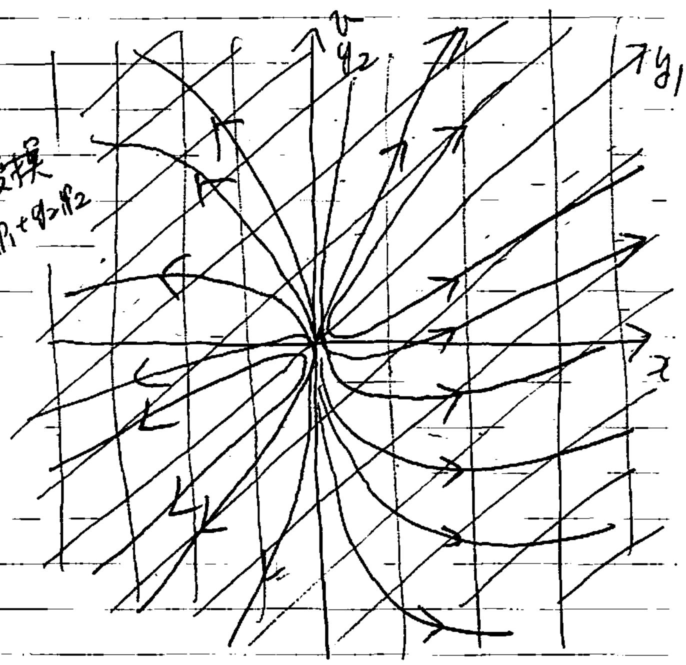
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ x-v \end{pmatrix}$$ より

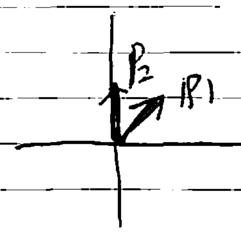
$$\frac{v}{x-v} = \overbrace{\left(\frac{v(0)}{x(0)-v(0)}\right)}^{=C} + t.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{v} - 1 = \frac{1}{C+t} \Rightarrow \frac{x}{v} = 1 + \frac{1}{C+t} = \frac{C+1+t}{C+t}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{C+t}{C+1+t}x}$$

座標変換
$x = y_1 p_1 + y_2 p_2$





No.
Date.

§離散力学系

前進差分 (オイラー差分) $\dfrac{dx}{dt} \simeq \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$

後退差分 $\dfrac{dx}{dt} \simeq \dfrac{x(t) - x(t+h)}{h}$

中心差分 (かえるとび差分) $\dfrac{dx}{dt} \simeq \dfrac{x(t+h) - x(t-h)}{h}$

} 差分近似

例

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\dfrac{dx}{dt}$ において $v = \dfrac{dx}{dt}$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \text{ : 力学系.}$$

ここで $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ を差分近似する.

(i) 前進差分

$$\frac{\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)}{h} = A\boldsymbol{x}(t) \Rightarrow \boldsymbol{x}(t+h) = \boldsymbol{x}(t) + hA\boldsymbol{x}(t) = \underbrace{(I + hA)}_{=\tilde{A}}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}(t+h) = \tilde{A}\boldsymbol{x}(t)$$

ここで $t = hn$ とおく. このとき $\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(nh) = \boldsymbol{x}^{(n)} \\ \boldsymbol{x}(t+h) = \boldsymbol{x}((n+1)h) = \boldsymbol{x}^{(n+1)}\end{array}\right\}$ とおく.

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^{(n+1)} = \tilde{A}\boldsymbol{x}^{(n)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -\frac{hk}{m} & 1-\frac{h\mu}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(n)} \\ v^{(n)} \end{pmatrix}$$

(ii) 後退差分

$$\frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-h)}{h} = A\boldsymbol{x}(t) \Rightarrow \frac{\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n-1)}}{h} = A\boldsymbol{x}^{(n)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n-1)} + hA\boldsymbol{x}^{(n)} \Rightarrow \boldsymbol{x}^{(n)} - hA\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow (I - hA)\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n-1)} \Rightarrow \boldsymbol{x}^{(n)} = (I - hA)^{-1}\boldsymbol{x}^{(n-1)}$$

No.
Date.

$$\Rightarrow x^{(n+1)} = \boxed{\underbrace{(I - hA)^{-1}}_{\tilde{A}}} x^{(n)} \Rightarrow x^{(n+1)} = \tilde{A}\, x^{(n)}.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ -\frac{hk}{m} & 1+\frac{h\mu}{m} \end{pmatrix}^{-1}.$$

(iii) 中心差分

$$\frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} = Ax(t) \Rightarrow \frac{x^{(n+1)} - x^{(n-1)}}{2h} = A x^{(n)}$$

$$\Rightarrow x^{(n+1)} = 2hAx^{(n)} + x^{(n-1)} \Rightarrow \begin{cases} x^{(n+1)} = 2hAx^{(n)} + x^{(n-1)} \\ x^{(n)} = x^{(n)} + 0 \cdot x^{(n-1)}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 2hA & I \\ \hline I & O \end{array}\right) \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \\ \hline x^{(n)} \\ v^{(n)} \end{pmatrix}}_{\tilde{x}^{(n+1)}} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2h & 1 & 0 \\ \frac{2hk}{m} & -\frac{2h\mu}{m} & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x^{(n)} \\ v^{(n)} \\ \hline x^{(n-1)} \\ v^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\tilde{x}^{(n)}}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}^{(n+1)} = \tilde{A}\, \tilde{x}^{(n)}.$$

注 $\frac{dx}{dt} = Ax$ と $\tilde{x}^{(n+1)} = \tilde{A}\tilde{x}^{(n)}$ は異なる解をもつ。時間刻み幅 h により、解軌道は大きく変化する。

一般に

$$x^{(n+1)} = A x^{(n)}$$ ：離散力学系 (discrete dynamical system)

$$\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \cdots \text{離散時間} \\ x \in \mathbb{R}^N \cdots \text{空間} \\ A \in \mathbb{R}^{N\times N}. \end{cases}$$

§離散力学系の一般解

$x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$ の一般解は $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ である.

∵ $x^{(1)} = Ax^{(0)},\ x^{(2)} = Ax^{(1)} = AAx^{(0)} = A^2x^{(0)},\ \cdots$ 白

A が固有値分解 $A = PDP^{-1}$ または

ジョルダン分解 $A = PJP^{-1}$ で表れるとする.

このとき,

$x^{(n)} = PDP^{-1}x^{(0)} \iff y^{(n)} = D^n y^{(0)}$, 座標変換 $x^{(n)} = Py^{(n)}$.

$$\iff \begin{cases} y_1^{(n)} = \lambda_1^n y_1^{(0)} \\ y_2^{(n)} = \lambda_2^n y_2^{(0)} \\ \vdots \qquad \vdots \\ y_N^{(n)} = \lambda_N^n y_N^{(0)} \end{cases}$$

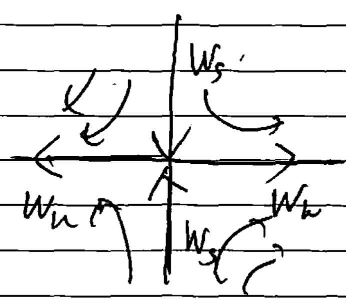
等比が $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ の
等比数列.

各成分は $|\lambda| < 1$ のとき収束し, $|\lambda| > 1$ のとき発散する.

$|\lambda| < 1$ のとき $W_s(\lambda)$: 安定部分空間

$|\lambda| > 1$ のとき $W_u(\lambda)$: 不安定部分空間

$|\lambda| = 1$ のとき $W_c(\lambda)$: 中心部分空間



$\boxed{\text{例}}$

差分方程式

$$x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=0, \quad \text{—— (☆)} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

の一般解を求める。まず,

$$\begin{cases} x_1(n)=x(n) \\ x_2(n)=x(n+1)=x_1(n) \end{cases}$$

とおくと(☆)は

$$x_2(n+1)=5x_2(n)-6x_1(n)$$

となるので,(☆)は

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$$

と書ける。ベクトルで表すと, 離散力学系

$$\text{(☆☆)} \quad x(n+1)=Ax(n), \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$x(n)=\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

を得る。(☆☆)の一般解は

$$x(n)=A^n x(0)$$

である。Aを固有値分解すると,

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=2, \ \lambda_2=3.$$

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1-x_2=0$$

$$\Rightarrow x=c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=c\,p_1$$

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x_1-x_2=0$$

$$\Rightarrow x=c\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=c\,p_2$$

$$\begin{cases} D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ P=(p_1 \ p_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A=PDP^{-1}$$

となる。

一般解は

$$x(n)=A^n x(0)=PD^nP^{-1}x(0)$$

となる。座標変換すると,

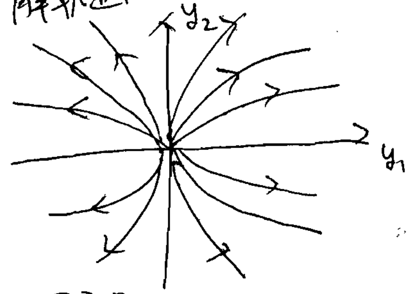
$$P^{-1}x(n)=D^nP^{-1}x(0)$$

$$y(n)=D^n y(0), \quad y(n)=P^{-1}x(n)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(n)=\lambda_1^n y_1(0)=2^n y_1(0) \\ y_2(n)=\lambda_2^n y_2(0)=3^n y_2(0) \end{cases}$$

を得る。解軌道は,



である。座標変換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

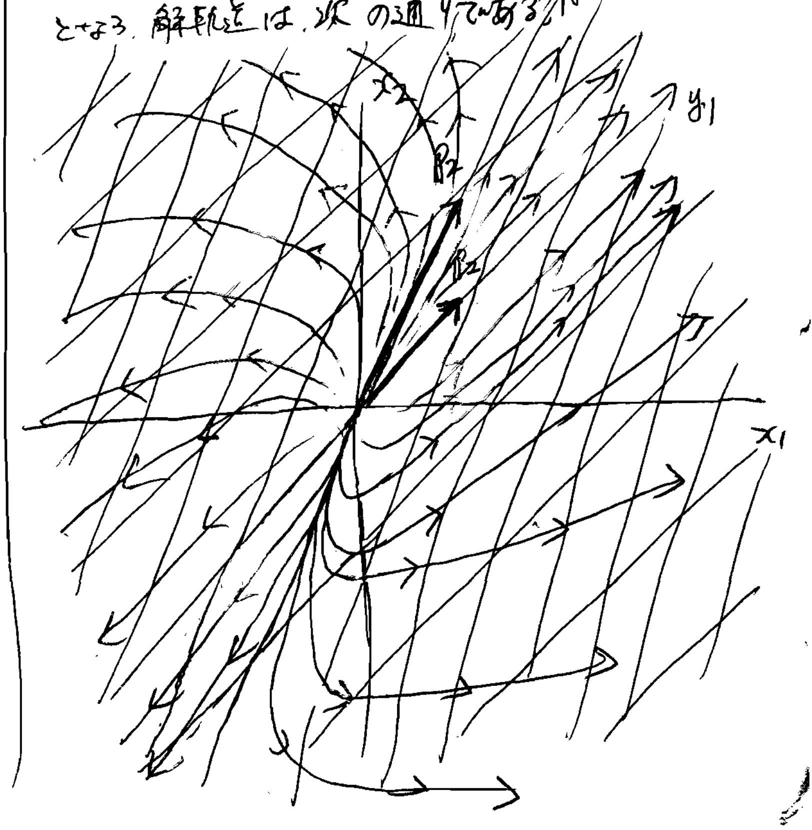
より

$$\begin{cases} x_1(n)=y_1(n)+y_2(n)=2^n y_1(0)+3^n y_2(0) \\ x_2(n)=2y_1(n)+3y_2(n)=2^{n+1}y_1(0)+3^{n+1}y_2(0) \end{cases}$$

であるから,(☆)の一般解は,

$$x(n)=\lambda_1^n(3x(0)-x(1))+\lambda_2^n(-2x(0)+x(1))$$

となる。解軌道は,次の通りである。



例

差分方程式 $x(n+2)+2x(n+1)+5x(n)=0$

離散力学系 $\boldsymbol{x}(n+1)=A\boldsymbol{x}(n)$

$\boldsymbol{x}(n)=\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

固有方程式

$|A-\lambda I|=\lambda^2+2\lambda+5=0$

固有値 $\begin{cases} \lambda_1=-1+2i \\ \lambda_2=\overline{\lambda_1}=-1-2i \end{cases}$

固有ベクトル

$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ -5 & -1-2i \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (1-2i)x_1+x_2=0$

$\Rightarrow \boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix}=c\boldsymbol{p}_1$

固有値分解

$A=PDP^{-1}$

$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\overline{\lambda_1})$

$=\begin{pmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{pmatrix}$

$P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2)=(\boldsymbol{p}_1\ \overline{\boldsymbol{p}_1})$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+2i & -1-2i \end{pmatrix}$

実標準形分解

$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix}=|\lambda_1|\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ $\quad \theta=\arg(\lambda_1)$

$=\tan^{-1}(-2)$

$|\lambda_1|=\sqrt{5}.$

$=|\lambda_1|S\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}S^{-1}$

$=|\lambda_1|SR(\theta)S^{-1}$

$S=\begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$A=PDP^{-1}$

$=|\lambda_1|PSR(\theta)S^{-1}P^{-1}$

$=|\lambda_1|(PS)R(\theta)(PS)^{-1}$

$=|\lambda_1|QR(\theta)Q^{-1}$

$Q=PS=(\boldsymbol{p}_1\ \overline{\boldsymbol{p}_1})\begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{p}_1-\overline{\boldsymbol{p}_1}}{2i} & \frac{\boldsymbol{p}_1+\overline{\boldsymbol{p}_1}}{2} \end{pmatrix}$

$=(\mathrm{Im}(\boldsymbol{p}_1)\ \ \mathrm{Re}(\boldsymbol{p}_1))$

$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v})$

一般解

$\boldsymbol{x}(n)=A^n\boldsymbol{x}(0)$

$=(|\lambda_1|QR(\theta)Q^{-1})^n\boldsymbol{x}(0)$

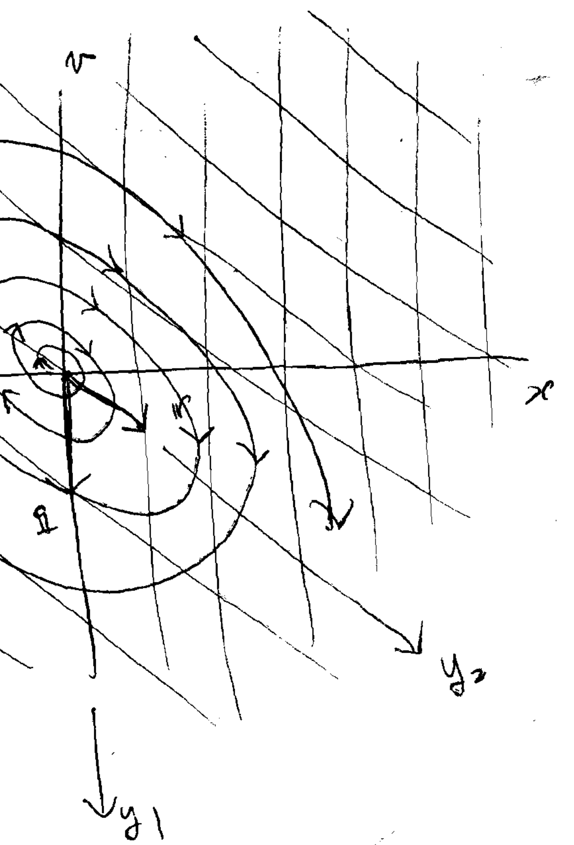
$=|\lambda_1|^nQR(\theta)^nQ^{-1}\boldsymbol{x}(0)$

$=|\lambda_1|^nQR(n\theta)Q^{-1}\boldsymbol{x}(0)$

座標変換

$\boldsymbol{y}(n)=|\lambda_1|^nR(n\theta)\boldsymbol{y}(0)$

$\boldsymbol{y}(n)=Q^{-1}\boldsymbol{x}(n)$



$\begin{cases} \theta<0 \\ |\lambda_1|>1 \end{cases}$