微分方程式

近藤弘一

最終更新日：平成 20 年 5 月 13 日

目 次

1 常微分方程式 **1**

1.1 常微分方程式 1
1.2 変数分離型方程式 2
1.3 同次型方程式 2
1.4 完全微分型方程式 2
1.5 演習問題 ~ 変数分離型，同次型，完全微分型 4
1.6 定数係数斉次線形方程式 6
1.7 定数係数非斉次線形方程式 6
1.8 演習問題 ~ 定数係数線形方程式 7
1.9 1 階線形方程式 9
1.10 ベルヌーイの方程式 9
1.11 演習問題 ~ 1 階線形，ベルヌーイ型 9
1.12 演習問題 ~ 巾級数展開 10

1 常微分方程式

§ 1.1 常微分方程式

定義 1.1 （常微分方程式）

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

常微分方程式（**ordinary differential equation**）typing... □

例 1.2 （常微分方程式）

$$y'' - y = x$$
$$2yy''' - (y')^2 = -4x$$
$$3y' - y = \sin x$$

typing... □

例 1.3 （常微分方程式）

$$y' = x$$

typing... □

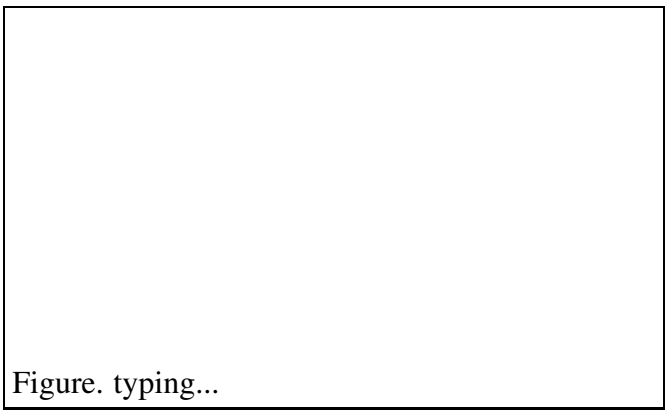

Figure. typing...

定義 1.4 （初期条件，一般解，特殊解） 一般解（**general solution**）typing... □

例 1.5 （初期条件，一般解，特殊解） $y' = x$ の typing... □

§ 1.2 変数分離型方程式

定義 1.6 (変数分離型)

$$y' = f(x)g(y)$$

変数分離型 typing... □

例 1.7 (変数分離型)

$$y' = xy$$

typing... □

例 1.8 (変数分離型)

$$y' = -2xy$$

typing...
初期条件 $y(0) = 1$ のもとでの特殊解は typing... □

§ 1.3 同次型方程式

例 1.9 (同次型)

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

typing... □

例 1.10 (同次型)

$$(x^2 - y^2)y' = 2xy$$

typing...
相似変換 typing...
特異解 $y = 0$ をもつ．typing... □

§ 1.4 完全微分型方程式

例 1.11 (完全微分型)

$$(3x - 4y + 3)y' + 6x + 3y + 5 = 0$$

typing... □

例 1.12 (完全微分型)

$$(2x - 2y - 1)y' + 2x + 2y + 1 = 0$$

typing... □

例 1.13 (完全微分型) 積分因子を求め，

$$(xy - x^2)y' + 1 - xy = 0$$

typing... □

例 1.14 (完全微分型) 積分因子を求め，

$$y' \cos y + \sin y = 0$$

typing... □

§ 1.5 演習問題 ~ 変数分離型，同次型，完全微分型

問 1.15 （変数分離型） 次の変数分離型方程式の一般解を求め解曲線を図示せよ．また，初期条件 $y(0)=y_0$ のときの特殊解もそれぞれ求めよ．

(1) $y'=x$ **(2)** $y'=\sin x$ **(3)** $y'=y$ **(4)** $y'=xy$ **(5)** $y'=y(1-y)$ **(6)** $y'=x(1-y)$ **(7)** $y'=1-y^2$ **(8)** $y'=\alpha(1-y)^2$ **(9)** $y'+\nu y=g$ (10) $y'=x^2y$ (11) $yy'=x^2+3$ (12) $2xy'=y$ (13) $yy'+x=0$ (14) $y+xy'=0$ (15) $xy'+1=y$ (16) $xy'=y(y-1)$ (17) $y'=-\mu y$ (18) $y'=\dfrac{x}{y}$ (19) $xy'+y=0$ (20) $y'=\mu y\left(1-\dfrac{y}{K}\right)$ (21) $y'=(1+x)\sec y$ (22) $(x+xy)y'=y-xy$ (23) $(x+1)y'-x(y^2+1)=0$ (24) $y^2y'+xy^3=x$ (25) $y'+y\tan x=0$ (26) $xy'+y=2xy$ (27) $y=x(x+1)y'$ (28) $(1-x)y'=1+y$ (29) $(y+1)y'+x=1$ (30) $(1+x)y+x(1-y)y'=0$ (31) $y'\cos^2 x+\sin x\cos^2 y=0$ (32) $(1+y)xy'+(1+x)y=0$ (33) $y'+y\tan x=0$ **(34)** $y'=x+y$ ($z=x+y$ とおく) (35) $y'=ax+by$ ($z=ax+by$ とおく) (36) $y'+1=x+2y$ ($z=x+2y-1$ とおく) (37) $y'+1=e^{x+y}$ ($z=x+y$ とおく) (38) $y'+ay=bx$ (変数変換要) (39) $y'=y+cx^2$ (変数変換要) □

問 1.16 （同次型） 次の同次型方程式の一般解を求めよ．また，初期値 $y(0)=y_0$ における特殊解を求めよ．さらには，解曲線を図示せよ．

(1) $(x-y)=(x+y)y'$ **(2)** $y^2+2xyy'=x^2$ **(3)** $2xyy'=x^2+y^2$ (4) $yy'+x=0$ (5) $xy'=\alpha y$ (6) $(x^2-y^2)y'=2xy$ (7) $yy'+x+2y=0$ (8) $xy'+y=2x$ (9) $(x+y)y'+y=x$ (10) $xyy'+x^2=y^2$ (11) $2xyy'+x^2=y^2$ (12) $x(x-y)y'+y^2=0$ (13) $2xyy'+y^2=x^2$ (14) $x+yy'=2y$ (15) $(x+y)y'+y=x$ (16) $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$ (17) $x\cot\dfrac{y}{x}+xy'=y$ (18) $xy'=y+x\sin\dfrac{y}{x}$ (19) $(x+y+4)y'+x-y-2=0$ (20) $yy'+y=2x$ (21) $(x-y)y'=x+y$ □

問 1.17 （完全微分型） 次の方程式の一般解を求めよ．

(1) $x+4y+(4x+3y)y'=0$ (2) $y\sin x-y'\cos x=0$ (3) $2xe^y+1+(x^2e^y+2y)y'=0$ (4) $4x^3+3x^2y-3y^3+(x^3-9xy^2-4y^3)y'=0$ (5) $e^{x/y}+(1-x/y)e^{x/y}y'=0$ (6) $x^3+4x^3y^3+(y^2+3x^4y^2)y'=0$ (7) $(x-y+1)y'-x+y+2=0$ (8) $(x^2+4xy+3)y'+e^x+2xy+2y^2=0$ (9) $(x\cos y+2y^3)y'+\sin y+3x^2-1=0$ (10) $y'+x+2y=0$ (11) $(2xy^2+3y)y'+y^3=0$ (12) $xy'\cos y+\sin y=0$ (13) $y'\sin x\sinh y+\cos x\cosh y=0$ (14) $(2y-x-1)y'+2x-y+1=0$ (15) $(x^2-y^2)y'+x^2+2xy=0$ (16) $x^2-2y+(y^2-2x)y'=0$ (17) $3(x^2+x^2y^2)+2(y+x^3y)y'=0$ (18) $\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{yy'}{x^2-y^2}=0$ □

問 1.18 （完全微分型） 次の方程式の積分因子を求め一般解を求めよ．

(1) $\cos y-y'\sin y=0$ (2) $2y/x+1+y'=0$ (3) $y^2-2xy+(4y^2+3xy-2x^2)y'=0$ (4) $xy^2+y^3+(x^3+3x^2y+xy^2)y'=0$ (5) $y'+x+2y=0$ (6) $(2xy^2+3y)y'+y^3=0$

(7) $x(3y^2+x)y'+y(2y^2+3x)=0$ (8) $xy'+1=0$ (9) $xy'\log|x|+y=0$
(10) $y-xy'=0$ (11) $2y-xy'=0$ (12) $1+y^2+xyy'=0$ (13) $\cot y-xy'=0$ □

問 1.19 （直交曲線族） 次の曲線族の直交曲線族を求め図示せよ．

(1) $x^2+y^2=r^2$ (2) $\left(\frac{x}{3a}\right)^2+\left(\frac{y}{2a}\right)^2=1$ (3) $\left(\frac{x}{2a}\right)^2-\left(\frac{y}{a}\right)^2=1$
(4) $x^2+y^2-2rx=0$ □

注意 1.20 （三角関数の逆数）

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \cot x=\frac{1}{\tan x}$$

□

§ 1.6 定数係数斉次線形方程式

例 1.21 (定数係数斉次線形方程式)

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

typing... □

例 1.22 (定数係数斉次線形方程式)

$$y'' + 2y' + y = 0$$

typing... □

例 1.23 (定数係数斉次線形方程式)

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

typing... □

§ 1.7 定数係数非斉次線形方程式

例 1.24 (定数係数非斉次線形方程式)

$$y'' - 3y' + 2y = x$$

typing... □

§ 1.8 演習問題 ~ 定数係数線形方程式

問 1.25 (定数係数斉次線形方程式) 次の方程式の一般解を求めよ．

(1) $y''-y=0$ (2) $y''-y'-2y=0$ (3) $y''-y'-6y=0$ (4) $y''+y=0$
(5) $y''+y'-2y=0$ (6) $y''+y'-6y=0$ (7) $3y''-y'-2y=0$ (8) $y''-2y'+2y=0$
(9) $y''-2y'-3y=0$ (10) $y''-2y'+5y=0$ (11) $2y''-2y'+y=0$
(12) $2y''-2y'+5y=0$ (13) $y''+2y'-y=0$ (14) $y''+2y'+y=0$
(15) $y''+2y'+2y=0$ (16) $y''+2y'-3y=0$ (17) $y''+2y'+2y=0$
(18) $y''+2y'+5y=0$ (19) $y''+2y'+10y=0$ (20) $2y''+2y'+y=0$
(21) $3y''+2y'-y=0$ (22) $y''-3y'+2y=0$ (23) $y''-3y'+3y=0$
(24) $y''+3y'-4y=0$ (25) $2y''+3y'+y=0$ (26) $y''-4y=0$ (27) $y''-4y'+3y=0$
(28) $y''-4y'+4y=0$ (29) $y''+4y=0$ (30) $y''+4y'+4y=0$ (31) $y''+4y'-5y=0$
(32) $y''+5y'-6y=0$ (33) $2y''-5y'+3y=0$ (34) $2y''-5y'+4y=0$
(35) $y''-6y'+8y=0$ (36) $y''-6y'+9y=0$ (37) $y''-6y'+13y=0$
(38) $y''+6y'+9y=0$ (39) $2y''+6y'+5y=0$ (40) $y''-7y'+12y=0$
(41) $y''-8y'+15y=0$ (42) $y''-8y'+16y=0$ (43) $y''-8y'+32y=0$
(44) $y''+9y=0$ (45) $4y''-12y'+9y=0$ (46) $y''-ay'=0\,(a\neq 0)$
(47) $y''+a^2y=0\,(a\neq 0)$ (48) $y''-2\omega y'+\omega^2y=0$ (49) $y''+(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta\,y=0$
(50) $y'''-3y''+4y=0$ (51) $y'''+3y''+4y'+2y=0$ (52) $y''+2y'-3y=0$
(53) $y'''+3y''+3y'+y=0$ (54) $y'''-3y''+2y'=0$ (55) $y'''+y''-2y'+12y=0$
(56) $y'''+y''+y'-3y=0$ (57) $y'''+3y''+3y'+y=0$ (58) $y'''-3y''+2y'=0$
(59) $y'''-6y''+11y'-6y=0$ (60) $y'''-2y''-5y'+6y=0$ (61) $y'''-3y''+3y'-y=0$

□

問 1.26 (定数係数非斉次線形方程式) 次の方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'-y=\sin x$ (2) $y'+y=x^2+x-1$ (3) $y'-2y=xe^{2x}$ (4) $y''-y'=e^{2x}$
(5) $y''-y'-2y=x$ (6) $y''-y'-2y=x^2-x$ (7) $y''-y'-2y=\sin x$ (8) $y''+y'=e^{-x}$
(9) $y''+y=cx\sin x$ (10) $y''+y'-2y=be^{x}$ (11) $y''+y'-2y=be^{-x}$
(12) $y''+y'-6y=e^{3x}$ (13) $y''+y'-6y=\cos x$ (14) $y''-2y'+y=e^{x}$
(15) $y''-2y'+2y=x^2-1$ (16) $y''-2y'+2y=e^{x}\sin x$ (17) $y''-2y'+2y=2e^{x}\cos x$
(18) $y''-2y'-3y=e^{-x}$ (19) $y''-2y'-3y=e^{-x}+x$ (20) $y''-2y'+5y=x$
(21) $y''-2y'+5y=e^{x}$ (22) $y''-2y'+5y=\sin x$ (23) $y''+2y'-3y=x^2$
(24) $y''+2y'-3y=e^{2x}$ (25) $y''+2y'-3y=\cos x$ (26) $y''+2y'-3y=e^{x}\sin x$
(27) $y''+2y'-8y=e^{2x}$ (28) $y''-3y'+2y=2$ (29) $y''-3y'+2y=2x-1$
(30) $y''-3y'+2y=e^{x}$ (31) $y''-3y'+2y=\cos x$ (32) $y''-3y'+2y=\cos 2x$
(33) $y''-3y'+2y=2\cos x+3e^{x}$ (34) $y''-3y'+2y=xe^{x}$ (35) $y''-3y'+3y=e^{x}$
(36) $y''+3y'=e^{3x}+x$ (37) $2y''+3y'+y=ax$ (38) $y''-4y'=x+x^2+\sin x$
(39) $y''-4y'+3y=x$ (40) $y''-4y'+3y=x^2$ (41) $y''-4y'+3y=\cos x$
(42) $y''-4y'+3y=3e^{2x}+4e^{x}+2e^{3x}$ (43) $y''-4y'+4y=e^{x}$
(44) $y''+4y'+y=e^{x}$ (45) $y''-5y'-4y=x+x^2+\sin x$ (46) $y''-6y'+8y=e^{3x}$

(47) $y''-6y'+9y=be^{3x}$ (48) $y''+8y'+17y=2e^{-3x}$ (49) $y''-y=x$
(50) $y''-y=e^{x}$ (51) $y''-y=e^{2x}$ (52) $y''-y=\sin x$ (53) $y''-y=xe^{x}$
(54) $y''-y=e^{x}\sin x$ (55) $y''+y=x$ (56) $y''+y=\sin x$ (57) $y''+y=\cos x$
(58) $y''+y=2\cos x$ (59) $y''+y=x+x^{2}+\sin x$ (60) $y''+y=x\sin x$
(61) $y''+y=e^{x}\sin x$ (62) $y''+2y=x^{2}$ (63) $y''-4y=1$ (64) $y''-4y=x$
(65) $y''-4y=\sin x$ (66) $y''-4y=\cos x$ (67) $y''-4y=e^{2x}$ (68) $y''-4y=e^{-2x}$
(69) $y''-\omega^{2}y=a+bx$ (70) $y''-\omega^{2}y=ce^{\rho x}$ $(\rho\neq\pm\omega)$ (71) $y''-\omega^{2}y=ce^{\omega x}$
(72) $y''-\omega^{2}y=a+bx+ce^{\rho x}$ (73) $y''+\omega^{2}y=bx$
(74) $y''+\omega^{2}y=a\sin\Omega x$ $(\omega\neq\Omega)$ (75) $y'''-y=e^{2x}$ (76) $y'''-7y'+6y=e^{x}$
(77) $y'''+y''+y'+y=e^{x}$ (78) $y'''-3y''+4y=e^{2x}$ (79) $y'''-5y''+6y'=e^{2x}$
(80) $y'''-5y''+2y'+8y=16x$ □

問 1.27 （オイラーの方程式） 次の方程式を $x=e^{t}$ と変数変換して一般解を求めよ．

(1) $x^{2}y''-2y=0$ (2) $x^{2}y''-xy'+y=0$ (3) $x^{2}y''-xy'+y=0$
(4) $x^{2}y''-xy'-3y=0$ (5) $x^{2}y''-xy'+5y=0$ (6) $x^{2}y''-xy'+y=(\log x)^{2}$
(7) $xy''-2y'=0$ (8) $x^{2}y''-2xy'+2y=x^{3}$ (9) $x^{2}y''-3xy'+3y=0$
(10) $x^{2}y''-3xy'+3y=x^{3}+x^{4}$ (11) $x^{2}y''-3xy'+3y=x^{5}\sin x$ (12) $x^{2}y''-3xy'+4y=0$
(13) $x^{2}y''-3xy'+4y=x^{3}+x^{4}$ (14) $x^{2}y''-3xy'+4y=x^{2}+x^{2}\log x$
(15) $x^{2}y''-4xy'+6y=2x$ (16) $x^{2}y''-4xy'+6y=0$ (17) $x^{2}yy''+x^{2}y'^{2}-xyy'=0$
(18) $x^{2}y''-(2m-1)xy'+m^{2}y=0$ (19) $x^{2}y''-(\alpha+\beta-1)xy'+\alpha\beta y=0$
(20) $y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{1}{x^{2}}y=0$ (21) $y''-\dfrac{\alpha}{x}y'+\dfrac{\alpha}{x^{2}}y=0$
(22) $y''-\dfrac{a}{x}y'+\dfrac{a}{x^{2}}y=bx^{\alpha}$ $(\mathbb{R}\ni\alpha\neq 1)$ □

§ 1.9 1 階線形方程式

例 1.28 (**1** 階線形方程式)

$$y' - y = x$$

typing... □

例 1.29 (**1** 階線形方程式)

$$y' - ay = q(x)$$

typing... □

§ 1.10 ベルヌーイの方程式

例 1.30 (ベルヌーイの方程式)

$$y' + y = xy^3$$

typing... □

§ 1.11 演習問題 ~ 1 階線形，ベルヌーイ型

問 1.31 (同次型) 次の方程式の一般解を求めよ．

(1) $y' = y + e^{2x}$ (2) $xy' = 2y + x(x+2)$ (3) $y' + 2xy = x$ (4) $xy' = x + y$
(5) $y' = y + xy^2$ (6) $y' = 2y + e^{2x}y^3$ (7) $y' + y = x$ (8) $xy' + y = x$
(9) $xy' + y = x^2$ (10) $y' = y + \sin x$ (11) $y' = xy + x$ (12) $y' \cos x + y \sin x = 1$
(13) $xy' + y = \cos x$ (14) $y' + \cos^2 y \tan y = x \cos^2 y$ □

§ 1.12 演習問題 ~ 巾級数展開

問 1.32 (巾級数展開)　次の方程式の一般解を $x = 0$ に巾級数展開で求めよ．

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$　(2) $y'' - xy' - y = 0$　(3) $(x^2 - 1)y'' - 2y = 0$
(4) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$　(5) $y' = 1 + x + 2y$　(6) $xy' = x^2 + y$
(7) $y'' - 2xy' - 2y = 0$　(8) $(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$　(9) $(1 + x^2)y'' - xy' - 8y = 0$
(10) $y'' + x^2y' + xy = 0$　(11) $y' - 2y = 1 + x$　(12) $y' - y/x = x$　(13) $y'' - xy = 0$
(14) $(1 - x^2)y' - xy' + y = 0$　(15) $(1 - x)y' = -1 + y$　(16) $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$
(17) $y' - y + x = 0$　(18) $y' - 2xy = x$　(19) $y' + y = x^2$　(20) $(x+1)y' + y = 2x + 3x^2$
(21) $y'' + y = 0$　(22) $y'' - y = 2e^x$　(23) $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$
(24) $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

□

問 1.33 (確定特異点をもつ方程式の巾級数展開)　次の方程式の一般解を $x = 0$ に巾級数展開で求めよ．

(1) $4xy'' + 2y' + y = 0$　(2) $x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + (4 - 2x)y = 0$
(3) $x^2(1-x)y'' - x(2+x)y' + 2y = 0$　(4) $xy'' + y' + xy = 0$　(5) $2xy'' + (1-2x)y' - y = 0$
(6) $xy'' + y' - y = 0$　(7) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$　(8) $xy'' - xy' - y = 0$

□