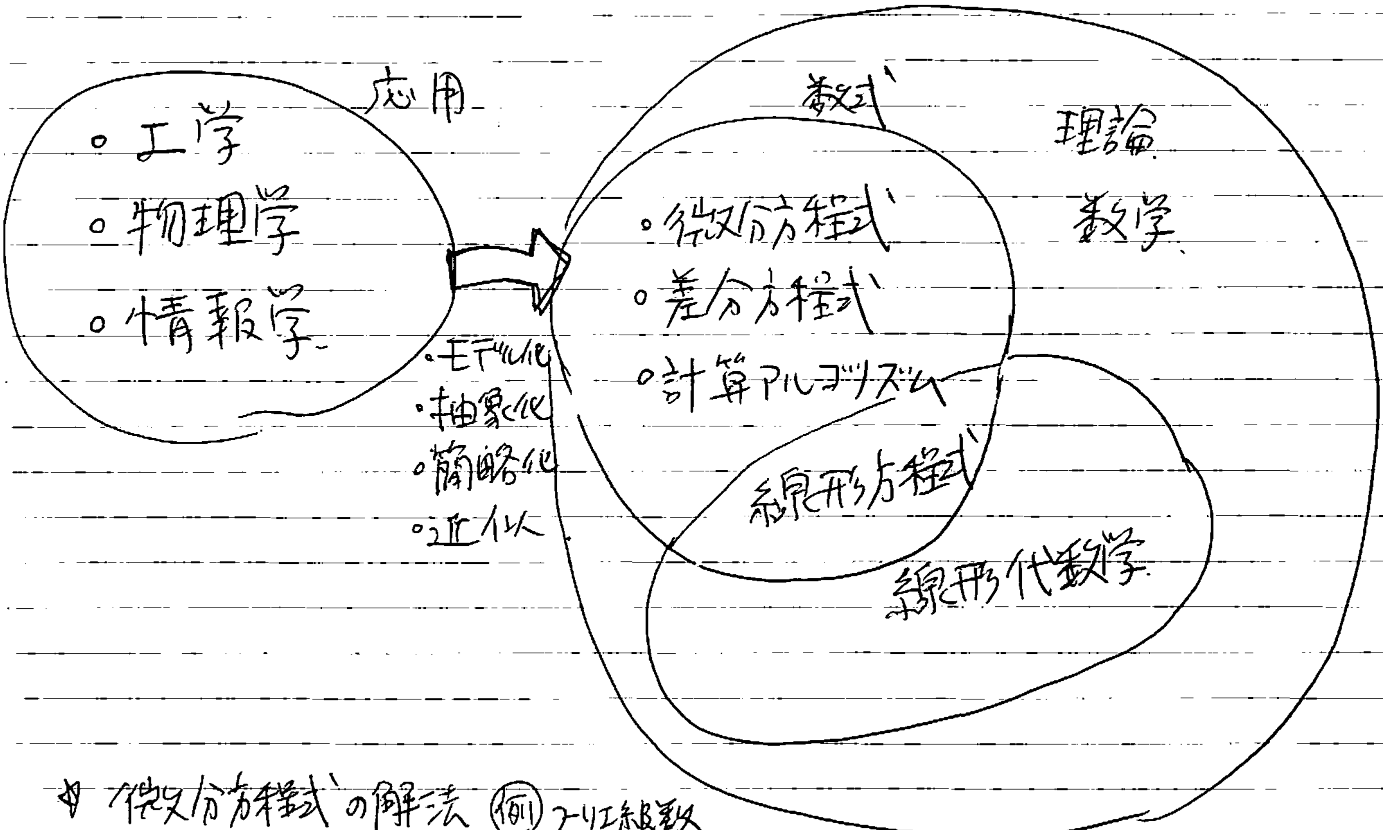
まえがき

① 線形変換の例題（線形代数学Ⅰ,Ⅱの復習および補足）

② 微分方程式,差分方程式への応用（解法および解析）

③ 固有値分解の数値計算（コンピュータ上での計算方法）



☆ 微分方程式の解法 (例) フーリエ級数

☆ 力学系への応用
　— ニュートンの運動方程式の解法および解析

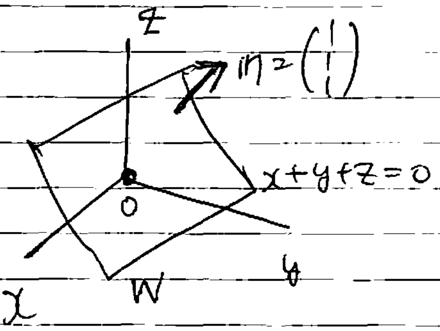
☆ 工学,情報学への応用
　— 信号処理（音声,画像,…）　(例) CTスキャン
　— 統計処理　(例) 株価予測,天気,気象
　— 情報処理　(例) 検索エンジン
　— コンピュータグラフィックス

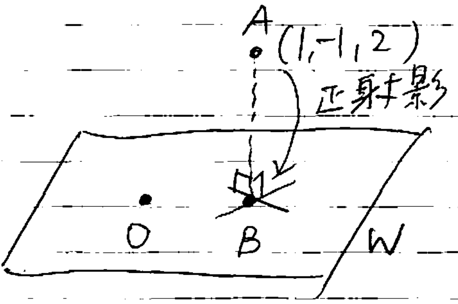
☆ 現代ではコンピュータ上での解析手法としての応用

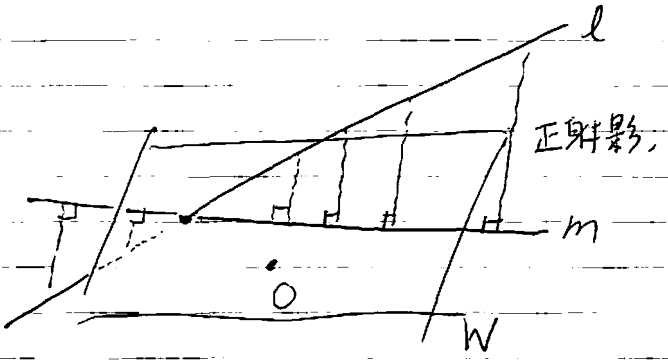
線形変換

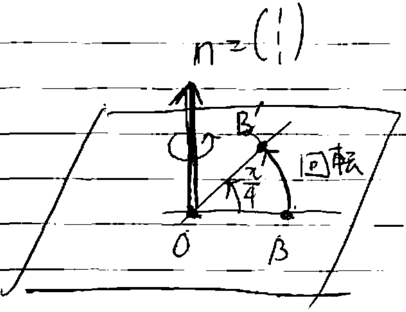
課題

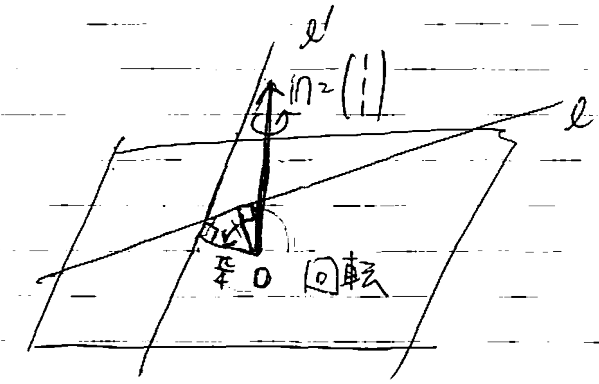
$\mathbb{R}^3$ の点 $(1,-1,2)$ と直線 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ とを
平面 $x+y+z=0$ へ正射影せよ。また、その後に、
平面の法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を軸として $\frac{\pi}{4}$ 回転させよ。



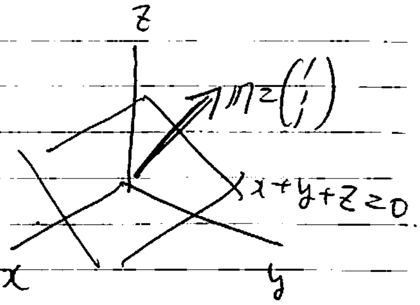








§ 部分空間



平面 $x+y+z=0$ は方程式 $x+y+z=0$ の解空間

$$W=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}$$

である。Wの基底を求める。

$$x+y+z=0 \Longrightarrow (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbb{0}\qquad \left.\begin{array}{l}A\mathbb{x}=\mathbb{0}\\ \mathrm{rank}(A)=1.\end{array}\right\}$$

より任意定数は $3-\mathrm{rank}(A)=2$ 個である。

$z=-x-y$ より、$x=c_1,\ y=c_2\ (\forall c_1\in\mathbb{R},\ \forall c_2\in\mathbb{R})$ とおく。

$$\mathbb{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1-c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=c_1\mathbb{p}_1+c_2\mathbb{p}_2.$$

となる。よって W は $\mathbb{p}_1$ と $\mathbb{p}_2$ で張られる空間

$$W=\langle\mathbb{p}_1,\mathbb{p}_2\rangle_{\mathbb{R}}=\{c_1\mathbb{p}_1+c_2\mathbb{p}_2\mid c_1,c_2\in\mathbb{R}\}$$

である。$\{\mathbb{p}_1,\mathbb{p}_2\}$ は1次独立であるから、$\{\mathbb{p}_1,\mathbb{p}_2\}$ は W の基底である。

(注) W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。次元は $\dim(W)=2$ となる。

(定義) ベクトル空間 V の部分集合 W がベクトル空間であるとき W を V の部分空間という。

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}W\ni\forall\mathbb{x},\forall\mathbb{y}\\ \mathbb{R}\ni\forall\alpha,\forall\beta\end{array}\right\}\text{に対して }\alpha\mathbb{x}+\beta\mathbb{y}\in W.$$

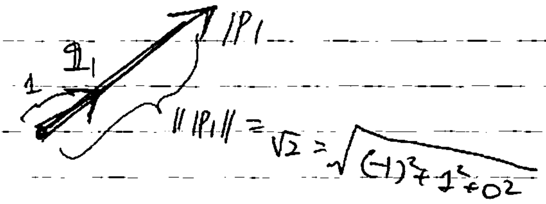
(注) 必ず $\mathbb{0}\in W$ である。
原点 $\mathbb{0}$ を含む。

§ 正規直交化

Wの基底$\{\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2\}$を正規直交化しておくと，後で便利である。

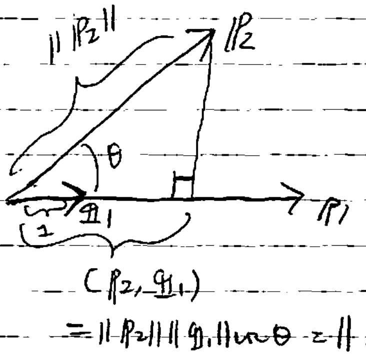
まず，$\mathbb{p}_1$を規格化して

$$\mathbb{q}_1 = \frac{\mathbb{p}_1}{\|\mathbb{p}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$



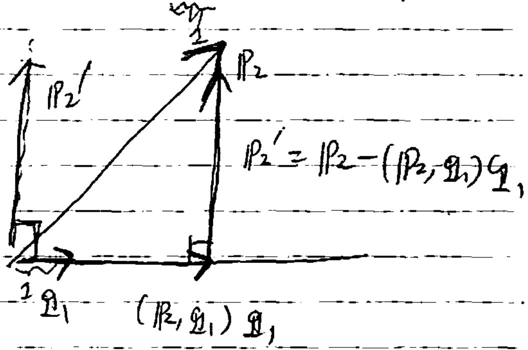
とおく．次に，$\mathbb{q}_1$と直交するベクトルを

$$\begin{aligned}\mathbb{p}_2' &= \mathbb{p}_2 - (\mathbb{p}_2, \mathbb{q}_1)\,\mathbb{q}_1 \\ &= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1+0+0}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2+1\\0-1\\2+0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$



とおめる，$\mathbb{p}_2'$を規格化して，

$$\mathbb{q}_2 = \frac{\mathbb{p}_2}{\|\mathbb{p}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

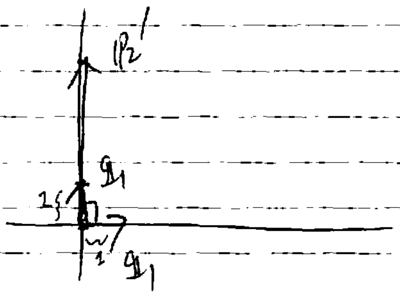


となる．以上より，

$$(\mathbb{q}_1, \mathbb{q}_1) = 1, \quad (\mathbb{q}_1, \mathbb{q}_2) = 0, \quad (\mathbb{q}_2, \mathbb{q}_2) = 1$$

が成り立つので，

$$\{\mathbb{q}_1, \mathbb{q}_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

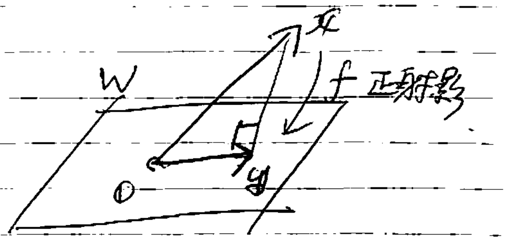


はWの正規直交基底である．Wは

$$W = \langle \mathbb{q}_1, \mathbb{q}_2 \rangle_R$$

とも書ける。

§ 正射影

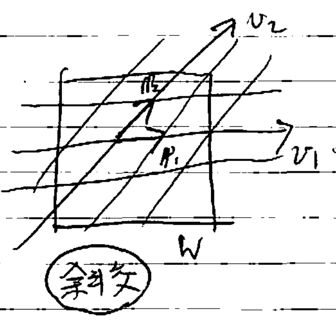


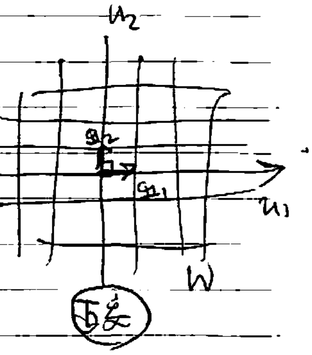
点 x を平面 W に垂直に下した点を y とする。

変換 $f: x \mapsto y$ を正射影とよぶ。

$\mathbb{R}^3 \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおき、

変換 $y = f(x)$ を求める。





y は W 上の点であるから、$y \in W$ であり

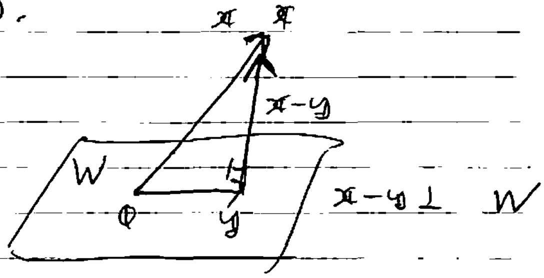
$W \ni y = u_1 q_1 + u_2 q_2$

とおける。(u_1, u_2) は基底 $\Sigma = \{q_1, q_2\}$ における W の座標である。

注) $W \ni y = v_1 p_1 + v_2 p_2$ と書いてもよいが、

$\{p_1, p_2\}$ は斜交座標であり、後で計算がめんどうになる。

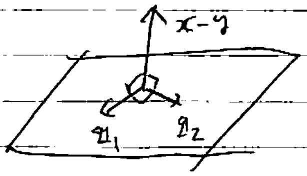
正規直交基底 $\{q_1, q_2\}$ を用いた方が楽となる。



導出1

図より、$x-y$ と W は直交

$x - y \perp W$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y \perp q_1 \\ x-y \perp q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y, q_1) = 0 \cdots ① \\ (x-y, q_2) = 0 \cdots ② \end{cases}$$

① より、$(x-y, q_1) = (x, q_1) - (y, q_1) = (x, q_1) - (u_1 q_1 + u_2 q_2, q_1)$

$= (x, q_1) - u_1 \underbrace{(q_1, q_1)}_{1} - u_2 \underbrace{(q_2, q_1)}_{0} = (x, q_1) - u_1 = 0$

$\Rightarrow u_1 = (x, q_1)$

② より、$(x-y, q_2) = (x, q_2) - (y, q_2) = (x, q_2) - (u_1 q_1 + u_2 q_2, q_2)$

$= (x, q_2) - u_1 \underbrace{(q_1, q_2)}_{0} - u_2 \underbrace{(q_2, q_2)}_{1} = (x, q_2) - u_2 = 0$

$\Rightarrow u_2 = (x, q_2)$

よって，正射影は

$$f : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = u_1\mathbf{g}_1 + u_2\mathbf{g}_2 = (\mathbf{x},\mathbf{g}_1)\mathbf{g}_1 + (\mathbf{x},\mathbf{g}_2)\mathbf{g}_2$$

と得られる。

§ 正規直交基底における座標

㊟ 一般に，正規直交基底 $\{\mathbf{g}_1,\cdots,\mathbf{g}_n\}$ における座標 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ は，

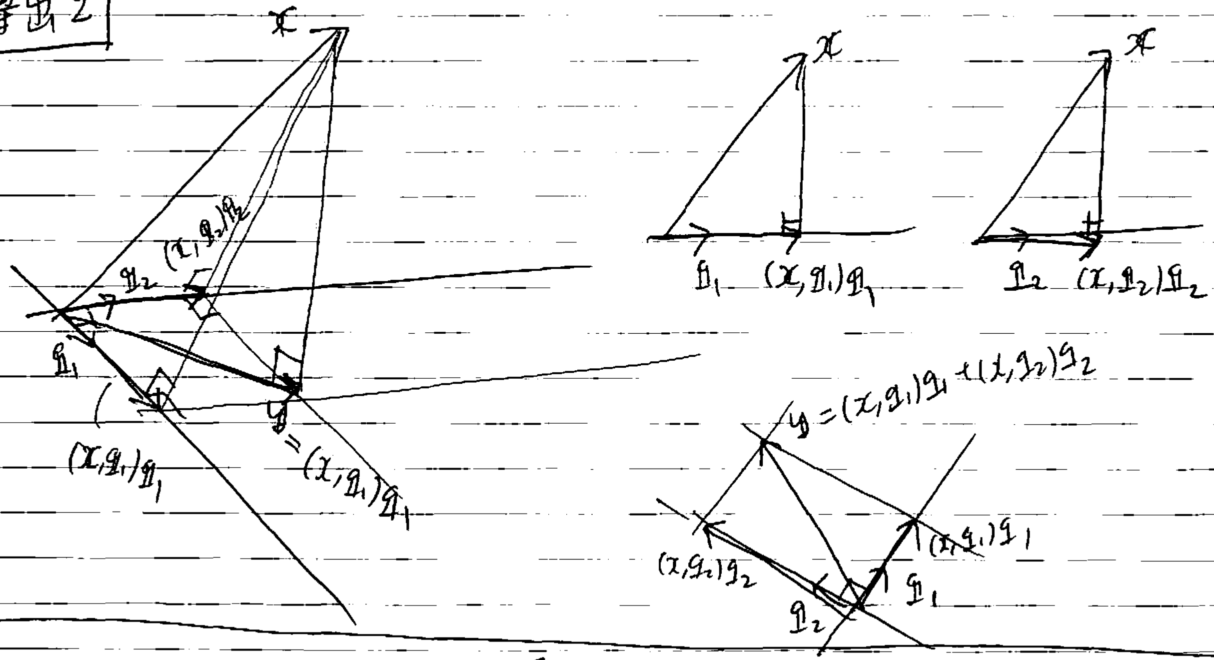
$u_1=(\mathbf{x},\mathbf{g}_1)$，$u_2=(\mathbf{x},\mathbf{g}_2)$，$\cdots$，$u_n=(\mathbf{x},\mathbf{g}_n)$

で求まる。

∵ $\mathbf{x} = u_1\mathbf{g}_1 + u_2\mathbf{g}_2 + \cdots + u_2\mathbf{g}_n$ の両辺と $\mathbf{g}_i$ の内積をとり，$(\mathbf{g}_i,\mathbf{g}_j)=\delta_{ij}$ より

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},\mathbf{g}_i) &= (u_1\mathbf{g}_1+\cdots+u_i\mathbf{g}_i+\cdots+u_n\mathbf{g}_n,\ \mathbf{g}_i)\\ &= u_1(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\boxed{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_i}}})+\cdots+u_i(\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\boxed{\mathbf{g}_i,\mathbf{g}_i}}})+\cdots+u_n(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\boxed{\mathbf{g}_n,\mathbf{g}_i}}})\\ &= u_i\end{aligned}$$

導出2



(例) 周期 2π の関数空間の正規直交基底 $\{\cdots, e^{-2ix}, e^{-ix}, 1, e^{ix}, e^{2ix}, \cdots\}$ は

内積 $(f,g)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ のもとで正規直交基底である。よって，

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nix}, \quad c_n=(f,e^{nix})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{nix}\,dx$$

と表される，フーリエ級数展開である。

§ 表現行列

射影変換

$\mathbb{y} = f(\mathbb{x}) = (\mathbb{x}, \mathbb{a}_1)\mathbb{a}_1 + (\mathbb{x}, \mathbb{a}_2)\mathbb{a}_2$

を行列表現

$$\mathbb{y} = f(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}, \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

で表す。Aをfの表現行列とよぶ

定義

f：線形変換 $\iff f(\alpha\mathbb{x}+\beta\mathbb{y}) = \alpha f(\mathbb{x}) + \beta f(\mathbb{y})$

(注) 射影変換は線形変換である。(例) 示せ.

定理 任意の線形変換 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{y}=f(\mathbb{x})=A\mathbb{x}$ と表される。

導出1

$\mathbb{R}^3$の標準基底を $\{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ とおく.

このとき

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + x_3\mathbb{e}_3$$

と表される。fは線形変換であるから,

$$\mathbb{y} = f(\mathbb{x}) = f(x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + x_3\mathbb{e}_3) = x_1 f(\mathbb{e}_1) + x_2 f(\mathbb{e}_2) + x_3 f(\mathbb{e}_3)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f(\mathbb{e}_1) & f(\mathbb{e}_2) & f(\mathbb{e}_3) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = A\mathbb{x}.$$

と書ける。fの表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} f(\mathbb{e}_1) & f(\mathbb{e}_2) & f(\mathbb{e}_3) \end{pmatrix}$$

となる。

ここで，

$$f(e_1)=(e_1,g_1)g_1+(e_1,g_2)g_2=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{-1+0+0}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1+0+0}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3+1\\-3+1\\0-2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$f(e_2)=(e_2,g_1)g_1+(e_2,g_2)g_2=\frac{0+1+0}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{0+1+0}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

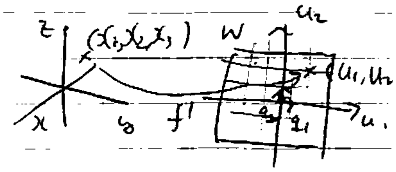
$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3+1\\3+1\\0-2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$f(e_3)=(e_3,g_1)g_1+(e_3,g_2)g_2=\frac{0+0+0}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{0+0-2}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

より，表現行列は

$$A=\begin{pmatrix}f(e_1) & f(e_2) & f(e_3)\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

と得られる。



導出2 まず，射影変換 $f':\mathbb{R}^3\to W$ を求める。

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & W\\ \Downarrow & & \Downarrow\\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{cases}u_1=(g_1,x)=g_1^Tx\\ u_2=(g_2,x)=g_2^Tx\end{cases}$$ より $$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1^T\\g_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

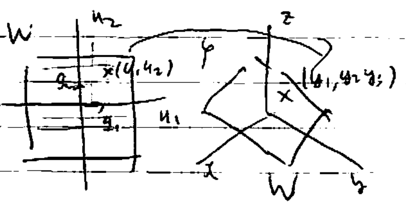
と表される。

$$\begin{array}{ccc}\varphi: W & \to & \mathbb{R}^3\\ \Downarrow & & \Downarrow\\ \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\end{array}=u_1g_1+u_2g_2=\begin{pmatrix}g_1&g_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&1\\\sqrt{3}&1\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$ を用いると，

$$f=\varphi\circ f':\begin{array}{ccccc}\mathbb{R}^3&\to&W&\to&\mathbb{R}^3\\\Downarrow&&\Downarrow&&\Downarrow\\\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}&&\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}&&\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\end{array}$$ より，

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1&g_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1&g_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1^T\\g_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&1\\\sqrt{3}&1\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$



$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$ と得られる

No

Date

§ べき等行列

問 $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ が $A^2 = A$ をみたすことを示せ.

定義 A：べき等行列 $\iff A^2 = A$.

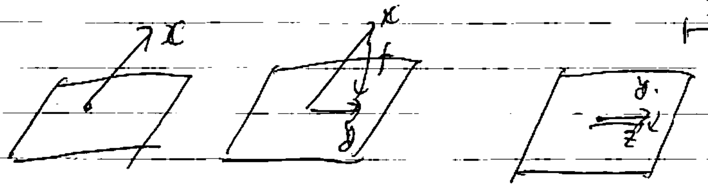
問 $A^k = A$ $(k = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ。

定理 f：射影変換 $\iff A$：べき等行列.

注

$$x \xmapsto{f} y = f(x) = Ax \xmapsto{f} z = f(f(x)) = f \circ f(x) = A^2x = Ax = y = Iy$$

$$\xmapsto{f} w = \underbrace{f \circ f \circ f}_{3}(x) = A^3x = Ax = \underset{\substack{\shortparallel \\ Iy}}{y} \xmapsto{f} \cdots$$



☆ 2回目以降の変換は変化がない（恒等的である）

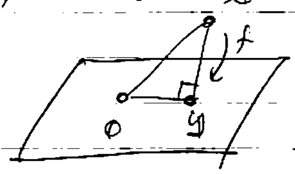
$\iff A^k = A$.

§ 正射影の例

問

点$(1,-1,2)$を平面Wへ正射影すると点$\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$となる。

$$∵\ \mathbf{y} = A\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}$$



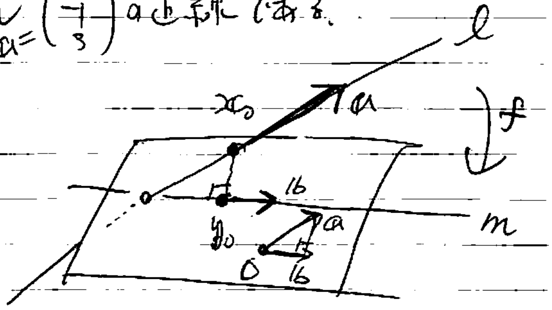
問

直線 $\ell: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \underset{t}{\underset{\shortparallel}{\frac{z-1}{3}}}$ をWへ正射影する。

直線をパラメータ表示すると

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t+3\\-t-2\\3t+1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = t\mathbf{a} + \mathbf{x}_0$$

である。直線ℓは点$\underset{\mathbf{x}_0}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}}$を通る方向ベクトル$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$の直線である。



$\mathbf{x}_0$, $\mathbf{a}$を正射影して

$$\mathbf{y}_0 = A\mathbf{x}_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\-8\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = A\mathbf{a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}$$

となる。ℓを正射影した直線 m は

方向ベクトル$\mathbf{b}$で点$\mathbf{y}_0$を通る直線であるから、

パラメータ表示は

$$\mathbf{x} = t\mathbf{b} + \mathbf{y}_0 = \frac{t}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\-8\\1\end{pmatrix}$$

である。成分で表すと、

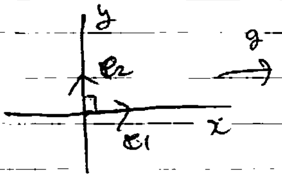
$$\frac{3x-7}{2} = \frac{3y+8}{-7} = \frac{3z-1}{5}$$

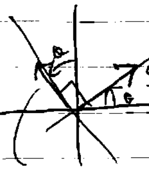
と得られる。

(問) mがW上にあることを確認せよ。

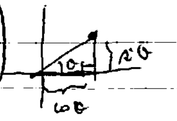
§ 回転変換

$\mathbb{R}^2$ における回転変換 $g: \overset{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{x}} \mapsto \overset{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{y}}$ を求める。図より,

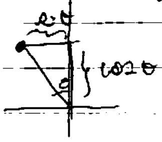




$g(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$



$g(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$



$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ &= g(x_1 e_1 + x_2 e_2) \\ &= x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) \\ &= \begin{pmatrix} g(e_1) & g(e_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= R x. \end{aligned}$$

定義 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: 回転行列

問

(1) $R^T R = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow R$: 直交行列

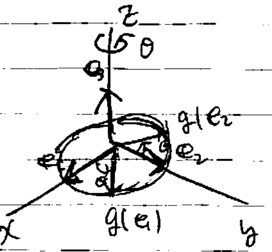
(2) $R^{-1} = R^T$

(3) $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$

(4) $R(\theta)R(\phi) = R(\theta + \phi)$

$\mathbb{R}^3$ における回転変換 $g: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ を求める.

z軸まわりに回転させる場合. $g_3 : x \mapsto y$



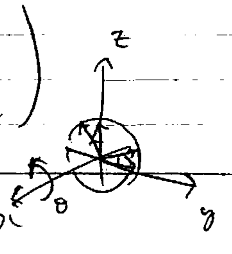
$g_3(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $g_3(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $g_3(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$$R_3 = \begin{pmatrix} g_3(e_1) & g_3(e_2) & g_3(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

x軸まわりに回転させる場合

$g_1 : x \mapsto y$

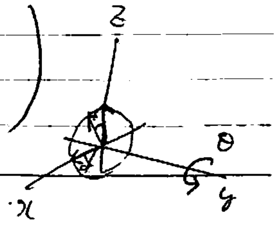
$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



y軸まわりに回転させる場合

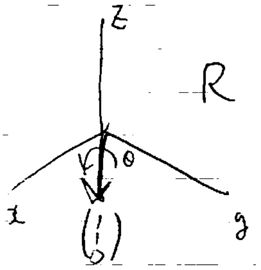
$g_2 : x \mapsto y$

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

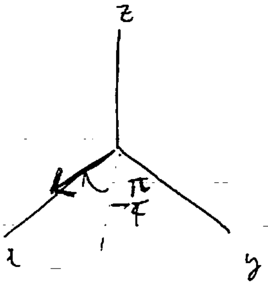


§回転変換の例

$\boxed{例}$ $\mathbb{R}^3$において，
方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ を軸とする回転変換（角度：θ）



=

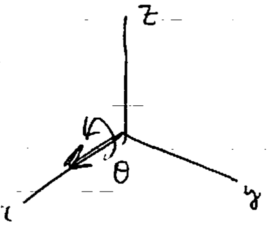


$$R_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

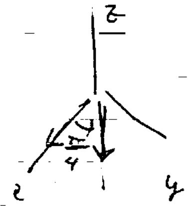
$\circ$

$$R = R_3\left(\frac{\pi}{4}\right)R_1(\theta)R_3\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$



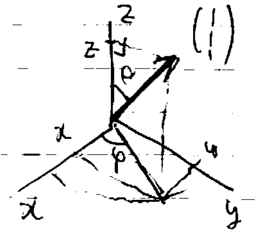
$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$\circ$



$$R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0\\ \sin\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$\boxed{例}$ $\mathbb{R}^3$において，方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を軸とする回転変換（角度：α）



$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$$ と極座標で表すと，次のように書ける．

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{3}\\ \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}\\ \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \tan^{-1}\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\left(\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

ここで，$Q^T = R_2(-\theta)R_3(-\varphi)$ とおく．

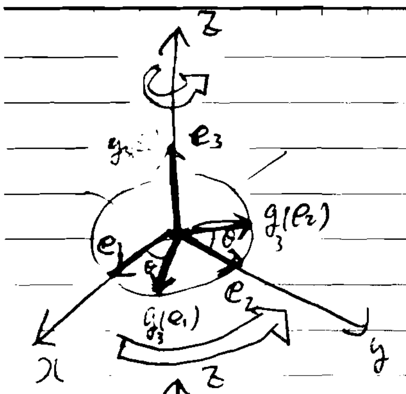
このとき $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = Q^T\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ が成り立つ． $\Leftrightarrow$ $Q = R_3(\varphi)R_2(\theta)$ とおく．
$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

よって，$R = QR_3(\alpha)Q^T = R_3(\varphi)R_2(\theta)R_3(\alpha)R_2(-\theta)R_3(-\varphi)$ となる．

ただし，$R_3(\varphi) = R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$， $R_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$， $R_3(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

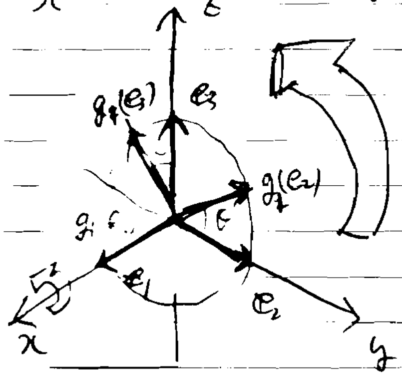
$R_3(-\varphi) = R_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) = R_3(\varphi)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$， $R_2(-\theta) = R_2(\theta)^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$

No.
Date.



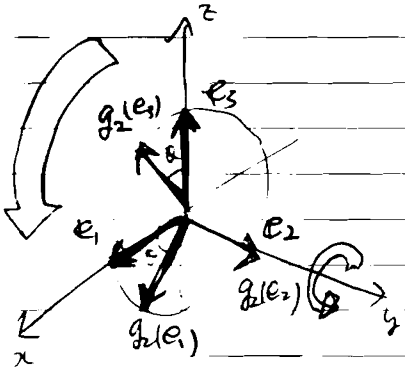
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$R_3(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

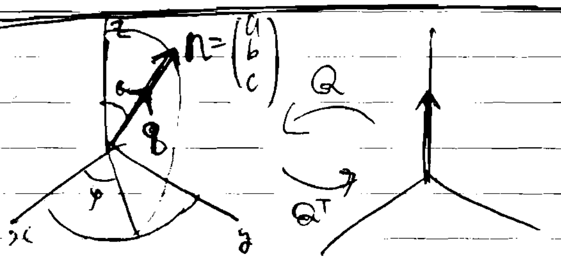


$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$R_2(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\sin\theta\\0\\\cos\theta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\-\sin\theta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\ \varphi=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}\\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\end{cases}\quad\begin{cases} a=r\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\theta\cos\varphi\\ b=r\sin\theta\sin\varphi\\ c=r\cos\theta\end{cases}$$

$$Q^T=R_2(-\theta)R_3(-\varphi)$$
$$=R_2(\theta)^TR_3(\varphi)^T$$

$$Q=R_3(\varphi)R_2(\theta)$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c},\ \cos\theta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{c}{r},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\tilde{r}}{r}$$

$$\tan\varphi=\frac{b}{a},\ \cos\varphi=\frac{a}{r\sin\theta},\ \sin\varphi=\frac{b}{r\sin\theta}$$
$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\tilde{r}}\qquad=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\tilde{r}}$$

$$R_3(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a & -b & 0\\ b & a & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{a^2+b^2}\end{pmatrix},\ R_2(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}c & 0 & +\sqrt{a^2+b^2}\\ 0 & \sqrt{a^2+b^2+c^2} & 0\\ -\sqrt{a^2+b^2} & 0 & c\end{pmatrix}$$

$$Q = R_3(\varphi)R_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$R = Q R_3(\alpha) Q^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha & \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha & -2\cos\alpha \\ \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha & \sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha & -2\sin\alpha \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4\cos\alpha + 2 & -2\cos\alpha - 2\sqrt{3}\sin\alpha + 2 & -2\cos\alpha - 2\sqrt{3}\sin\alpha + 2 \\ -2\cos\alpha + 2\sqrt{3} + 2 & 4\cos\alpha - 2\sqrt{3}\sin\alpha + 2 & -2\cos\alpha - 2\sqrt{3}\sin\alpha + 2 \\ -2\cos\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha & -2\cos\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha & 4\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき

$$R = Q R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) Q^T = \frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & -2 \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -(-\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$R = Q R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) Q^T = R_3(\varphi) R_2(\theta) R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) R_2(-\theta) R_3(-\varphi)$$

$$Q = R_3(\varphi) R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\tilde{r} r}\begin{pmatrix} ac & -br & +a\tilde{r} \\ bc & ar & +b\tilde{r} \\ -\tilde{r}^2 & 0 & c\tilde{r} \end{pmatrix}$$

注 $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ が左手系の場合は回転の向きが変わる

§ あるベクトルを軸にして回転変換

平面 W の法線ベクトル $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を規格化して

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

とおく。$\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ は

$$(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

をみたし，$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となる。

さらに，$\mathbf{g}_2 \Rightarrow -\mathbf{g}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ とおきかえると $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ は右手系である。

注 $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ がこの順で右手系の正規直交基底となるようにおく。

$\mathbf{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{g}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ のとき

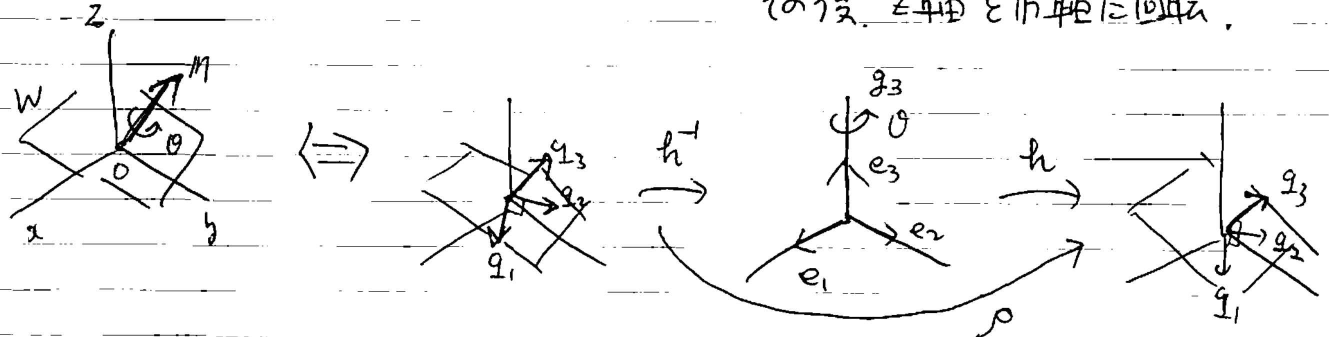
$\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -\frac{\mathbf{n}}{\sqrt{3}}$ となる。

$\mathbf{g}_1 \times (-\mathbf{g}_2) = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{3}}$ となる。

$\{\mathbf{g}_1, -\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ が右手系である

導出 1

$\mathbf{n}$ 軸を中心に θ 回転 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{n}$ 軸を z 軸に回転し，z 軸を中心に θ 回転させ，その後，z 軸を $\mathbf{n}$ 軸に回転。



$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ を $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ に写す変換を h とおく。

$$\begin{cases} h(\mathbf{e}_1) = \mathbf{g}_1 \\ h(\mathbf{e}_2) = \mathbf{g}_2 \\ h(\mathbf{e}_3) = \mathbf{g}_3 \end{cases}$$ より

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) &= h(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1 h(\mathbf{e}_1) + x_2 h(\mathbf{e}_2) + x_3 h(\mathbf{e}_3) \\ &= \begin{pmatrix} h(\mathbf{e}_1) & h(\mathbf{e}_2) & h(\mathbf{e}_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \\ &= Q\mathbf{x}. \end{aligned}$$

と表される。h の表現行列は

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{+2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

である。よって，$\mathbf{n}$ 軸を中心とする回転変換は

$$\mathbf{y} = h(g_3(h^{-1}(\mathbf{x}))) = \underset{\rho}{\underbrace{\boxed{h \circ g_3 \circ h^{-1}}}}(\mathbf{x}) = \overset{B}{\overbrace{\boxed{Q R_3(\theta) Q^{-1}}}}\mathbf{x} = B\mathbf{x}$$

$= \rho(\mathbf{x})$

$$B = Q R_3(\theta) Q^{-1}, \quad \rho = h \circ g_3 \circ h^{-1}$$

となる。

§ 直交行列

㊟ $Q = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ は $Q^TQ = I$ をみたし直交行列である。

(問) $Q^TQ = I$ を示せ.

定理 $Q = (q_1, q_2 \cdots q_n)$, $(q_i, q_j) = \delta_{ij}$ は直交行列である.

∵

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix} (q_1 \ q_2 \cdots q_n) = \begin{pmatrix} q_1^Tq_1 & q_1^Tq_2 & \cdots & q_1^Tq_n \\ q_2^Tq_1 & q_2^Tq_2 & \cdots & q_2^Tq_n \\ \cdots \\ q_n^Tq_1 & q_n^Tq_2 & \cdots & q_n^Tq_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (q_1, q_1) & (q_1, q_2) & - & (q_1, q_n) \\ (q_2, q_1) & (q_2, q_2) & \cdots & (q_2, q_n) \\ \cdots \\ (q_n, q_1) & (q_n, q_2) & \cdots & (q_n, q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I.$$

定理 $Q^{-1} = Q^T$ ∵ $Q^TQ = I \Rightarrow Q^TQQ^{-1} = IQ^{-1}$
$\Rightarrow Q^TI = Q^{-1} \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$.

よって、$Q^{-1} = Q^T$ より n 軸を中心とする $\frac{\pi}{4}$ 回転の回転変換 $\rho: x \mapsto y$ の表現行列は、

$$B = QR_3(\tfrac{\pi}{4})Q^{-1} = QR_3(\theta)Q^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & +2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 & -2 \\ -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 & +2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とまる。

問　$B^TB = I$ を示せ。

定理　直交行列の積は直交行列。

∵ $A^TA = I,\ B^TB = I$ のとき

$$(AB)^T(AB) = B^TA^TAB = B^TIB = B^TB = I.$$ □

§ 座標変換

導出2　Bの導出の別の方法。

標準基底 $\overset{\Sigma=}{\{e_1, e_2, e_3\}}$ における x, y の座標を $(x_1, x_2, x_3)_\Sigma, (y_1, y_2, y_3)_\Sigma$ とする。

また、基底 $\Sigma' = \{g_1, g_2, g_3\}$ における x, y の座標を

$$(u_1, u_2, u_3)_{\Sigma'},\quad (v_1, v_2, v_3)_{\Sigma'}$$

とおく。このとき

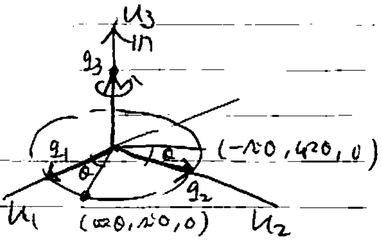
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = u_1g_1 + u_2g_2 + u_3g_3$$
$$= (g_1\ g_2\ g_3)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$
$$= Qu.$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = v_1g_1 + v_2g_2 + v_3g_3$$
$$= (g_1\ g_2\ g_3)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
$$= Qv$$

と表される。$x = Qu$ を $(x_1, x_2, x_3)_\Sigma$ と $(u_1, u_2, u_3)_{\Sigma'}$ との座標変換とよぶ。

Σ' の座標系における n 軸の回転は

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$



と表される。つまり

$$v = R_3(\theta)u = g_3(u)$$

が成立する。よって座標変換 $u = Q^Tx,\ v = Q^Ty$ より

$$Q^Ty = R_3(\theta)Q^Tx \Longrightarrow y = \underset{\substack{\| \\ B}}{\boxed{QR_3(\theta)Q^T}}x = Bx$$

と得られる。

§ ロール・ピッチ・ヨー分解

定理 任意の回転行列 R は

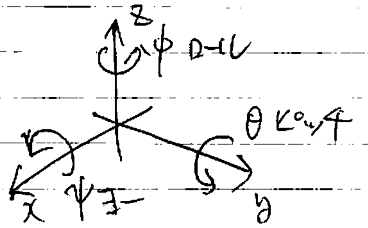
$$R = R_1(\psi) R_2(\theta) R_3(\phi)$$

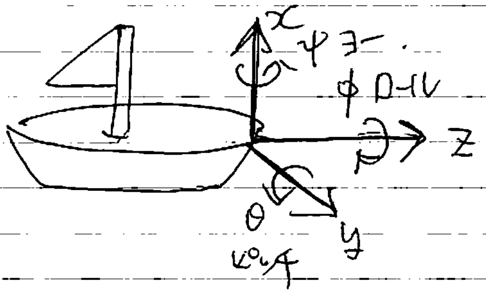
と表される。これをロール・ピッチ・ヨー分解と呼ぶ。

ϕ：ロール (roll)，θ：ピッチ (pitch)，ψ：ヨー (yaw)

(ψ, θ, ϕ)：オイラー角 (Euler angles)

注 回転変換は正規直交基底（右手系）を正規直交基底（右手系）に写す変換。





注 $R_1(\psi) R_2(\theta) \neq R_2(\theta) R_1(\psi)$，$R_2(\theta) R_3(\phi) \neq R_3(\phi) R_2(\theta)$
$R_1(\psi) R_3(\phi) \neq R_3(\phi) R_1(\psi)$.

問 直交行列 $Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ をロール・ピッチ・ヨー分解せよ。

(:)

$$Q = R_1(\psi) R_2(\theta) R_3(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi & -\cos\theta \sin\phi & \sin\theta \\ \cos\psi \sin\phi + \sin\psi \sin\theta \cos\phi & \cos\psi \cos\phi - \sin\psi \sin\theta \sin\phi & -\sin\psi \cos\theta \\ \sin\psi \sin\phi - \cos\psi \sin\theta \cos\phi & \sin\psi \cos\phi + \cos\psi \sin\theta \sin\phi & \cos\psi \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1,1)成分，(1,2)成分より

$$\begin{cases} \cos\theta \cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos\theta \sin\phi = \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \tan\phi = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \frac{-\pi}{6}$

(2,3)成分，(3,3)成分より

$$\begin{cases} -\sin\psi \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\psi \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \tan\psi = -1$

$\Rightarrow \psi = -\frac{\pi}{4}$

(1,3)成分，(3,3)成分より

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\psi \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

よって、Qのオイラー角は $\begin{cases} \phi = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ \\ \psi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 35.3^\circ \end{cases}$ である。

Qは $Q = R_1(-\frac{\pi}{4}) R_2(\theta) R_3(-\frac{\pi}{6})$ と分解される。

(注) $B = Q R_3(\frac{\pi}{4}) Q^T$ より

$$B = R_1(-\tfrac{\pi}{4}) R_2(\theta) R_3(-\tfrac{\pi}{6}) R_3(\tfrac{\pi}{4}) \left(R_1(-\tfrac{\pi}{4}) R_2(\theta) R_3(-\tfrac{\pi}{6}) \right)^T$$

$$= R_1(-\tfrac{\pi}{4}) R_2(\theta) R_3(-\tfrac{\pi}{6}) R_3(\tfrac{\pi}{4}) R_3^T(-\tfrac{\pi}{6}) R_2^T(\theta) R_1^T(-\tfrac{\pi}{4})$$

$$= R_1(-\tfrac{\pi}{4}) R_2(\theta) \underbrace{R_3(-\tfrac{\pi}{6}) \underbrace{R_3(\tfrac{\pi}{4}) R_3(+\tfrac{\pi}{6})}_{R_3(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})}}_{R_3(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) = R_3(\frac{\pi}{4})} R_2(-\theta) R_1(+\tfrac{\pi}{4})$$

$$= R_1(-\tfrac{\pi}{4}) R_2(\theta) R_3(\tfrac{\pi}{4}) R_2(-\theta) R_1(\tfrac{\pi}{4})$$

と表される。Bは回転行列の積で表される。

(注) 任意の直交行列は回転行列の積でも表される。
ロール・ピッチ・ヨー分解以外の

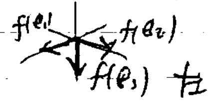
定義 f：直交変換 $\overset{\text{def}}{\iff}$ A：直交行列

§直交変換

定理 正規直交基底 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ $\xrightarrow{f}$ 正規直交基底 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

∵ $A, U = (u_1\ u_2 \cdots u_n)$：直交行列 ⇒ $V = AU$：直交行列 ■

定理 直交行列は回転行列と鏡映行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の積で表される。



No.

Date.

問 $Q = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ は極座標の回転 $Q = R_3(\varphi)R_2(\theta)$ で表せるか？

問 $Q = R_3(\tilde{\varphi})R_2(\tilde{\theta})$, $\tilde{\varphi} = \frac{\pi}{4}$, $\tilde{\theta} = \tan^{-1}\sqrt{2}$ をロール・ピッチ・ヨー分解 $Q = R_1(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi)$ せよ。

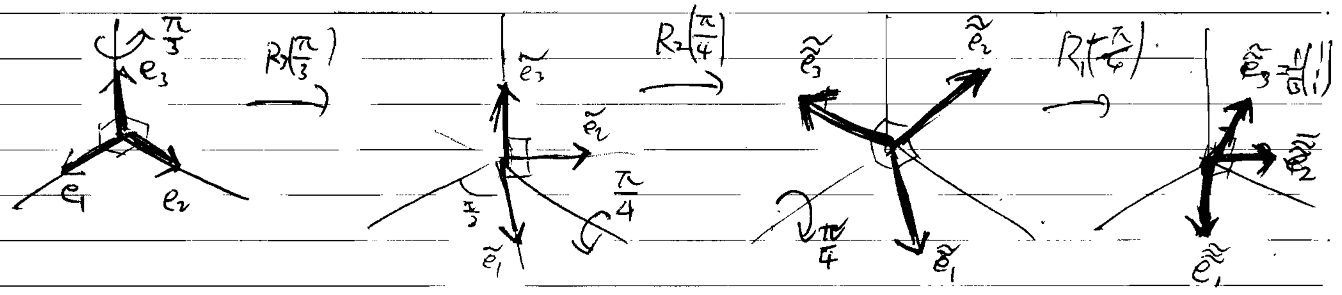
$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = R_1(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi) = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi & \sin\theta \\ * & * & -\sin\psi\cos\theta \\ * & * & \cos\psi\cos\theta \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \cos\theta\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\cos\theta\sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \tan\phi = \sqrt{3} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} -\sin\psi\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \cos\psi\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \tan\psi = -1 \Rightarrow \psi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \cos\psi\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

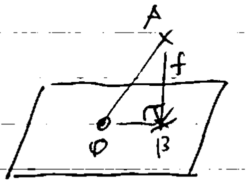
よって $Q = R_1(-\frac{\pi}{4})R_2(\frac{\pi}{4})R_3(\frac{\pi}{3})$

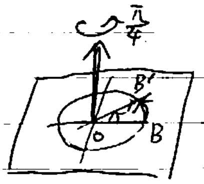


§ 回転変換の例

(例) 点 $(1,-1,2) \xrightarrow[\text{正射影}]{f} \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) \xrightarrow[\substack{n\text{軸まわりに}\\ \frac{\pi}{4}\text{回転}}]{\rho} \left(\frac{1-3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, \frac{-5+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, \frac{4+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)$

$$\because \quad y=\rho(x)=Bx=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2}\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+3\sqrt{3}\\-5-\sqrt{3}\\4-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$





(例)

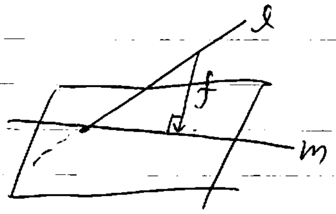
l: 直線 $x=ta+x_0 \xrightarrow[\text{正射影}]{f} m: x=tb+y_0 \xrightarrow[\text{回転}]{\rho} m': x=tc+z_0$

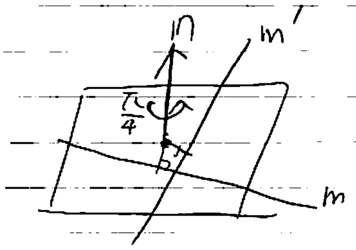
$$\begin{cases} x_0=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\\ a=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\end{cases} \qquad \begin{cases} y_0=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\-8\\1\end{pmatrix}\\ b=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}\end{cases} \qquad \begin{cases} z_0=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7+3\sqrt{3}\\-8+2\sqrt{3}\\1-5\sqrt{3}\end{pmatrix}=By_0\\ c=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2+4\sqrt{3}\\-7-\sqrt{3}\\5-3\sqrt{3}\end{pmatrix}=Bc\end{cases}$$

成分で表すと.

$$m': \frac{3\sqrt{2}x-7-3\sqrt{3}}{2+4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}y+8-2\sqrt{3}}{-7-\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}z-1+5\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$$

である.





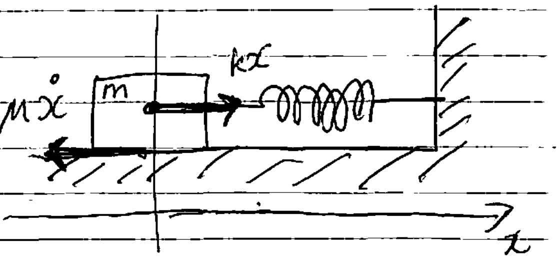
§ 力学系の例

(線形バネの振動)

例 運動方程式

$$m\frac{d^2x^2}{dt^2} = kx - \mu\frac{dx}{dt}.$$

$$\begin{cases} m: \text{質量} \\ k: \text{バネ定数} \\ \mu: \text{動まさつ係数} \end{cases}$$



速度 $v = \frac{dx}{dt}$ とおくと.

$$m\frac{dv}{dt} = kx - \mu v$$

となるので、連立すると.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}v \end{cases}$$

である ここで

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

とおくと.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

と表されるから

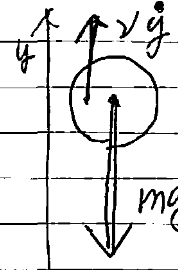
$$\frac{d}{dt}\mathbb{x} = A\mathbb{x}$$

と書ける。同次線形自励系の力学系である。

例 (自由落下運動)

運動方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + \nu\frac{dy}{dt}.$$



$$\begin{cases} m: \text{質量} \\ g: \text{重力加速度} \end{cases}$$

速度 $v = \frac{dy}{dt}$ とおくと.

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + \nu v$$

より

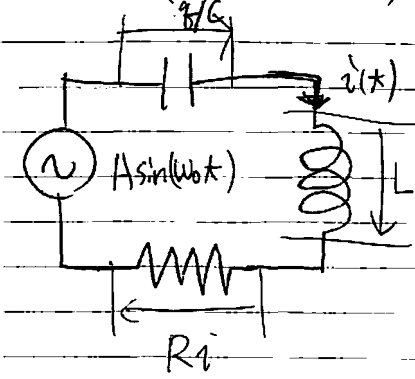
$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{\nu}{m}v + g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\nu}{m} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbb{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{b}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbb{x}}{dt} = A\mathbb{x} + \mathbb{b}.$$

と書ける. 非同次線形自励系、

例 (RLC直流回路)



$$\begin{cases} \text{電流 } i(t), = \frac{dq}{dt} \\ \text{Cの電荷 } q(t) \end{cases}$$

キルヒホッフの電圧則.

$$A\sin(\omega_0 t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \left(-\frac{R}{L}\right)i + \left(-\frac{1}{LC}\right)q + \left(\frac{A}{L}\right)\sin(\omega_0 t)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\overset{=\mathbb{x}}{\begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{A}{L}\sin\omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{b}(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbb{x}}{dt} = A\mathbb{x} + \mathbb{b}(t)$$

非同次線形非自励系

$\boxed{\text{力学系への応用}}$

§ 力学系

力学系 (dynamical system)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t: 時間, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

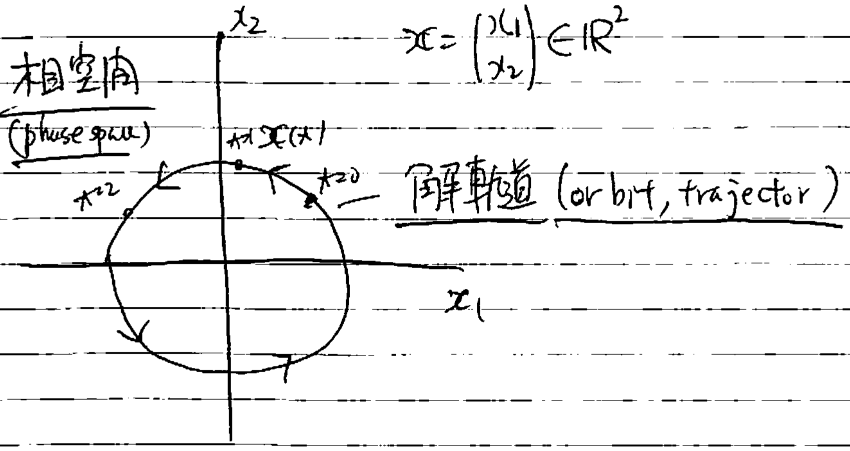
$f(t, x)$ … t が陽に表れる場合を非自励系という
(nonautonomous)

$f(x)$ … t が陽に表れない場合を自励系という
(autonomous)

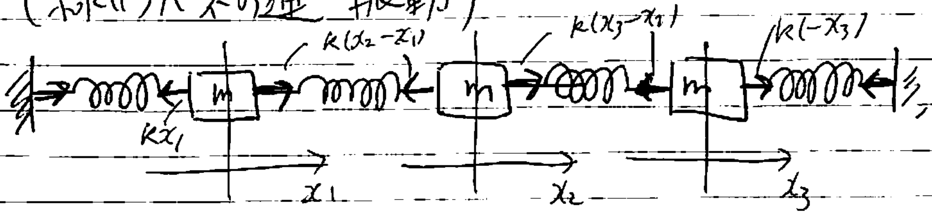
$f(x) = Ax + b$ … 非同次線形
(inhomogeneous)

$f(x) = Ax$ … 同次線形
(homogeneous)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



$\boxed{例}$（線形バネの連 振動）



3つの運動方程式

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2-x_1) - kx_1 = k(x_2-2x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_3-x_2) - k(x_2-x_1) = k(x_3-2x_2+x_1) \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = k(-x_3) - k(x_3-x_2) = k(-2x_3+x_2) \end{cases}$$

速度 $v_1 = \dot{x}_1,\ v_2 = \dot{x}_2,\ v_3 = \dot{x}_3$ とおく。

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{x}} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{x}}$$

$\Longrightarrow \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$. 同次線形自励.

§ 行列, ベクトルの微分

定義 $\frac{d}{dt}A \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frown & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & & \cdots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{pmatrix}$ 特にm×1型のとき $\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$

定理 $\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$.

∵ $AB = C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ より

$\frac{dc_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k} \dot{a}_{ik}b_{kj} + a_{ik}\dot{b}_{kj}$ $\boxed{\text{証}}$.

定理 $\frac{d}{dt}(A^{-1}) = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$

∵ $I = A^{-1}A$ を両辺微分すると.

$0 = \frac{dA^{-1}}{dt}A + A^{-1}\frac{dA}{dt} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dt}A = -A^{-1}\frac{dA}{dt} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$ $\boxed{\text{証}}$

例 $y = Ax \Rightarrow \dot{y} = \dot{A}x + A\dot{x}$

No.
Date.

§ 同次線形自励系の一般解

力学系 $\frac{dx}{dt} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$n=1$ のとき $x = (x)$, $A = (a)$ とおくと.

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

この一般解は

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

と得られる。よって一般の n のとき,

$$x(t) = B(t)x(0), \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

と一般解を仮定する。これを $\dot{x} = Ax$ へ代入すると,

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dt}(B(t)x(0)) = \frac{dB(t)}{dt}x(0) + B(t)\underbrace{\boxed{\frac{dx(0)}{dt}}}_{0} = \frac{dB(t)}{dt}x(0) = \dot{B}x(0)$$

$$(\text{右辺}) = Ax = ABx(0)$$

$$\Longrightarrow \dot{B}x(0) = ABx(0) \Longrightarrow \dot{B} = AB.$$

となる。$\dot{B} = AB$ をみたす B がみつかれば解が得られる。
ここで

$$B(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$$

とおく。このとき

$$\dot{B} = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots\right) = 0 + 1A + \frac{2}{2}tA^2 + \frac{3}{3!}t^2A^3 + \frac{4}{4!}t^4A^4 + \cdots$$

$$= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \frac{t^3}{3!}A^4 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \cdots \qquad \cdots + \frac{n}{n!}t^{n-1}A^n + \cdots$$

$$= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \cdots\right)$$

$$= A\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n\right) = AB.$$

が成り立つ. よって. このBは $\dot{B} = AB$ をみたす. Bを

$$\boxed{B(t) = e^{tA}}$$

と書くことにする

No.

Date.

一般解は

$$\mathbb{x}(t) = e^{tA}\mathbb{x}(0)$$

と表される。

非同次の場合は 定数変化法を用いて解を

$$\dot{\mathbb{x}} = A\mathbb{x} + \mathbb{b}$$

$$\mathbb{x}(t) = e^{tA}c(t)$$

と仮定する. $\dot{\mathbb{x}} = A\mathbb{x} + \mathbb{b}$ へ代入すると.

$$\dot{\mathbb{x}} = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}c\right) = \frac{de^{tA}}{dt}c + e^{tA}\frac{dc}{dt} = A\underset{\shortparallel}{\boxed{e^{tA}c}} + e^{tA}\dot{c} = \cancel{A\mathbb{x}} + e^{tA}\dot{c} = \cancel{A\mathbb{x}} + \mathbb{b}$$

$$\Rightarrow e^{tA}\dot{c} = \mathbb{b} \Rightarrow \dot{c} = \left(e^{tA}\right)^{-1}\mathbb{b} \overset{x}{=} e^{-tA}\mathbb{b}$$

$$\Rightarrow \dot{c} = e^{-tA}\mathbb{b} \Rightarrow c(t) = \int^{t} e^{-tA}\mathbb{b}\,dt.$$

となる. よって

$$\mathbb{x}(t) = e^{tA}c(t), \quad c(t) = \int^{t} e^{-tA}\mathbb{b}\,dt.$$

と書ける.

§ 固有値分解

固有方程式 (eigen-equation)　$Ax = \lambda x,\ x \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda : \text{固有値 (eigen value)} \\ x : \lambda \text{に属する固有ベクトル (eigen-vector)} \end{cases}$$

固有空間 ~~(eigen-space)~~　$W(\lambda) = \{x \mid Ax = \lambda x\}$

固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とその固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ に対して

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{p}_2 \\ \quad\vdots \\ A\boldsymbol{p}_n = \lambda_n \boldsymbol{p}_n \end{cases} \Rightarrow (A\boldsymbol{p}_1\ A\boldsymbol{p}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{p}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{p}_1\ \lambda_2\boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \lambda_n\boldsymbol{p}_n)$$

$$\Rightarrow A\overbrace{(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n)}^{P} = \overbrace{(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n)}^{P} \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{pmatrix}}^{=D}$$

$$\Rightarrow AP = PD.$$

が成立する。Pが正則(regular)のとき（$\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$が1次独立なとき）

$$\Rightarrow P^{-1}AP = P^{-1}PD \quad \Rightarrow \quad D = P^{-1}AP$$

と書ける。AからDへの変換

$$D = P^{-1}AP$$

と対角化という。左からP 右からP^{-1}をかけて、

$$A = PDP^{-1}$$

とAの固有値分解(eigen decomposition)という。

$\boxed{\text{定理}}$ Aが対角化可能なとき $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & \ddots & \lambda_n^k \end{pmatrix}P^{-1}$

(∵) $A^k = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1})\cdots(P}_{I}DP^{-1}) = P\underbrace{DD\cdots D}_{k}P^{-1} = PD^kP^{-1}.$ (証)

No.
Date.

§ 一般解の固有値分解

力学系 $\dot{x} = Ax$ の一般解は $x(t) = e^{tA}x(0)$ である。
ここに固有値分解 $A = PDP^{-1}$ を代入すると

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D^n\right)P^{-1} = Pe^{tD}P^{-1}$$

と書ける。また、

$$e^{tD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & 0\\ & \lambda_2^n \ddots & \\ 0 & & \lambda_N^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^n}{n!} & & 0 \\ & \sum_n \frac{(t\lambda_2)^n}{n!} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \sum_n \frac{(t\lambda_N)^n}{n!}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & e^{\lambda_N t}\end{pmatrix}$$

とも書ける。よって一般解はAが対角化可能なとき、

$$x(t) = Pe^{tD}P^{-1}~~x(0)~~ = P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_N t}\end{pmatrix}P^{-1}x(0),\quad P = (p_1\ p_2\ \cdots\ p_N)$$

と表される。さらに書きかえて

$$\underbrace{\boxed{P^{-1}x(t)}}_{y(t)} = e^{tD}\underbrace{\boxed{P^{-1}x(0)}}_{y(0)} \Rightarrow y(t) = e^{tD}y(0)$$

となる。$y = P^{-1}x$ は

座標　　基底

$$x = Py \Rightarrow x = (p_1\ p_2 \cdots p_N)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots \\ y_N\end{pmatrix} \Rightarrow x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_Ne_N \quad \text{基底}$$

$$\text{座標} \quad = y_1p_1 + y_2p_2 + \cdots + y_Np_N$$

と表されるので、$x \mapsto y$ は標準基底 $\Sigma = \{e_1, \cdots, e_N\}$ の座標 $(x_1, \cdots, x_N)_\Sigma$ から基底 $\Sigma' = \{p_1, \cdots, p_N\}$ の座標 $(y_1, \cdots, y_N)_{\Sigma'}$ への座標変換とみなされる。

基底 Σ' における座標系では、力学系は $y(t) = e^{tD}y(0)$ より

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t}y_1(0) \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t}y_2(0) \\ \vdots \\ y_N(t) = e^{\lambda_N t}y_N(0) \end{cases}$$

と書ける。これで解軌道を描き、座標変換 $x = Py$ で $(x_1, \cdots, x_N)_\Sigma$ の解軌道に変換すればよい

§ 実固有値の場合

例

$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, $x = x(t)$

$\dot{x} = v$ とおくと.

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = 3v - 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

と書ける. Aの固有値, 固有ベクトル, 固有空間を求める.

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda = 1, 2.$$

固有値は $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ である。それぞれ固有方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{x} = \lambda_2\boldsymbol{x}$ を解く

$\lambda = \lambda_1 = 1$ のとき

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \Rightarrow (A - I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad A - I = \begin{pmatrix} 0-1 & 1 \\ -2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - I \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \Rightarrow x - v = 0 \Rightarrow x = v.$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_1} = c\mathbf{p}_1 \quad (\forall c \in \mathbb{R}).$$

固有空間は $W(\lambda_1) = W(1) = \langle \mathbf{p}_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

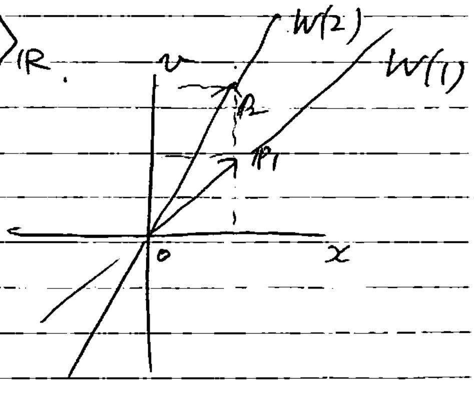
$\lambda = \lambda_2 = 2$ のとき

$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x} \Rightarrow (A - 2I)\boldsymbol{x} = 0$ を解く.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0-2 & 1 \\ -2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より } x - \frac{v}{2} = 0 \Rightarrow v = 2x$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_2} = c\mathbf{p}_2 \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

固有空間は $W(\lambda_2) = W(2) = \langle \mathbf{p}_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.



$P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.

$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$ より P は正則であり,
Aは対角化可能である. よって

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

と書ける.

No.
Date.

力学系 $\dot{x}=Ax$ の一般解 $x=e^{tA}x(0)$ は

$$x=e^{tA}x(0)=e^{tPDP^{-1}}x(0)=Pe^{tD}P^{-1}x(0) \Rightarrow P^{-1}x(t)=e^{tD}P^{-1}x(0)$$

$$\Rightarrow y(t)=e^{tD}y(0)$$

ただし, $x=Py$

と書ける. $y=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}$ とおくと,

$$y(t)=e^{tD}y(0) \Rightarrow \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\ 0&e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_0\\ \tilde{v}_0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\tilde{x}=e^{\lambda_1 t}x_0\\ \tilde{v}=e^{\lambda_2 t}v_0\end{cases}$$

と表される. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$ より

$$\left.\begin{matrix}\tilde{x}=e^{t}\tilde{x}_0\\ \tilde{v}=e^{2t}\tilde{x}_0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\tilde{x}^2=e^{2t}\tilde{x}_0^2\\ \tilde{v}=e^{2t}\tilde{v}_0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\tilde{v}}{\tilde{x}^2}=\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{x}_0^2} \Rightarrow \tilde{v}=\left(\frac{v_0}{\tilde{x}_0^2}\right)\tilde{x}^2$$

放物線

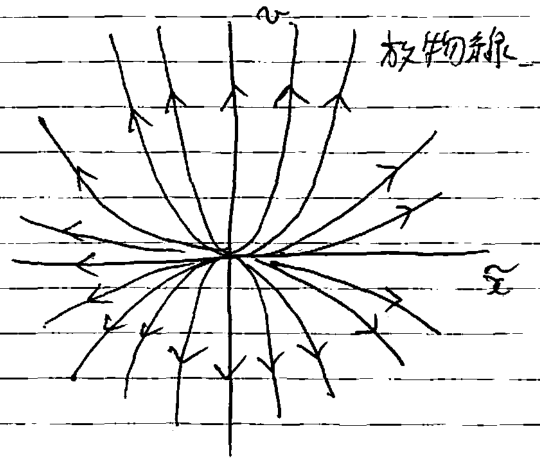
となる. 座標変換

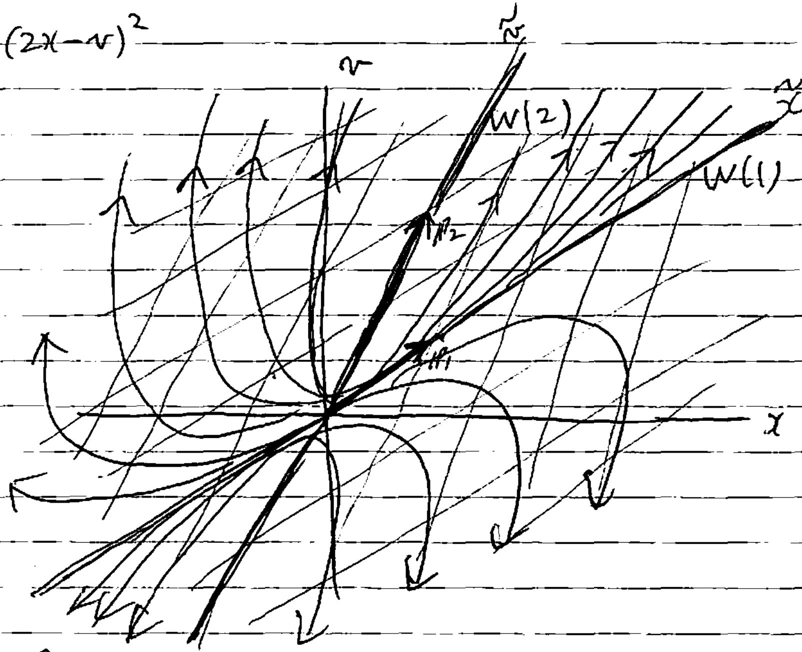
$$y=P^{-1}x \Rightarrow \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\ 1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\ -1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-v\\ v-x\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\tilde{x}=2x-v\\ \tilde{v}=v-x\end{cases}$$

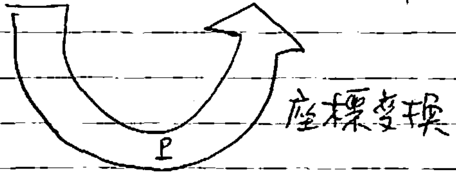
より. 解軌道は

$$(v-x)=\frac{v_0-x_0}{(2x_0-v_0)^2}(2x-v)^2$$

となる

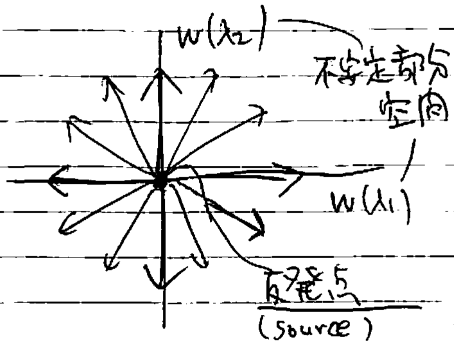




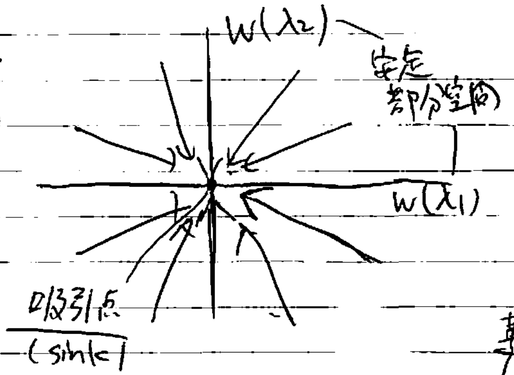


一般に

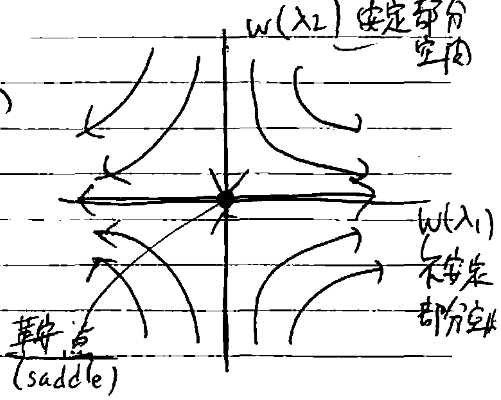
$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$



$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$



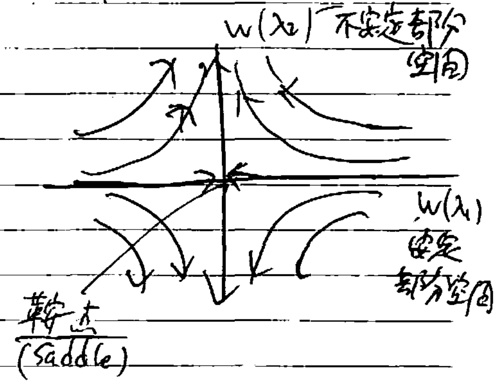
$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$



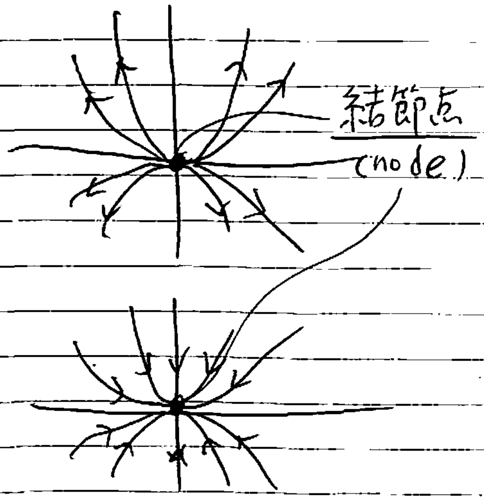
$\lambda > 0$ のとき $W(\lambda)$：不安定部分空間 (unstable subspace)

$\lambda < 0$ のとき $W(\lambda)$ 安定部分空間 (stable subspace)

$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$



特に $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$



§ 複素固有値の場合

例1 $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0.$

速度 $v=\dot{x}$ とおく。

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=-5x-2v\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\ -5x-2v\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{x}=A\mathbf{x}.$$

Aの固有値は

$$0=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ -5 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda(-2-\lambda)+5=\lambda^2+2\lambda+5$$

$$\Rightarrow \lambda=-1\pm 2i.$$

と求まる。

$$\begin{cases}\lambda_1=-1+2i\\ \lambda_2=-1-2i\end{cases}$$

とおく。$\lambda_2=\overline{\lambda_1}$ であることに注意する。

λ_1の固有ベクトルは $A\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x}$ より

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}0-\lambda_1 & 1\\ -5 & -2-\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2i & 1\\ -5 & -1-2i\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}5 & 1+2i\\ 5 & 1+2i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5 & 1+2i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 5x+(1+2i)v=0$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+2i}{5}c\\ c\end{pmatrix}=\frac{c}{5}\begin{pmatrix}1+2i\\ 5\end{pmatrix}=\frac{c}{5}\mathbf{p}_1.$$

ここで

$$A\mathbf{p}_1=\lambda_1\mathbf{p}_1 \Rightarrow \overline{A\mathbf{p}_1}=\overline{\lambda_1\mathbf{p}_1}$$

$$\Rightarrow \overline{A}\,\overline{\mathbf{p}_1}=\overline{\lambda_1}\,\overline{\mathbf{p}_1} \Rightarrow A\overline{\mathbf{p}_1}=\lambda_2\overline{\mathbf{p}_1}$$

より λ_2の固有ベクトルは $\mathbf{p}_2=\overline{\mathbf{p}_1}$ である。

よって、Aは

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \overline{\lambda_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2i & 0\\ 0 & 1-2i\end{pmatrix}=P^{-1}AP$$

$$P=(\mathbf{p}_1\ \overline{\mathbf{p}_1})=\begin{pmatrix}1+2i & 1-2i\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$

と対角化可能である。

$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}$の一般解は

$$\mathbf{x}(t)=e^{tA}\mathbf{x}(0)=e^{tPDP^{-1}}\mathbf{x}(0)=Pe^{tD}P^{-1}\mathbf{x}(0).$$

と表される。$\lambda_1=\alpha+i\omega,\ \lambda_2=\alpha-i\omega$ とおくと、

$$e^{tD}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\overline{\lambda_1}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\alpha t}e^{i\omega t} & 0\\ 0 & e^{\alpha t}e^{-i\omega t}\end{pmatrix}$$

$$=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}e^{i\omega t} & 0\\ 0 & e^{-i\omega t}\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}\alpha=\mathrm{Re}(\lambda_1)=\frac{\lambda_1+\overline{\lambda_1}}{2}\\ \omega=\mathrm{Im}(\lambda_1)=\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_1}}{2i}\end{cases}$$

$$=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos(\omega t)+i\sin(\omega t) & 0\\ 0 & \cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\end{pmatrix}$$

と表される。さらに、

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2i} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta+i\sin\theta & 0\\ 0 & \cos\theta-i\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S'R(\theta)S^{-1}=\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}$$

と書ける。

No.
Date.

よって、

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} PSR(\omega t)S^{-1}P^{-1}\mathbf{x}(0) = e^{\alpha t}(PS^{-1})R(\omega t)(PS^{-1})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

となる。

$$PS^{-1} = (\mathbf{p}_1 \ \overline{\mathbf{p}_1})\begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}_1 - \overline{\mathbf{p}_1}}{2i} & \frac{\mathbf{p}_1 + \overline{\mathbf{p}_1}}{2} \end{pmatrix} = (\underset{\mathbf{q}_1}{\underset{\|}{\boxed{\mathrm{Im}(\mathbf{p}_1)}}} \ \underset{\mathbf{r}_1}{\underset{\|}{\boxed{\mathrm{Re}(\mathbf{p}_1)}}}) = (\mathbf{q} \ \mathbf{r}) = Q$$

とおくと。

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} Q\, R(\omega t)\, Q^{-1}\mathbf{x}(0).$$

$$\Longrightarrow \underset{\mathbf{y}(t)}{\underset{\|}{\boxed{Q^{-1}\mathbf{x}(t)}}} = e^{\alpha t} R(\omega t) \underset{\mathbf{y}(0)}{\underset{\|}{\boxed{Q^{-1}\mathbf{x}(0)}}}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{y}(t) = e^{\alpha t} R(\omega t)\, \mathbf{y}(0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{\alpha t}(y_1(0)\cos\omega t + y_2(0)\sin\omega t) \\ y_2(t) = e^{\alpha}(y_1(0)\sin\omega t + y_2(0)\cos\omega t) \end{cases}$$

注 $z \in \mathbb{C} \ni z = x + iy$

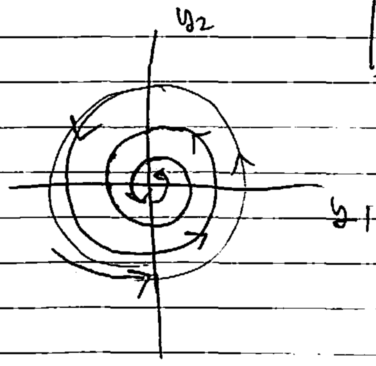
zの実部 $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$

$= \frac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = x.$

zの虚部 $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

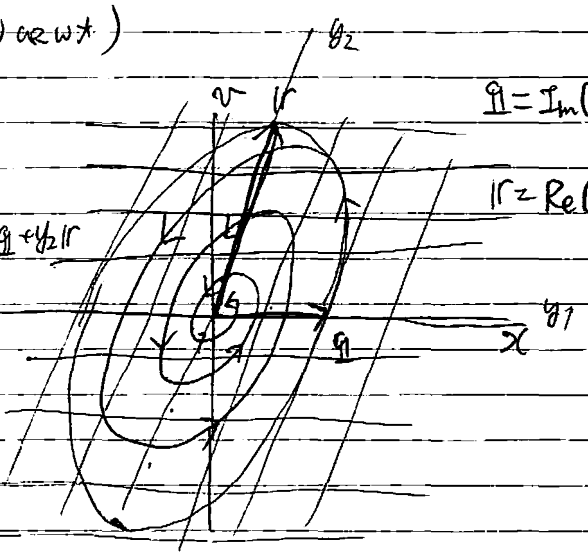
$= \frac{(x+iy)-(x-iy)}{2i} = y.$

$\boxed{\alpha = -1, \omega = 2}$



$\mathbf{x} = Q\mathbf{y} = y_1\mathbf{q} + y_2\mathbf{r}$

座標変換

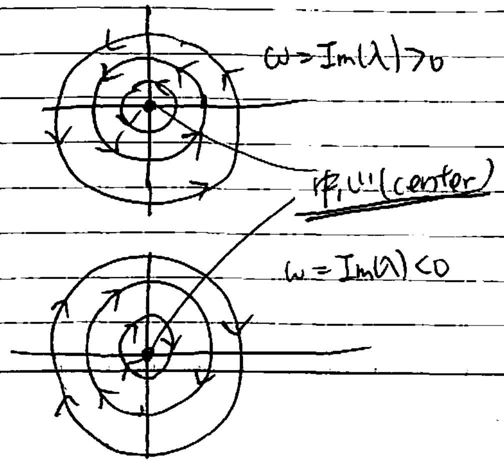


$\mathbf{q} = \mathrm{Im}(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

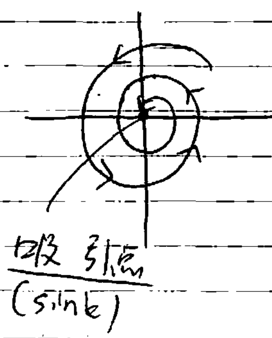
$\mathbf{r} = \mathrm{Re}(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

一般に.

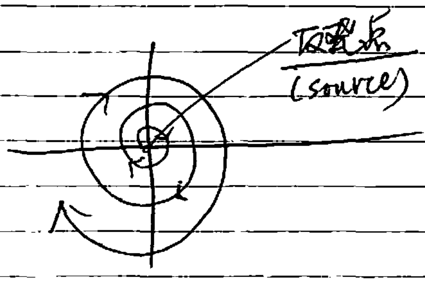
$\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) = 0$



$\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) < 0$



$\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) > 0$



No.
Date.

§ 重複固有値の場合

例

$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$

$v = \dot{x}$ とおくと．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x}$.

と書ける。Aの固有値は

$$0 = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(2-\lambda)+1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$$

より

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (2重)

となる．$\lambda=1$ の固有ベクトルは

$A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ より

$$(A-I) = \begin{pmatrix}0-1&1\\-1&2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

となるから．$x - v = 0 \Rightarrow x = v$

よって．

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} = c\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}}_{\mathbf{p}_1} = c\mathbf{p}_1$$

と得られる．$\lambda=1$ の固有空間は．

$$W(1) = \langle \mathbf{p}_1\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}}$$

であり 1次元となる．

Aは対角化できない．

Aをジョルダン分解する．

§ ジョルダン分解

一般固有空間を

$$W_m = \{ \mathbf{x} \mid (A-\lambda I)^n \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

とおく．すると．

$(A-\lambda I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_1 \in W_1(\lambda)$

である．次に

$$(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$$

を解く．

$$(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}2-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

拡大係数行列を簡約化して．

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\1&-1&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\0&0&0\end{array}\right)$$

である．これより $x - v = 1$ となるので

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+v\\v\end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}}_{\mathbf{p}_2} + c\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}}_{\mathbf{p}_1}$$

$$= \mathbf{p}_2 + c\mathbf{p}_1$$

を得る．$\mathbf{p}_2$ は

$(A-\lambda I)\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_2 \notin W_1(\lambda)$

$$(A-\lambda I)^2\mathbf{p}_2 = (A-\lambda I)\underbrace{\boxed{(A-\lambda I)\mathbf{p}_2}}_{\mathbf{p}_1}$$

$$= \underbrace{\boxed{(A-\lambda I)\mathbf{p}_1}}_{\mathbf{0}}$$

$$= \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \mathbf{p}_2 \in W_2(\lambda)$$

とみたす，よって．

$$\begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \lambda\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \lambda\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{p}_1 \in W_1(\lambda) \\ \mathbf{p}_2 \notin W_1(\lambda),\ \mathbf{p}_2 \in W_2(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A\mathbf{p}_1\ \ A\mathbf{p}_2) = (\lambda\mathbf{p}_1\ \ \lambda\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1)$$

$$\Rightarrow A\underbrace{\boxed{(\mathbf{p}_1\ \ \mathbf{p}_2)}}_{P} = \underbrace{\boxed{(\mathbf{p}_1\ \ \mathbf{p}_2)}}_{P}\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}}}_{J}$$

$\Rightarrow AP = PJ$．が成立する．

$$|P|=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$ より

P は正則なので

$$A=PJP^{-1}$$

が成り立つ. これをジョルダン分解という.

J をジョルダンブロック（細胞 (cell)）という.

一般にジョルダンブロック

$$J=\left.\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&1&\\&&\lambda&\ddots\\&&&\ddots&1\\&&&&\lambda\end{pmatrix}\right\}m$$

は. [illegible]示せ.

$$J^k=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&&&\\&\lambda^k&k\lambda^{k-1}&&\\&&\lambda^k&&\\&&&\ddots&k\lambda^{k-1}\\&&&&\lambda^k\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}J^0=I,\\J^1=J,\\k=1,2,\cdots\end{matrix}$$

が成立する. これを用いると.

$\dot{x}=Ax$ の一般解は

$$x=e^{tA}x(0)=e^{tPJP^{-1}}x(0)$$
$$=Pe^{tJ}P^{-1}x(0)$$

と書ける. ここで e^{tJ} は.

$$e^{tJ}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}J^n=\begin{pmatrix}\overset{①}{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^n}{n!}}}&\overset{②}{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot t^n\lambda^{n-1}}{n!}}}&&\\&\boxed{①}&\boxed{②}&\\&&\ddots&\ddots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&te^{\lambda t}&&\\&\boxed{①}&\boxed{②}&\\&&\ddots&\ddots\end{pmatrix}$$

$$②=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt^n\lambda^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t(t\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}+\overset{n=0\text{ のとき}}{0}$$

$$=0+t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=te^{\lambda t}.$$

と表される.

λはAの<u>m重固有値</u>.

<u>一般固有空間</u>

$$W_m(\lambda)=\{x\mid(A-\lambda I)^m x=0\}$$

$$\begin{cases}A\boldsymbol{p}_1=\lambda\boldsymbol{p}_1\\A\boldsymbol{p}_2=\lambda\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1\\A\boldsymbol{p}_3=\lambda\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_2\\\quad\vdots\\A\boldsymbol{p}_m=\lambda\boldsymbol{p}_m+\boldsymbol{p}_{m-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{p}_1\in W_1(\lambda)\\\boldsymbol{p}_2\notin W_1(\lambda),\ \boldsymbol{p}_2\in W_2(\lambda)\\\boldsymbol{p}_3\notin W_1(\lambda),\ \boldsymbol{p}_3\notin W_2(\lambda),\ \boldsymbol{p}_3\in W_3(\lambda)\\\cdots\\\boldsymbol{p}_m\notin W_1(\lambda),\ \boldsymbol{p}_m\notin W_2(\lambda),\cdots\\\quad\cdots,\ \boldsymbol{p}_m\notin W_{m-1}(\lambda),\ \boldsymbol{p}_m\in W_m(\lambda)\end{cases}$$

$$(A\boldsymbol{p}_1\ A\boldsymbol{p}_2\cdots A\boldsymbol{p}_m)=$$
$$(\lambda\boldsymbol{p}_1\ \ \lambda\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \lambda\boldsymbol{p}_m+\boldsymbol{p}_{m-1})$$

$$\Rightarrow A(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_m)=$$
$$(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_m)\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&1&\\&&\lambda&\ddots\\&&&\ddots&1\\&&&&\lambda\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AP=PJ.$$

$$\Rightarrow A=PJP^{-1}$$

$$\Rightarrow J=P^{-1}AP$$ ：<u>ジョルダン標準形</u>

(Jordan canonical form)

$$x = Pe^{tJ}P^{-1}x(0) \text{ より}$$

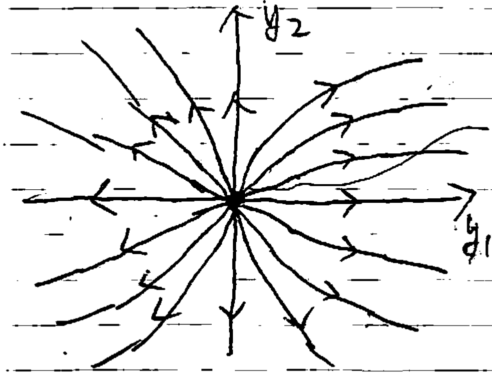
$$\boxed{\underbrace{P^{-1}x}_{y}} = e^{tJ}\boxed{\underbrace{P^{-1}x(0)}_{y(0)}}$$

$$\Rightarrow y = e^{tJ}y(0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\lambda t}y_1(0) + te^{\lambda t}y_2(0) \\ y_2 = e^{\lambda t}y_2(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1(0)}{y_2(0)} + t.$$



退化結節点

反発点
(source)

$\Rightarrow$

$$y = P^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}x = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}x$$

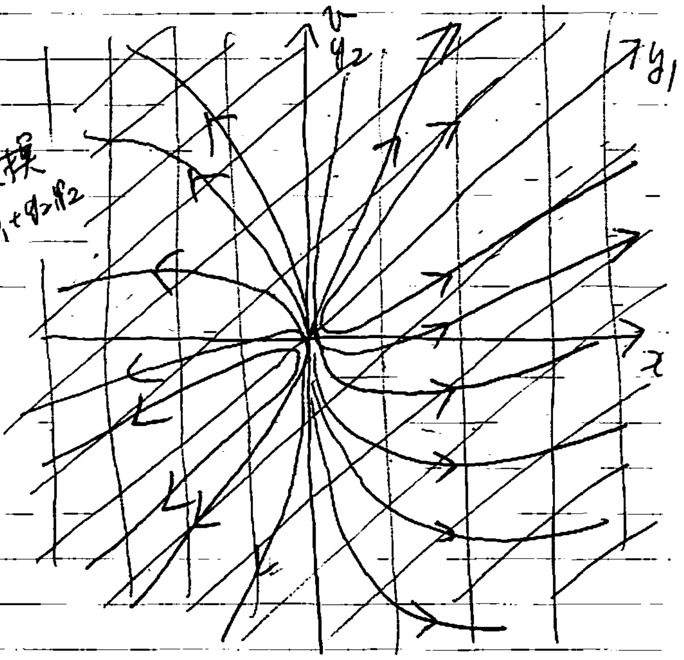
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ x-v \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\frac{v}{x-v} = \overbrace{\left(\frac{v(0)}{x(0)-v(0)}\right)}^{=C} + t.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{v} - 1 = \frac{1}{C+t} \Leftrightarrow \frac{x}{v} = 1 + \frac{1}{C+t} = \frac{C+1+t}{C+t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v = \frac{C+t}{C+1+t}x.}$$

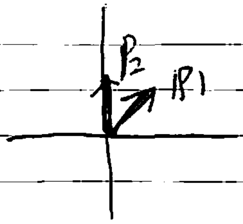
座標変換
$x = y_1p_1 + y_2p_2$



$$y_1 = (C+t)y_2 \leftarrow$$

ただし, $C = \dfrac{y_1(0)}{y_2(0)}$

傾きがC+tの直線.
傾きが時間とともに増大するので放物線のような形となる.



No.
Date.

§ 平衡点

固有空間 (eigen-space)　$W(\lambda)=\{x \mid Ax=\lambda x\}$

$\mathrm{Re}(\lambda)<0$ のとき 安定部分空間 (stable subspace)　$W_s(\lambda)$

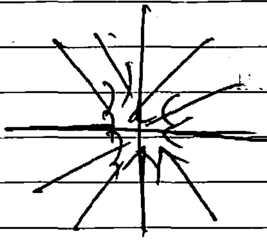
$\mathrm{Re}(\lambda)>0$ のとき 不安定部分空間 (unstable subspace)　$W_u(\lambda)$

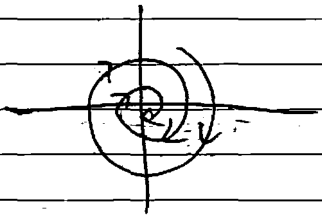
$\mathrm{Re}(\lambda)=0$ のとき 中心部分空間 (center subspace)　$W_c(\lambda)$

平衡点 (equibria)　$\frac{dx^*}{dt}=0$ の点、 ⟺ $Ax^*=0$ の点、

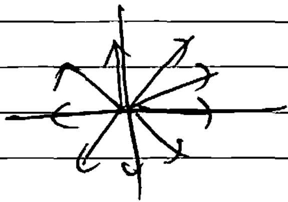
⟺ $\mathrm{Ker}(A)=\{x \mid Ax=0\} \ni x^*$

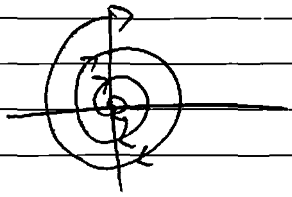
(i) $x^*\in W_s(\lambda)$, $x^*\in W_s(\lambda_2)$, …　全て安定部分空間に含まれるとき、
x^*は吸引点 (sink)



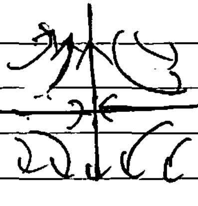


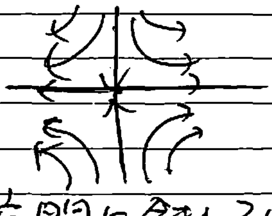
(ii) $x^*\in W_u(\lambda_1)$, $x^*\in W_u(\lambda_2)$, …　全て不安定部分空間に含まれるとき、
x^*は反発点 (source)



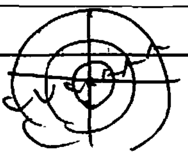


(iii) $x^*\in W_s(\lambda_1)$, $x^*\in W_u(\lambda_2)$, …　安定と不安定部分空間に含まれるとき、
x^*は鞍点 (saddle)





(iv) $x^*\in W_c(\lambda_1)$, …　中心部分空間に含まれるとき
x^*は中心 (center)



§離散力学系

前進差分（オイラー差分） $\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$

後退差分 $\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t)-x(t+h)}{h}$

中心差分（かえるとび差分） $\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t+h)-x(t-h)}{h}$

} 差分近似

例

$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx - \mu\frac{dx}{dt}$ において $v = \frac{dx}{dt}$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}x = Ax$$ ：力学系.

ここで $\frac{dx}{dt}$ を差分近似する.

(i) 前進差分

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = Ax(t) \Longleftrightarrow x(t+h) = x(t) + hAx(t)$$
$$= \underbrace{(I + hA)}_{\tilde{A}}x(t)$$

$$\Longleftrightarrow x(t+h) = \tilde{A}x(t)$$

ここで $t = hn$ とおく. このとき $\left.\begin{array}{l} x(t) = x(nh) = x^{(n)} \\ x(t+h) = x((n+1)h) = x^{(n+1)} \end{array}\right\}$ とおく.

$$\Longleftrightarrow x^{(n+1)} = \tilde{A}x^{(n)} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ \frac{hk}{m} & 1-\frac{hk}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(n)} \\ v^{(n)} \end{pmatrix}$$

(ii) 後退差分

$$\frac{x(t)-x(t-h)}{h} = Ax(t) \Longleftrightarrow \frac{x^{(n)}-x^{(n-1)}}{h} = Ax^{(n)}$$

$$\Longleftrightarrow x^{(n)} = x^{(n-1)} + hAx^{(n)} \Longleftrightarrow x^{(n)} - hAx^{(n)} = x^{(n-1)}$$

$$\Longleftrightarrow (I-hA)x^{(n)} = x^{(n-1)} \Longleftrightarrow x^{(n)} = (I-hA)^{-1}x^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow x^{(n+1)} = \underbrace{\boxed{(I - hA)^{-1}}}_{\tilde{A}} x^{(n)} \Rightarrow x^{(n+1)} = \tilde{A} x^{(n)}.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ -\frac{hk}{m} & 1+\frac{h\mu}{m} \end{pmatrix}^{-1}.$$

(iii) 中心差分

$$\frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} = Ax(t) \Rightarrow \frac{x^{(n+1)} - x^{(n-1)}}{2h} = Ax^{(n)}$$

$$\Rightarrow x^{(n+1)} = 2hAx^{(n)} + x^{(n-1)} \Rightarrow \begin{cases} x^{(n+1)} = 2hAx^{(n)} + x^{(n-1)} \\ x^{(n)} = x^{(n)} + 0 \cdot x^{(n-1)}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 2hA & I \\ \hline I & O \end{array}\right) \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{c} x^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \\ \hline x^{(n)} \\ v^{(n)} \end{array}\right)}_{\tilde{x}^{(n+1)}} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2h & 1 & 0 \\ \frac{2hk}{m} & -\frac{2h\mu}{m} & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\tilde{A}} \underbrace{\left(\begin{array}{c} x^{(n)} \\ v^{(n)} \\ \hline x^{(n-1)} \\ v^{(n-1)} \end{array}\right)}_{\tilde{x}^{(n)}}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}^{(n+1)} = \tilde{A}\,\tilde{x}^{(n)}.$$

注 $\frac{dx}{dt} = Ax$ と $\tilde{x}^{(n+1)} = \tilde{A}x^{(n)}$ は異なる解をもつ。時間刻み幅 h により解軌道は大きく変化する

一般に

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$$ ：離散力学系 (daiscrete dynamical system;

$$\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \text{ … 離散時間} \\ x \in \mathbb{R}^N \text{ … 空間} \\ A \in \mathbb{R}^{N\times N}. \end{cases}$$

No.
Date.

§離散力学系の一般解

$x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$ の一般解は $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ である.

(∵) $x^{(1)} = Ax^{(0)}$, $x^{(2)} = Ax^{(1)} = AAx^{(0)} = A^2x^{(0)}$, … (合).

A が固有値分解 $A = PDP^{-1}$ または
ジョルダン分解 $A = PJP^{-1}$ で表れるとする.

このとき,

$x^{(n)} = PDP^{-1}x^{(0)} \Leftrightarrow y^{(n)} = D^n y^{(0)}$, 座標変換 $x^{(n)} = Py^{(n)}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1^{(n)} = \lambda_1^n y_1^{(0)} \leftarrow \\ y_2^{(n)} = \lambda_2^n y_2^{(0)} \leftarrow \\ \vdots \qquad \vdots \leftarrow \\ y_N^{(n)} = \lambda_N^n y_N^{(0)} \leftarrow \end{cases}$$

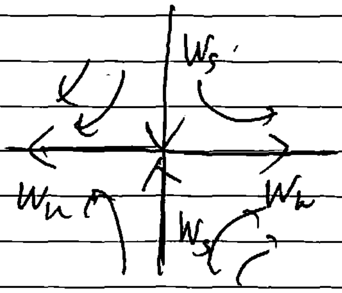
等比が $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ の等比数列.

各成分は $|\lambda| < 1$ のとき収束し, $|\lambda| > 1$ のとき発散する.

$|\lambda| < 1$ のとき $W_s(\lambda)$: 安定部分空間

$|\lambda| > 1$ のとき $W_u(\lambda)$: 不安定部分空間

$|\lambda| = 1$ のとき $W_c(\lambda)$: 中心部分空間



例

差分方程式

$$x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=0, \quad n=0,1,2,\cdots \quad —— ⊛$$

の一般解を求める。まず,

$$\begin{cases} x_1(n)=x(n) \\ x_2(n)=x(n+1)=x_1(n) \end{cases}$$

とおくと ⊛ は

$$x_2(n+1)=5x_2(n)-6x_1(n)$$

となるので, ⊛ は

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$$

と書ける。ベクトルで表すと, ~~力学~~ 離散力学系

$$◉ \quad x(n+1)=Ax(n), \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$x(n)=\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

を得る。◉ の一般解は

$$x(n)=A^n x(0)$$

である。A を固有値分解すると,

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=2, \ \lambda_2=3.$$

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1-x_2=0$$

$$\Rightarrow x=c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=c\,p_1$$

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x_1-x_2=0$$

$$\Rightarrow x=c\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=c\,p_2$$

$$\begin{cases} D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ P=(p_1 \ p_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A=PDP^{-1}$$

となる。

一般解は

$$x(n)=A^n x(0)=PD^nP^{-1}x(0)$$

となる. 座標変換すると,

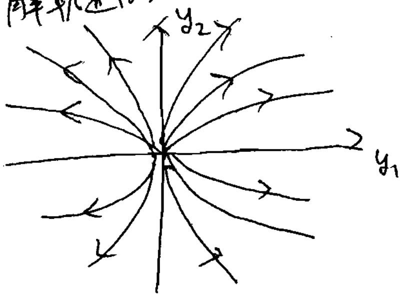
$$P^{-1}x(n)=D^nP^{-1}x(0)$$

$$y(n)=D^n y(0), \quad y(n)=P^{-1}x(n)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(n)=\lambda_1^n y_1(0)=2^n y_1(0) \\ y_2(n)=\lambda_2^n y_2(0)=3^n y_2(0) \end{cases}$$

を得る. 解軌道は.



である. 座標変換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

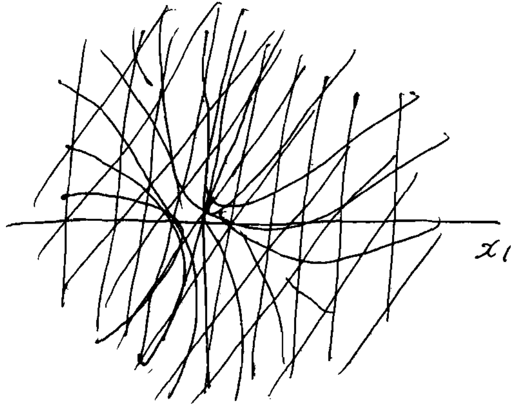
より

$$\begin{cases} x_1(n)=y_1(n)+y_2(n)=2^n y_1(0)+3^3 y_2(0) \\ x_2(n)=2y_1(n)+3y_2(n)=2^{n+1}y_1(0)+3^{n+1}y_2(0) \end{cases}$$

であるから. (⊛)の一般解は,

$$x(n)=\lambda_1^n(3x(0)-x(1))+\lambda_2^n(-2x(0)+x(1))$$

となる. 解軌道は.



である.

例

差分方程式 $x(n+2)+2x(n+1)+5x(n)=0$

離散力学系 $\boldsymbol{x}(n+1)=A\boldsymbol{x}(n)$

$$\boldsymbol{x}(n)=\begin{pmatrix}x_1(n)\\x_2(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(n)\\x(n+1)\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-5&-2\end{pmatrix}$$

固有値方程式

$$|A-\lambda I|=\lambda^2+2\lambda+5=0$$

固有値 $\begin{cases}\lambda_1=-1+2i\\\lambda_2=\bar{\lambda}_1=-1-2i\end{cases}$

固有ベクトル

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}1-2i&1\\-5&-1-2i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1-2i&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (1-2i)x_1+x_2=0$

$\Rightarrow \boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\-1+2i\end{pmatrix}=c\,\boldsymbol{p}_1$

固有値分解

$$A=PDP^{-1}$$

$$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\bar{\lambda}_1)=\begin{pmatrix}-1+2i&0\\0&-1-2i\end{pmatrix}$$

$$P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2)=(\boldsymbol{p}_1\ \bar{\boldsymbol{p}}_1)=\begin{pmatrix}1&1\\-1+2i&-1-2i\end{pmatrix}$$

実標準形分解.

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\bar{\lambda}_1\end{pmatrix}=|\lambda_1|\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}$$

$\theta=\arg(\lambda_1)$
$=\tan^{-1}(-2)$
$|\lambda_1|=\sqrt{5}.$

$$=|\lambda_1|S\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}S^{-1}$$

$$=|\lambda_1|SR(\theta)S^{-1}$$

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{2i}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2i}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A=PDP^{-1}$$
$$=|\lambda_1|PSR(\theta)S^{-1}P^{-1}$$
$$=|\lambda_1|(PS)R(\theta)(PS)^{-1}$$
$$=|\lambda_1|QR(\theta)Q^{-1}$$

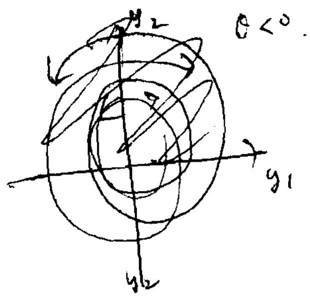
$$Q=PS=(\boldsymbol{p}_1\ \bar{\boldsymbol{p}}_1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2i}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2i}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{p}_1-\bar{\boldsymbol{p}}_1}{2i}&\frac{\boldsymbol{p}_1+\bar{\boldsymbol{p}}_1}{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathrm{Im}(\boldsymbol{p}_1)&\mathrm{Re}(\boldsymbol{p}_1)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}$$

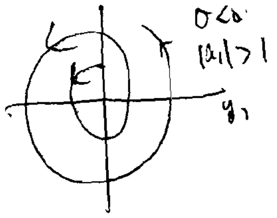
一般解.

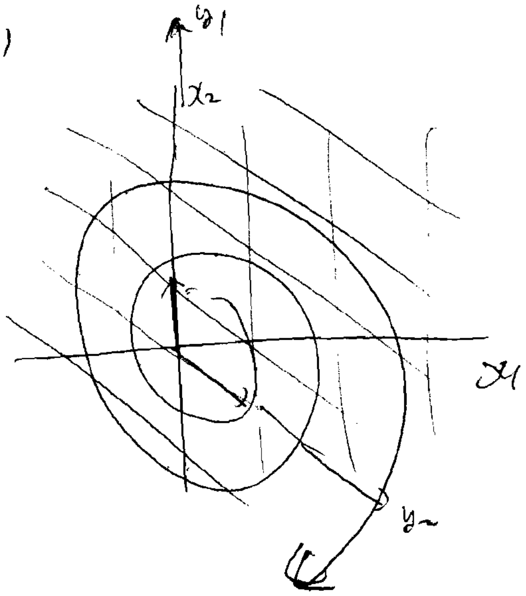
$$\boldsymbol{x}(n)=A^n\boldsymbol{x}(0)$$
$$=(|\lambda_1|QR(\theta)Q^{-1})^n\boldsymbol{x}(0)$$
$$=|\lambda_1|^nQR(\theta)^nQ^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$
$$=|\lambda_1|^nQR(n\theta)Q^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

座標変換

$$\boldsymbol{y}(n)=|\lambda_1|^nR(n\theta)\boldsymbol{y}(0)$$
$$\boldsymbol{y}(n)=Q^{-1}\boldsymbol{x}(n)$$



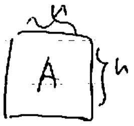




特異値分解

§ 特異値分解

A : $n \times n$ 正方行列



固有値分解　$A = PDP^{-1}$

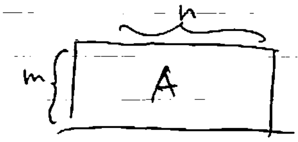
$\Updownarrow$

対角化　$D = P^{-1}AP$

ただし $\begin{cases} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ P = (\boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2 \cdots \ \boldsymbol{p}_n) \\ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^n \\ A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i \ (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$

固有方程式

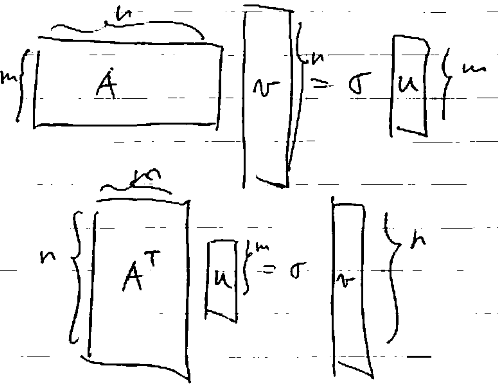
A : $m \times n$ 長方行列



ただし、簡単のため $m \leq n$.

$\sigma_i \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i & (i = 1, 2, \cdots, m). \\ A^T \boldsymbol{u}_i = \sigma_i \boldsymbol{v}_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ A\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} & (i = m+1, \cdots, n) \end{cases}$$



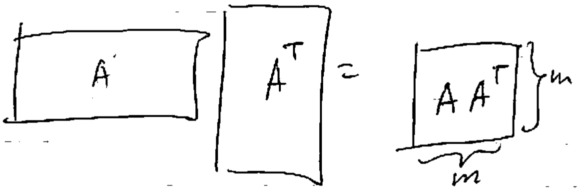
ただし. $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \cdots, \sigma_m \geq 0$.

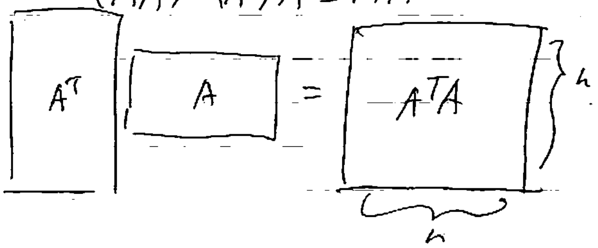
σ_i : 特異値 (singular value)

$\boldsymbol{u}_i$: 左特異ベクトル (left singular vector)

$\boldsymbol{v}_i$: 右特異ベクトル (right singular vector)

㊟ $B=A^TA$, $C=AA^T$ は対称行列である. ∵ $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$. 図
$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$





㊟ ① $Bv_i=(A^TA)v_i=A^T(Av_i)=A^T(\sigma_iu_i)=\sigma_i(A^Tu_i)=\sigma_i(\sigma_iv_i)=\sigma_i^2v_i$

$\Rightarrow Bv_i=\sigma_i^2v_i \Rightarrow B=A^TA$ の固有値 σ_i^2, 固有ベクトル v_i.

② $Cu_i=(AA^T)u_i=A(A^Tu_i)=A(\sigma_iv_i)=\sigma_i(Av_i)=\sigma_i(\sigma_iu_i)=\sigma_i^2u_i$

$\Rightarrow Cu_i=\sigma_i^2u_i \Rightarrow C=AA^T$ の固有値 σ_i^2, 固有ベクトル u_i

③ $Av_i=0 \Rightarrow A^TAv_i=A^T0=0 \Rightarrow Bv_i=0=0\cdot v_i \Rightarrow Bv_i=0\cdot v_i \Rightarrow B$ は n−m個の0固有値

よって, B, C は対称行列のため $V=(v_1\ v_2 \cdots v_n)$, $U=(u_1 \cdots u_m)$ は直交行列にとれる.

$\Rightarrow U^TU=I,\ V^TV=I$
$\Rightarrow U^{-1}=U^T,\ V^{-1}=V^T$.

㊟ $A: n\times n$; $A^T=A$

対称行列の異なる固有値の 固有ベクトルは直交する.

∵ $\left.\begin{array}{l} Ax=\lambda x \\ Ay=\mu x \\ \lambda\neq\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda(x,y)=(\lambda x,y)=(Ax,y)=(Ax)^Ty=x^TA^Ty=(x,A^Ty)$
$=(x,Ay)=(x,\mu y)=\mu(x,y)$
$\Rightarrow (\lambda-\mu)(x,y)=0 \Rightarrow (x,y)=0 \Rightarrow x\perp y$ [illegible]

㊟ $A: m\times n$.
$Av_{m+1}=0, \cdots, Av_n=0$ より $v_{m+1}\in \mathrm{Ker}A$, $v_{m+2}\in\mathrm{Ker}A, \cdots, v_n\in\mathrm{Ker}A$ である.
$\{v_{m+1},\cdots,v_n\}$ を 1次独立にえらべば $\mathrm{Ker}A=\langle v_{m+1},\cdots,v_n\rangle_{\mathbb{R}}$ となる.
グラム・シュミットの直交化法などで $\{v_{m+1},\cdots,v_n\}$ は正規直交系としてとれる.
よって, $V^TV=I$ が成立する.

㊟ $A: n\times n$, $A^T=A$.
対称行列の重複固有値の固有ベクトルは正規直交系としてとれる.
$Ax=\lambda x \Rightarrow (A-\lambda I)x=0 \Rightarrow x\in\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$

$$\left.\begin{array}{lll} ① & Av_i = \sigma_i u_i & (i=1,\cdots,m) \\ ② & A^Tu_i = \sigma_i v_i & (\quad〃\quad) \\ ③ & Av_i = 0 & (i=m+1,\cdots,n) \end{array}\right\}$$

①,③より

$$\overbrace{(\underbrace{Av_1 \cdots Av_m}_{m}\ Av_{m+1} \cdots Av_n)}^{n} = \overbrace{(\underbrace{\sigma_1 u_1 \cdots \sigma_m u_m}_{m}\ 0 \cdots 0)}^{n}$$

$$\Longleftrightarrow {}^{m}\{\overset{n}{A}\underbrace{(v_1 \cdots v_n)}_{n}\}^{n\ m} = \{\underbrace{(u_1 \cdots u_m)}_{m}\underbrace{\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}\sigma_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_m\end{matrix}}_{m} & O\end{array}\right)}_{n}\Big\}m$$

$$\Longleftrightarrow AV = U\Sigma$$

$$\Longleftrightarrow A = U\Sigma V^T$$ 特異値分解 (SVD ; singular value decomposition)

②,③より

$$(A^Tu_1 \cdots A^Tu_m) = (\sigma_1 v_1 \cdots \sigma_m v_m)$$

$$\Longleftrightarrow A^T\underbrace{(u_1 \cdots u_m)}_{m}\}^{n} = \underbrace{(\underbrace{v_1 \cdots v_m}_{m}\ v_{m+1} \cdots v_n)}_{n}\left(\begin{array}{c}\overbrace{\begin{matrix}\sigma_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_m\end{matrix}}^{m} \\ \hline O\end{array}\right)\begin{matrix}\}m \\ \\ \end{matrix}\Bigg\}n$$

$$\Longleftrightarrow A^TU = V\Sigma^T$$

$$\Longleftrightarrow A^T = V\Sigma^TU^T$$

$$\Longleftrightarrow A = U\Sigma V^T$$ SVD

逆に書くと.

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}\sigma_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_m\end{matrix} & O\end{array}\right) = U^TAV.$$

特異値標準形　　長方行列に対する ある種の対角化

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \cdots \geq \sigma_m \geq 0$$

(注) 普通は特異値を大きい順に並べる.

§ 特異値 と 固有値

$A = U\Sigma V^T$, $U^TU = I$, $V^TV = I$ より

$$B = A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T \overset{I}{\boxed{U^TU}} \Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^T\Sigma = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2\end{matrix} & O \\ \hline \underbrace{O}_{m} & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}\end{array}\right)}_{n} = V^TBV = V^T(A^TA)V$$

$B=A^TA$ の対角化

$$C = AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma \overset{I}{(V^TV)} \Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

$$\Leftrightarrow \Sigma\Sigma^T = \underbrace{\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2\end{pmatrix}}_{m}\Big\}m = U^TCU = U^T(AA^T)U$$

$C=AA^T$ の対角化

㊟ $B=A^TA$ の固有値 $\boxed{\lambda_1 = \overset{\nearrow 0}{\sigma_1^2},\ \lambda_2 = \overset{\nearrow}{\sigma_2^2},\ \cdots,\ \lambda_m = \overset{\nearrow}{\sigma_m^2}}$ $\lambda_{m+1} = 0, \cdots, \lambda_n = 0$

$C=AA^T$ の固有値 $\boxed{\lambda_1 = \sigma_1^2,\ \lambda_2 = \sigma_2^2,\ \cdots,\ \lambda_m = \sigma_m^2}$.

全て正　同じ

⇒ A の特異値 $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$, $\cdots$, $\sigma_m = \sqrt{\lambda_m}$.

非負のみをえらぶ。

B, C の固有値は全て非負 $\lambda_i = \sigma_i^2 \geq 0$.

㊟ $A : m\times n$

rank $A = r < m$ のとき、

(rank A^T = rank A)　$\dim \mathrm{Ker}\, A^T = \mathrm{null}\, A^T = m - r > 0$ ↳ である。

$A^Tu = 0$ の1次独立な解は $m-r$ 個ある。

$A^Tu = 0\cdot v$ より 特異値 $\sigma = 0$ が $m-r$ 個ある。

⇒ $\sigma_{r+1} = 0$, $\sigma_{r+2} = 0$, $\cdots$, $\sigma_m = 0$.

$$A = U\Sigma V^T = U\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \underbrace{\begin{matrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{matrix}}_{r} & O & O \\ \hline O & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} & O \\ \hline O & O & O \end{array}\right)}_{n} \begin{matrix}\}r \\ \\ \end{matrix}\Big\}m\Big\}n ,\quad r = \mathrm{rank}\, A$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

§ スペクトル分解

$A : m \times n$

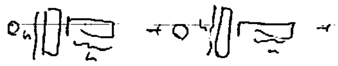
$A = U\Sigma V^T$

$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$ スペクトル分解

$A : n \times n$

$A = PDP^T$

$A = \lambda_1 p_1 p_1^T + \lambda_2 p_2 p_2^T + \cdots + \lambda_n p_n p_n^T$ スペクトル分解



§ ベクトルのノルム

$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ 上の数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ のベクトル

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ に対して、ノルム $\|x\|$ とは次のように定義される。

定義 次の(1),(2),(3)をみたす写像 $V \to \mathbb{R}$ をノルム(norm)と呼ぶ。

(1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in K$, $x \in V$.

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in V$.

例

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ 2乗ノルム, (ベクトルの)ユークリッドノルム

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ 絶対値ノルム

$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$ p乗ノルム

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|) = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$$ 最大値ノルム、

注 $x \in \mathbb{C}^n$ のとき $(\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i = x^* x$.

$x \in \mathbb{R}^n$ のとき $(\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = x^T x$.

注 $A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$ 複素共役, $x^* = (\overline{x})^T = \overline{(x^T)}$ 複素共役.

§ 行列ノルム

定義 次の(1)〜(4)をみたす写像 $A \mapsto \|A\| \in \mathbb{R}$ を行列ノルムと呼ぶ

(1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = O$.

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(4) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

例

行列ノルム　　ベクトルノルム

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

自然ノルム (natural norm), スペクトルノルム, 作用素ノルム (operator norm)

定理 $\|A\|_p$ は (1)〜(4) をみたす.

$\because$ (3) $\|A+B\|_p = \max\limits_{\|x\|_p=1} \|(A+B)x\|_p = \max\limits_{\|x\|_p=1} \|Ax + Bx\|_p \leq \max\limits_{\|x\|_p=1} (\|Ax\|_p + \|Bx\|_p)$

$\leq \max\limits_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p + \max\limits_{\|x\|_p=1} \|Bx\|_p = \|A\|_p + \|B\|_p$

定理

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$= \max_{j=1,\dots,n} \|a_j\|_1$$ ← 列ベクトルの絶対値ノルムの最大

$$A = (a_1\ a_2 \cdots a_n) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$= \max_{i=1,\dots,m} \|a^i\|_1$$ ← 行ベクトルの絶対値ノルムの最大

$\because$ $\|Ax\|_1 = \sum\limits_i \left|\sum\limits_j a_{ij} x_j\right| \leq \sum\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}||x_{ij}| = \sum\limits_j |x_j| \sum\limits_i |a_{ij}|$

$\leq \left(\sum\limits_j |x_j|\right)\left(\max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|\right) = \|x\|_1 \left(\max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|\right)$

$\|A\|_1 = \max\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$.

定理 $\|A\|_2 = \sigma_1$ ← Aの最大特異値.

ただし $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$

∵ $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$ とおく. ただし. $A = U \Sigma V^T$ とする.

$$Ax = c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + \cdots + c_n A v_n = c_1 \sigma_1 u_1 + c_2 \sigma_2 u_2 + \cdots + c_m \sigma_m u_m + c_{m+1} 0 + \cdots + c_n 0$$

$$(\|Ax\|_2)^2 = (c_1 \sigma_1 u_1 + \cdots + c_m \sigma_m u_m)^T (c_1 \sigma_1 u_1 + \cdots + c_m \sigma_m u_m)$$

$$= c_1^2 \sigma_1^2 + c_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + c_m^2 \sigma_m^2$$ ただし $\|u_i\| = 1,\ (u_i, u_j) = \delta_{ij}$

$$(\|x\|_2)^2 = (c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n)^T (c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \max_{c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1} \sqrt{c_1^2 \sigma_1^2 + \cdots + c_m^2 \sigma_m^2}$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1$$ (∵ $c_1 = 1, c_2 = 0, \cdots, c_n = 0$ のとき最大値をとる. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ より) □

定理 $A^T A = I$ のとき $\|A\|_2 = 1$

∵ $$(\|Ax\|_2)^2 = (Ax)^T (Ax) = x^T \underbrace{A^T A}_{I} x = x^T x = (\|x\|_2)^2$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|x\|_2 = 1$$ □

定理 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}$ のとき 全てのpで $\|A\|_p = \max_{i=1,\cdots,n} |a_{ii}|$

∵ $$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p = \max_{x_1^p + \cdots + x_n^p = 1} \sqrt[p]{|a_{11}|^p |x_1|^p + \cdots + |a_{nn}|^p |x_n|^p}$$

$|a_{11}|, \cdots, |a_{nn}|$ のうち $|a_{ii}|$ が最大であるとすると, $x_1^p = 0, x_1^p = 0, \cdots x_i^p = 1, \cdots x_n^p = 0$ のとき最大値をとる.

よって. $\|A\|_p = \sqrt[p]{|a_{ii}|^p} = |a_{ii}|$ となる. □

定理 A in $n \times n$, 正則のとき $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{1}{\lambda_n}$ ← 最小特異値(固有値)の逆数

ただし. $\begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \end{cases}$

定義 $$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Frobenius norm
フロベニウス・ノルム

行列のユークリッドノルム

定理 $\|A\|_F$ はノルムの(1)〜(4)の性質をみたす.

∵(4) $$(\|AB\|_F)^2 = \sum_i\sum_j\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \le \sum_i\sum_j\left(\sum_k |a_{ik}||b_{kj}|\right)^2$$
$$\le \sum_i\sum_j\left(\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_l |b_{lj}|^2\right) = \left(\sum_i\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_j\sum_l |b_{lj}|^2\right) = \|A\|_F^2\|B\|_F^2$$

定理 $$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_m^2}$$

∵ $$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^TA)} = \sqrt{tr(U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T)} = \sqrt{tr(V\Sigma^T\underbrace{U^TU}_{I}\Sigma V^T)}$$
$$= \sqrt{tr(V\Sigma^T\Sigma V^T)} = \sqrt{tr(\Sigma^T\Sigma\underbrace{VV^T}_{I})} = \sqrt{tr(\Sigma^T\Sigma)}$$
$$= \sqrt{tr\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1^2 & & & & & \\ & \sigma_2^2 & & & O & \\ & O & \ddots & & & \\ & & & \sigma_m^2 & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_m^2}$$

定理 $\|A\|_2 \le \|A\|_F$.

∵ $$\|A\|_2 = \sigma_1 \le \sqrt{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_m^2} = \|A\|_F$$

§ 行列のトレース

<u>行列のトレース</u> $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, $A: n\times n$.

定理
(1) $tr(A+B) = trA + trB$
(2) $tr\,A^T = tr\,A$
(3) $tr\,\alpha A = \alpha\, tr\,A$
(4) $tr\,AB = tr\,BA$.

定義

$A : n\times n$ 固有値の集合 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ← スペクトル (spectrum)

$A : m\times n$ 特異値の集合 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ ←

スペクトル半径 $\rho(A) = \max_{i=1..n} |\lambda_i|$

$$\rho(A) = \max_{i=1..m} \sigma_i$$

定理 $\|A\|_2 = \rho(A)$

∵ $\|A\|_2 = \sigma_1 = \rho(A) = \max(\sigma_1 \dots \sigma_m)$ ← ただし $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$. 証

定理 $\|A\|_p \geq \rho(A) \quad (p = 1, 2, \dots, \infty)$

定理 $\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$

∵ $\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \max \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \Leftrightarrow \|A\|_p \geq \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

$\Leftrightarrow \|A\|_p \|x\|_p \geq \|Ax\|_p$ 証

No.
Date

§条件数

定義 $A: n\times n$

$$\mathrm{cond}_p A = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$$ 条件数 (condition number)

例 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ のとき $\mathrm{cond}_p A = \dfrac{\max_i |a_{ii}|}{\min_i |a_{ii}|}$

$A^TA = I$ のとき $\mathrm{cond}_2 A = 1$

Aの特異値 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ のとき $\mathrm{cond}_2 A = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_n}$ ← 最大と最小の比

注 条件数の大きい行列のほど、多くの数値計算アルゴリズムで、数値誤差の拡大が起こりやすいことが知られている。

注 $\mathrm{cond}_p A \geq \dfrac{1}{\varepsilon_M}$ であるとき 悪条件 であるという。

ただし、ε_M はマシンイプシロン。 倍精度 $\varepsilon_M = 2^{-54} \simeq 10^{-15}\sim 10^{-16}$
単精度 $\varepsilon_M = 2^{-26} \simeq 10^{-7}\sim 10^{-8}$

No.
Date.

§ 一般逆行列

定義 $A : m \times n$

$$\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times m}{A^-}\,\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{A} \overset{\text{def}}{\iff} A^- : \text{一般逆行列 (generalized inverse)}$$

擬逆行列 (pseudo inverse)

注 ☆ $\operatorname{rank}(A) < n$ でもよい.

☆ 一意に定まるとは限らない.

☆ A：正則のとき $A^- = A^{-1}$.

定理 $y = Ax$ の解は $x = A^- y \iff AA^-A = A$ (Rao, 1962).

∵ ($\Leftarrow$). $AA^-A = A \Rightarrow \boxed{AA^-A\underset{y}{c}} = \boxed{\underset{y}{Ac}} \Rightarrow \boxed{A\underset{x}{\underline{A^-y}}} = y \Rightarrow x = A^-y$ は $Ax = y$ の解

($\Rightarrow$) $Ax = y,\ x = A^-y,\ y = Ac \Rightarrow AA^-Ac = Ac \Rightarrow AA^-A = A$

定義 $A : m \times n$

$$\left.\begin{array}{l} AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^* = AA^+,\ (A^+A)^* = A^+A \end{array}\right\} \overset{\text{def}}{\iff} \text{Moor-Penrose 形 一般逆行列}$$

定理 $y = Ax$ のとき $x = A^+y$ が解.

∵ $\left.\begin{array}{l} y = Ax \\ x = A^+y \end{array}\right\} \Rightarrow y = AA^+y \Rightarrow A^+y = A^+AA^+y = A^+y \Rightarrow A^+y = A^+y$.

定理 A^+ は一意に定まり, $(A^+)^+ = A$ が成立する. (Kalman, 1972)

No.
Date.

$\boxed{\text{定理}}$

$$\underset{n\times m}{A^{\dagger}} = \underset{n\times n}{V}\,\underset{n\times m}{\Sigma^{\dagger}}\,\underset{m\times m}{U^T}, \quad \Sigma^{\dagger} = \left.\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \frac{1}{\sigma_1} & & O \\ & \frac{1}{\sigma_2} & \\ O & \ddots & \frac{1}{\sigma_m} \end{matrix}\right\} m \\ \hline O \end{pmatrix}\right\} n.$$

ただし、$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U}\,\underset{m\times n}{\Sigma}\,\underset{n\times n}{V^T}$, $\Sigma = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \sigma_1 & O \\ O & \sigma_m \end{matrix}}_{m} & O \end{array}\right)}_{n}$

$$\text{∵}\quad AA^{\dagger}A = U\Sigma\overset{I}{(V^TV)}\Sigma^{\dagger}\overset{I}{(U^TU)}\Sigma V^T$$

$$= U\Sigma I\Sigma^{\dagger}I\Sigma V^T = U\Sigma\Sigma^{\dagger}\Sigma V^T = U\Sigma V^T = A$$

§ 例

例 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&6\end{pmatrix}$

$$B=A^TA=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&10&30\\10&5&15\\30&15&45\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}4&2&6\\2&1&3\\6&3&9\end{pmatrix}$$

$$C=AA^T=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\1&2\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&28\\28&56\end{pmatrix}=14\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$$

$$|C-\lambda I|=\begin{vmatrix}14-\lambda&28\\28&56-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-14)(\lambda-56)-28^2=\lambda^2-70\lambda+\cancel{4\times14^2}-\cancel{4\times14^2}$$

$$=\lambda^2-70\lambda=\lambda(\lambda-70)=0 \Rightarrow C\text{の固有値 }\lambda=0,70.$$

Aの特異値は $\sigma_1=\sqrt{70}$, $\sigma_2=0$ であり,

$\|A\|_2=\sigma_1=\sqrt{70}$, $\|A\|_F=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}=\sqrt{70+0}=\sqrt{70}$. を得る。

または, $\|A\|_F=\sqrt{2^2+1^2+3^2+4^2+2^2+6^2}=\sqrt{70}$ としても等しい.

例 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$

$$B=A^TA=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&5&-4\\-1&-4&5\end{pmatrix}$$

$$C=AA^T=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$$

$$|C-\lambda I|=\begin{vmatrix}6-\lambda&-3\\-3&6-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2-(-3)^2=\lambda^2-12\lambda+36-9=\lambda^2-12\lambda+27$$

$$=(\lambda-3)(\lambda-9)=0 \Rightarrow \lambda=3,9.$$

$$|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&5-\lambda&-4\\-1&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda-5)^2-4-4+(\lambda-5)+(\lambda-5)+16(\lambda-2)$$

$$=-(\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+25)+18\lambda-50$$

$$=-(\lambda^3+\boxed{10\lambda^2}-25\lambda+\boxed{2\lambda^2}-20\lambda+\cancel{50}+18\lambda-\cancel{50}$$

$$=-\lambda(\lambda^2-12\lambda+27)=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-9)=0 \Rightarrow \lambda=0,3,9$$

$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$ より Aの特異値は $\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{9} = 3 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3} \end{cases}$ となる

$\|A\|_2 = \sigma_1 = 3$ である.

$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$ であり,

$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{12}$ でも等しい.

特異ベクトルを求める.

$(C - \lambda I)x = 0$ より.

<u>$\lambda = 9$ のとき</u> $C - 9I = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>$\lambda = 3$ のとき</u> $C - 3I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(B - \lambda I)x = 0$ より

<u>$\lambda = 9$ のとき</u> $B - 9I = \begin{pmatrix} -7 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>$\lambda = 3$ のとき</u>

$B - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>$\lambda = 10$ のとき</u>

$B - 0I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aの特異値分解(SVD)は

$$A = U\Sigma V^T,\quad U = (u_1\ u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = (v_1\ v_2\ v_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる　に関するMoor-Penrose　㊟ u_1, u_2, v_1, v_2 の正負は $Av_i = \sigma_i u_i$ が成立するように選ぶ。

Aの一般逆行列は

$$A^+ = V\Sigma^+U^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$ $(AA^+)^T = AA^+$, $(A^+A)^T = A^+A$ が成立する

$Ax = y$ の解の1つは $x = A^+y$ である. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$ となる.

一方. $Ax = y$ の解を簡約化して求めると

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & y_1 \\ 1 & -2 & 1 & y_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \end{array}\right)$ より. $x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる.

$c = -\frac{1}{3}y_1$ のとき. $x = A^+y$ と一致する. これは $\|x\|$ が最小となるときである,

$\|x\|^2 = (c + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2)^2 + (c + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2)^2 + c^2$ より

$\frac{\partial\|x\|^2}{\partial c} = 3c + y_1 = 0$ を求めると $c = -\frac{y_1}{3}$ のとき極小値をとる.

㊟ 方程式 $Ax = y$ は任意性があり一意には定まらない.
$x = A^+y$ は $\|x\|_2^2$ が最小となるときの解である.

$c = \frac{a}{3}y_1 + \frac{b}{3}y_2$ とおくと.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ c + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (a+2)y_1 + (b+1)y_2 \\ (a+1)y_1 + (b-1)y_2 \\ ay_1 + by_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = A^{-}\boldsymbol{y},\ A^{-} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

と表される。このとき

$$AA^{-}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

をみたすので A^{-} は A の一般逆行列である.

㊟ a, b は任意であるから, A の一般逆行列 A^{-} は一意には定まらない.

問 A^{-} が $A^{-}AA^{-} = A^{-}$, $(AA^{-})^T = AA^{-}$, $(A^{-}A)^T = A^{-}A$ をみたすときの a, b の条件を定めよ.

問6 $\boldsymbol{x} = A^{-}\boldsymbol{y}$ のノルム $\|\boldsymbol{x}\|_2$ が最小となる a, b を定めよ.

∵ $\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \frac{1}{9}\left\{((a+2)y_1 + (b+1)y_2)^2 + ((a+1)y_1 + (b-1)y_2)^2 + (ay_1 + by_2)^2\right\}$ より

$$\frac{\partial \|\boldsymbol{x}\|_2^2}{\partial a} = \frac{2}{3}y_1\{(a+1)y_1 + by_2\} = 0$$
$$\frac{\partial \|\boldsymbol{x}\|_2^2}{\partial b} = \frac{2}{3}y_2\{(a+1)y_1 + by_2\} = 0$$

となるので $a = -1,\ b = 0$ のとき $\|\boldsymbol{x}\|_2^2$ は極小値を持ち最小値をとる。 図

No.
Date.

§ 正規行列

定義 $A : n \times n$

$$A^*A = AA^* \overset{def}{\Longleftrightarrow} A : \text{正規行列 (normal matrix)}$$

定義 $A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$: 共役転置

例

エルミート行列 $A^* = A$
(Hermite matrix)

$$∵ \left.\begin{array}{l} A^*A = AA = A^2 \\ AA^* = AA = A^2 \end{array}\right\}$$

歪エルミート行列 $A^* = -A$
(skew Hermite matrix)

$$∵ \left.\begin{array}{l} A^*A = -AA = -A^2 \\ AA^* = -AA = -A^2 \end{array}\right\}$$

ユニタリー行列 $A^*A = AA^* = I$.
(unitary matrix)

∵ 明らか

対称行列 $A^T = A$
(symmetrix mat.)

$$∵ \left.\begin{array}{l} A^*A = A^TA = AA = A^2 \\ AA^* = AA^T = AA = A^2 \end{array}\right\}$$

歪対称行列 (skew sym. mat.)
交代行列 (alternative mat.)
$\Big\}$ $A^T = -A$.

$$∵ \left.\begin{array}{l} A^*A = A^TA = AA = -A^2 \\ AA^* = AA^T = -AA = -A^2 \end{array}\right\}$$

直交行列 $A^TA = AA^T = I$.
(Orthogonal matrix)

$$∵ \left.\begin{array}{l} A^*A = A^TA = I \\ AA^* = AA^T = I \end{array}\right\}$$

定理 $A^*A = AA^* \Longrightarrow$ 異なる固有値の固有ベクトルは直交.

定理 $A^*A = AA^* \Longrightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = U^*AU$, U : ユニタリー行列

または
$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = U^TAU$; U : 直交行列

§ 正定値

定義 $A : n \times n,\ x \in \mathbb{C}^n$

$$h(x;A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j = x^* A x = (x, Ax) \in \mathbb{R}$$

エルミートの2次形式 (Hermite quadratic)

定義 $x, y \in \mathbb{C}^n$

内積 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = x^* y \in \mathbb{R}$

注 A：エルミート行列 $\Rightarrow \overline{h(x)} = h(x)$

定義

$h(x;A) > 0 \overset{\text{def}}{\iff} A$：正定値 (positive-definite)

$h(x;A) \geq 0 \iff A$：非負定値 (nonnegative-)，半正定値 (positive-semidefinite)

$h(x;A) < 0 \iff A$：負定値 (negative-definite)

$h(x;A) \leq 0 \iff A$：非正定値 (nonpositive-)，半負定値 (positive-semidefinite)

定理 A：エルミート行列，対称行列．

$$h(x;A) > 0 \iff \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \cdots, \lambda_n > 0.$$

(∵) Aはユニタリー行列で対角化できるので，$A\mathbb{p}_i = \lambda_i \mathbb{p}_i$，$(\mathbb{p}_i, \mathbb{p}_j) = \delta_{ij}$ として．
$x = c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_n\mathbb{p}_n$ とおく．このとき
$Ax = c_1 A\mathbb{p}_1 + \cdots + c_n A\mathbb{p}_n = c_1\lambda_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_n\lambda_n \mathbb{p}_n$ であり
$h = (x, Ax) = (c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_n\mathbb{p}_n,\ c_1\lambda_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbb{p}_n) = \sum_i\sum_j \lambda_j \overline{c_i} c_j (\mathbb{p}_i, \mathbb{p}_j)$
$= \sum_j \lambda_j |c_j|^2 = \lambda_1|c_1|^2 + \cdots + \lambda_n|c_n|^2$

となる．$|c_1^2|, \cdots, |c_n|^2$ は任意の実数であるから，$h > 0$ となるのは．
$\lambda_1 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$ のときのみである．

注 エルミート行列，対称行列の固有値はすべて実数

$\boxed{\text{定理}}$ $\begin{cases} A : m\times n \\ B = \underset{m\times n,\ n\times n}{A^*A} : n\times n \end{cases}$ は $\begin{cases} B : \text{正定値} \\ B : \text{エルミート行列} \end{cases} \Longleftrightarrow$ Bの固有値は全て正.

$\because$ $h = (x, Bx) = x^*Bx = x^*A^*Ax = (\underset{y}{\boxed{Ax}})^*(\underset{y}{\boxed{Ax}}) = y^*y = (y, y) = \|y\|^2 > 0$.

$\Longleftrightarrow$ Bの固有値は正. 図

$\boxed{\text{定理}}$ A : n×n, 正規行列, 正定値

$\Longrightarrow$ 固有値分解と特異値分解は一致.

$\because$ SVD : $\underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{U}\underset{n\times n}{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}}\underset{n\times n}{V^*}$.

$A^*A = AA^*$ より $B = A^*A$ と $C = AA^*$ の固有値, 固有ベクトルは同じであるから $U = V$ となる. よって

$A = U\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}U^*$ であり, これは固有値分解である. 図