線形代数学 II(2)(近藤)
中間試験

(注意)　**問 1〜問 8 に関して答えのみを解答欄に記入せよ．**　$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ **の内積：標準的な内積** $(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\overline{\boldsymbol{y}}$，　$\mathbb{R}[x]_n$ **の内積：**$(f\,,\,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$

問 1.　**次の 2 つのベクトルが直交するように a を定めよ．**(10 **点**)

(1) $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\a\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$　(2) $\begin{bmatrix}1+i\\-2-i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3-i\\a+i\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$　(3) $\begin{bmatrix}2\\-1\\a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a\\-2\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$　(4) $1-x,\ 2a+x\ \in \mathbb{R}[x]_1$

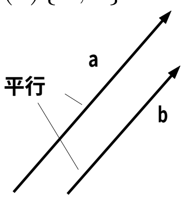
問 2.　**次の部分集合 W が部分空間である場合は解答欄に○を記入し，部分空間ではない場合は解答欄に×を記入せよ．**(5 **点**)

(1) $\mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 - x_2 = 0 \right\}$　(2) $\mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\}$　(3) $\mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$

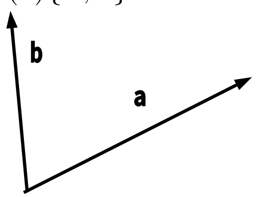
(4) $\mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \right\}$　(5) $\mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_1-c_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

問 3.　**次のベクトルの組が 1 次独立な場合は解答欄に○を記入し，1 次従属な場合は解答欄に×を記入せよ．ただし，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底とする．**(15 **点**)

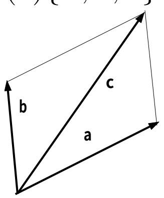
(1)$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in \mathbb{R}^2$



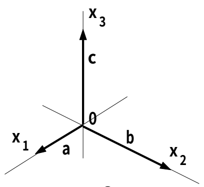
(2)$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in \mathbb{R}^2$



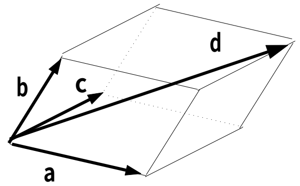
(3)$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \in \mathbb{R}^2$



(4)$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \in \mathbb{R}^3$



(5)$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\} \in \mathbb{R}^3$



(6)

$\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\7\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

(7)

$\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}3\\2\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$

(8)

$\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}1\\0\\2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}$

(9) $\mathbb{R}^3 \ni \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$$

(10) $\mathbb{R}^3 \ni \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$$

問 4. **次の解空間** W **を求めよ．**(10 **点**)

(1) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0\}$ (2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ (**記入例**) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

問 5. $\mathbb{R}^3$ **の基底** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ **を正規直交化し基底** Σ **を求めよ．また，**Σ **におけるベクトル** $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **の座標を求めよ．**(15 **点**)

問 6. **次の写像が線形写像である場合は解答欄に○を記入し，線形写像ではない場合は解答欄に×を記入せよ．**(5 **点**)

(1) **点** $\boldsymbol{x}$ **から原点** $\boldsymbol{0}$ **に関して点対称な点** $\boldsymbol{y}$ **への変換** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$**．** (2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ y = f(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2$

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}$ (4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} |x_1| \\ 0 \end{bmatrix}$ (5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y} = f(x) = \begin{bmatrix} 2x \\ 3x \end{bmatrix}$

問 7. **次の写像の核，像，退化次数，階数を求めよ．また，正則である場合は解答欄に○を記入し，そうではない場合は×を記入せよ．**(15 **点**)

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(5) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

問 8. **次の線形写像の基底** Σ **における表現行列を求めよ．**(25 **点**)

(1) **原点** O **と点** $\boldsymbol{x}$ **を通る直線上にあり，原点** O **からの距離が** 3 **倍となる点** y **への変換．ただし，基底は標準基底** $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ **とする．**

(2) $\boldsymbol{x}$ **から** $x_1 x_2$ **平面に関して対称な点** $\boldsymbol{y}$ **への変換．ただし，基底は標準基底** $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ **とする．**

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **は条件** $f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix}$ **をみたす．ただし，基底は標準基底** $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ **とする．**

(4) $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2; F(f(x)) = 2f'(x) + 3f(x)$**．ただし，基底は** $\Sigma = \{1, x, x^2\}$ **とする．**

(5) $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2; F(f(x)) = 2f'(x) + 3f(x)$**．ただし，基底は** $\Sigma = \{1 + x, x + x^2, 1 - 2x^2\}$ **とする．**