解析学I（担当:近藤） #7
2007年6月7日

[I]　巾級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は $r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ が存在するとき
$|x| < r$ において絶対収束することを示せ.

[II]　次の巾級数の収束半径を求めよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$　(4) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}x^n$

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n\,(x-1)^n$　(6) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x+2)^n$　(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$　(9) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,x^n$　(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} x^n$

[III]　関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ が与えられたとし,
テイラー級数の係数 c_n を導出せよ.

[IV]　関数 $f(x)$ に関して点 $x = 0$ まわりでのテイラー級数とその収束半径を求めよ.

(1) $f(x) = e^x$　(2) $f(x) = \sin x$　(3) $f(x) = \cos x$