微分方程式

§常微分方程式

定義 (常微分方程式)　$\left(y'=\frac{dy}{dx}, y''=\frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}\right)$
関数 $y=y(x)$ とその導関数 $y', y'', \cdots$ の間に関係式

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$$

があるとき，この式を常微分方程式 (ordinary differential equation) という
または，単に微分方程式 (differential equation) という
導関数のうち最高階のものが $y^{(n)}$ のとき，n 階の微分方程式という． n を階数 (order) という．
微分方程式をみたす関数 $y(x)$ のことを解 (solution) という
(参) 偏導関数を含む場合は，偏微分方程式 (partial differential equation) という

例 (微分方程式の次数の具体例)

$y''-y=x$ ← 2階の微分方程式
$2yy'''-(y')^2=-4x$ ← 3階 〃
$3y'-y=\sin x$ ← 1階 〃

注　x は独立変数 (dependent variable)，y は従属変数 (independent variable) または未知関数 (unknown function)

注　独立変数が複数個の場合を偏微分方程式という．

注　微分方程式をみたす未知関数を求めることを解く (solve) または積分する (integrate) という．

注　方程式 $x^2-2x+1=0$ を解くと解は $x=1$ である．
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　数
方程式 $f(x)=0$ の解を $\underbrace{\text{根 (root)}}_{\text{関数 } f(x) \text{ の}}$ という

微分方程式 $y'=xy$ の未知関数 $y=y(x)$ を求める．
方程式を解くと解は $y=ce^{\frac{x^2}{2}}$ である．

注　x　$\boxed{\text{関数 } y}$　y　$\Leftrightarrow y=y(x)$

$\boxed{例}$ (微分方程式の解を考える)

微分方程式 $y'=x$ を考える. この方程式の解を求める.

まず

(1) $\quad y=y(x)=\frac{1}{2}x^2$

とおく. これを方程式へ代入すると

$$左辺=y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=x=右辺$$

となり, (1) は方程式の解となる.

次に,

(2) $\quad y=y(x)=\frac{1}{2}x^2+C$

とおく. ここで C は任意の定数とする. このとき方程式へ代入すると.

$$左辺=y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)=x+0=x=右辺$$

となり, これもまた解となる.

(!) 微分方程式の解には任意性が含まれる.

$x=0$ のとき $y(0)=1$ をみたす解を考える. (2) より $x=0, y(0)=1$ を代入して.

$$1=y(0)=\frac{1}{2}\times0^2+C \rightarrow C=1$$

を得る. よって $(x,y)=(0,1)$ を通る微分方程式の解は

$$y=\frac{1}{2}x^2+1$$

となる.

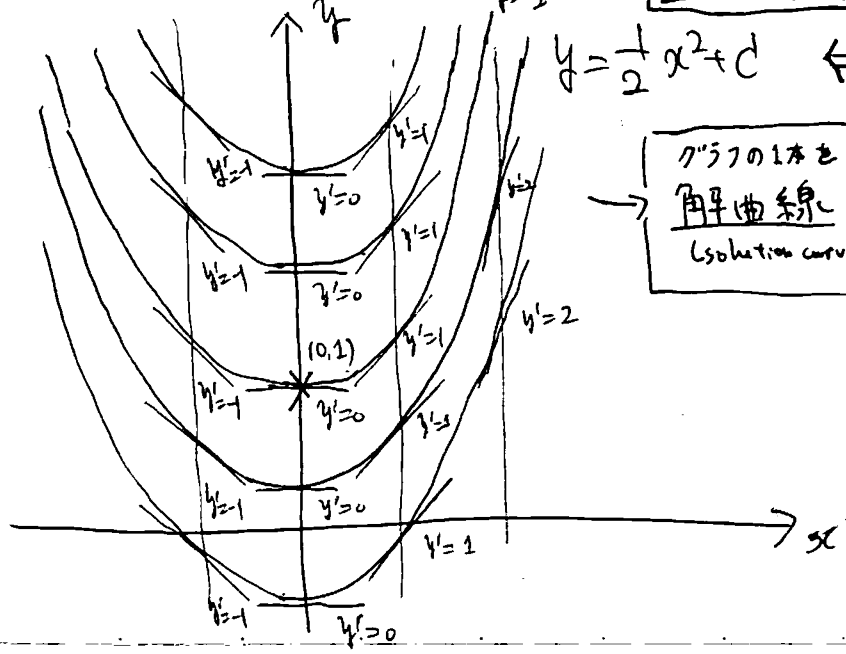
$y=\frac{1}{2}x^2+1$ ⇐ $\boxed{特殊解\quad 点(0,1)を通る解}$

$y=\frac{1}{2}x^2+C$ ⇐ $\boxed{一般解}$ 任意定数を含む

1パラメータ族 (one-parameter family)

||

全ての解曲線を含む解



→ グラフの1本を 解曲線 (solution curve) または 積分曲線 (integral curve) という.

定義 (初期条件, 一般解, 特殊解)

任意定数を含む解を一般解 (general solution) という.

{一般解から得られない解を特異解 (singular solution) という.

解に条件

$$x=x_0,\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ y''(x_0)=y_2,\ \cdots,\ y^{(n)}(x_0)=y_n$$

を課すとき, これを初期条件 (initial condition) という.

$(x_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を初期値 (initial value) という

任意定数を含まない, ある特別な条件のもとでの解を

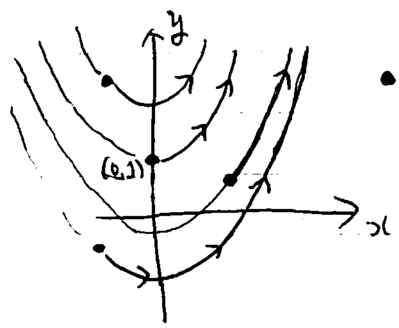
特殊解 (particular solution) という.
特解または

{ある初期値に対して特解を求める問題を初期値問題 (initial value problem) という.

例 (一般解, 特殊解の具体例)

微分方程式 $y'=x$ の一般解は $y=\frac{1}{2}x^2+C$ (C:任意定数) である.

初期条件 $x=0, y(0)=1$ のもとでの特殊解は $y=\frac{1}{2}x^2+1$ である.



• ~ 初期値.

§ 変数分離型常微分方程式

定義 (変数分離型)

常微分方程式が

$$y'=f(x)g(y)$$

の形をしているとき変数分離型であるという.

例 (変数分離型の具体例)

$y'=x$

$y'=\sin x$

$y'=y$

$y'=xy$

$y'=y(1-y)$

例 (変数分離型微分方程式の計算例)

(1) $y' = x$.

両辺を x で積分すると

$$\int y'\,dx = \int x\,dx$$

を得る. 両辺をそれぞれ計算すると

$$\text{左辺} = \int y'\,dx = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int dy = y + \tilde{C} \quad (\tilde{C}\text{: 任意定数})$$

$$\text{右辺} = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{\tilde{C}} \quad (\tilde{\tilde{C}}\text{: 任意定数})$$

となる. 任意定数をまとめて $C = \tilde{\tilde{C}} - \tilde{C}$ とおくと一般解として

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C\text{: 任意定数})$$

を得る.

(2) $y' = \sin x$

両辺を x で積分すると

$$\int y'\,dx = \int \sin x\,dx$$

を得る. 両辺をそれぞれ計算すると

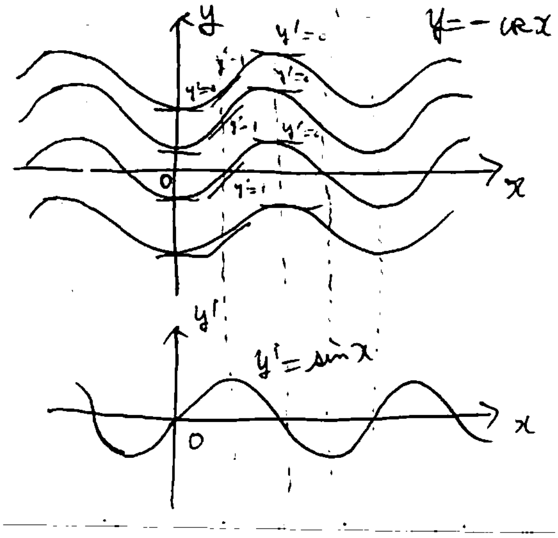
$$\text{左辺} = \int y'\,dx = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int dy = y + \tilde{C} \quad (\forall \tilde{C} \in \mathbb{R})$$

$$\text{右辺} = \int \sin x\,dx = -\cos x + \tilde{\tilde{C}} \quad (\forall \tilde{\tilde{C}} \in \mathbb{R})$$

となる. まとめると一般解として

$$y = -\cos x + C \quad (C\text{: 任意定数})$$

を得る.



$\boxed{\text{例}}$ (変数分離型)

微分方程式 $y' = y$ を考える.

方程式を変形して

$$\frac{y'}{y} = 1$$

とする. 両辺を x で積分すると,

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int dx.$$

となる. 両辺をそれぞれ計算すると.

$$\text{左辺} = \int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y| + \tilde{c}$$

$$\text{右辺} = \int dx = x + \tilde{\tilde{c}}$$

となる. これらより

$$\log|y| + \tilde{c} = x + \tilde{\tilde{c}}$$

$$\to \log|y| = x + \tilde{\tilde{\tilde{c}}} \quad (\text{ただし } \tilde{\tilde{\tilde{c}}} = \tilde{\tilde{c}} - \tilde{c})$$

$$\to |y| = e^{x + \tilde{\tilde{\tilde{c}}}} = e^{\tilde{\tilde{\tilde{c}}}} \times e^{x}$$

$$\to y = \pm e^{\tilde{\tilde{\tilde{c}}}} e^{x}$$

となる. ここで $c = \pm e^{\tilde{\tilde{\tilde{c}}}}$ とおくと. c は $c \neq 0$ をみたす任意定数である.

よって 解は

$$y = ce^{x} \qquad (0 \neq {}^{\forall}c \in \mathbb{R})$$

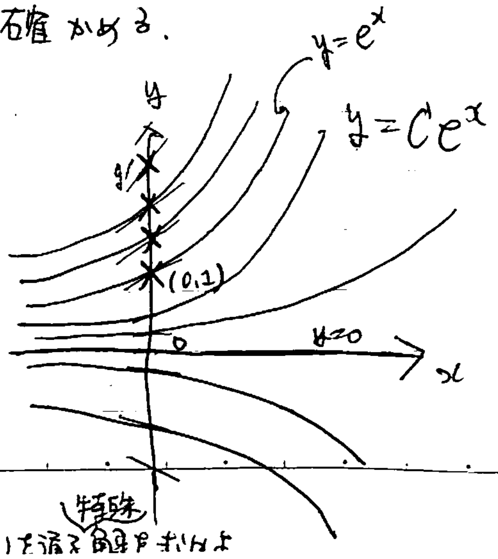
と表される.

更に $c=0$ のとき. すなわち $y=0$ が解となるか確かめる.

$y=0$ を $y'=y$ へ代入すると. これはみたされる.

よって一般解として

$$y = ce^{x} \qquad (c: \text{任意定数})$$



を得る. 初期条件 $x=0$, $y(0)=1$ をみたす解を考える.

代入すると $c=1$ を得る. よって特殊解として

$$y = e^{x}$$

を得る.

$\boxed{\text{問}}$ 点 $(x,y) = (0,1), (0,2), (0,3), \cdots (0,n)$ を通る特殊解を求めよ

$\boxed{例}$ (変数分離型)

微分方程式 $y' = xy$ を考える。

方程式を変形して

$$\frac{y'}{y} = x$$

とする。両辺をxで積分して、

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int x\, dx$$

となる。両辺をそれぞれ計算すると、

$$左辺 = \int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y| + \tilde{C}$$

$$右辺 = \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{\tilde{C}}$$

となる。これらをまとめて

$$\log|y| + \tilde{C} = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{\tilde{C}}$$

$$\to \log|y| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad (c = \tilde{\tilde{C}} - \tilde{C})$$

$$\to |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c} = e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\to y = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

となる。 $\pm e^c$ を C とおきかえると、

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

を得る。ただし $C \neq 0$ となる任意定数である。

$C=0$ のとき、すなわち $y=0$ も解となるので、結局、一般解として

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad (C: 任意定数)$$

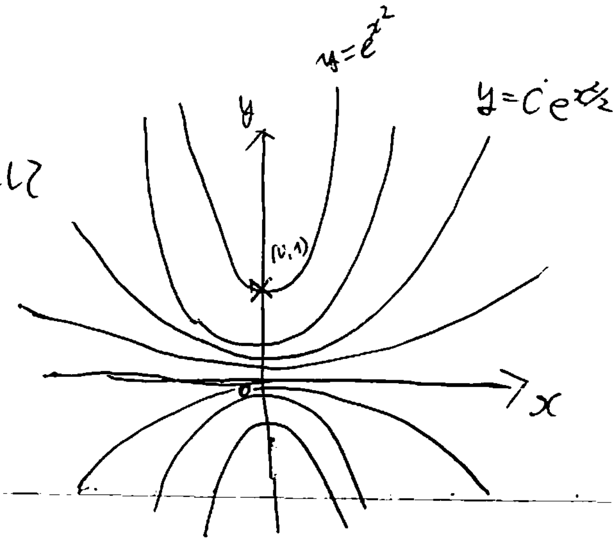
を得る。

初期条件 $x=0, y(0)=1$ をみたす解を考える。

代入すると $C=1$ を得る。よって特殊解として

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

を得る。



$\boxed{問}$ 点 $(x,y) = (0,1), (0,2), (0,3), \cdots, (0,n)$ を通る特殊解を求めよ。

$\boxed{\text{例}}$ (変数分離型)

微分方程式 $y' = y(1-y)$ を考える.

方程式を変形して

$$\frac{y'}{y(1-y)} = 1$$

とする両辺を積分して計算する.

$$\int \frac{y'}{y(1-y)}\,dx = \int dx$$

$$\text{左辺} = \int \frac{y'}{y(1-y)}\,dx = \int \frac{1}{y(1-y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{dy}{y(1-y)}$$

$$= \int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right)dy = \log|y| - \log|1-y| + C$$

$$= \log\left|\frac{y}{1-y}\right| + C$$

$$\text{右辺} = \int dx = x + C$$

これらをまとめると.

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{x+C} = e^C e^x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-y} = \pm e^C e^x = Ce^x$$ (ここで $\pm e^C \to C$ とおきかえた. $C \neq 0$ とする)

逆数をとり $\Rightarrow$ $\frac{1}{y} - 1 = \frac{1}{Ce^x} = C^{-1}e^{-x} = Ce^{-x}$ (ここで $C^{-1} \to C$ とおきかえた. $C \neq 0$ とする)

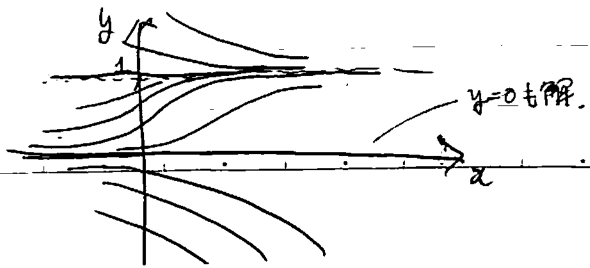
$$\Rightarrow \frac{1}{y} = 1 + Ce^{-x}$$

逆数をとり $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{1+Ce^{-x}}$ (ただし $C \neq 0$)

を得る. $C=0$ のとき すなわち $y=1$ のときも解となる. よって一般解として

$$y = \frac{1}{1+Ce^{-x}}$$

を得る.



まとめ （変数分離型）

変数分離型常微分方程式

$$y' = f(x)g(y)$$

は変形して x で積分すると

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C'$$

となる．この積分が計算できれば，関数 $y(x)$ が定まる．

例 （変数分離型の応用例）

微分方程式 $y' = x + y$ を考える．これは変数分離型ではない．

これを変形して変数分離型にする．まず

$$z = z(x) = x + y(x)$$

とおく．これを両辺 x で微分すると

$$z' = 1 + y'$$

となる．よって $y' = z' - 1$ と表せる．$y = z - x$ とともに方程式に代入すると

$$z' - 1 = z$$

となる．これを変形する．

$$\Rightarrow z' = z + 1$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{z+1} = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{z'}{z+1} dx = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z+1} = \int dx$$

$$\Rightarrow \log|z+1| = x + c$$

$$\Rightarrow z + 1 = ce^x \quad (c \neq 0)$$

$$\Rightarrow z = -1 + ce^x$$

これで z についての解を得る．y についてもどすと

$$x + y = -1 + ce^x$$

$$\Rightarrow y = -1 - x + ce^x \quad (\forall c \neq 0)$$

を得る．$c = 0$ のとき，すなわち $y = -1 - x$ も解となるので一般解として

$$y = -1 - x + ce^x \quad (c：任意定数)$$

を得る．

$\boxed{\text{問}}$ (変数分離型)

次の微分方程式の一般解を求めよ.

また $\underbrace{x=\frac{1}{2},\ y(\tfrac{1}{2})=1}_{\text{初期条件}}$ をみたす特殊解を求めよ. さらには解を図示せよ.

(1) $y'=x^2y$

(2) $xy'+y=2xy$

(3) $y'=\dfrac{y}{x(x+1)}$

(4) $y'=\dfrac{1+y}{1-x}$

(5) $y'=x+2y-1$ (ヒント) $z=z(x)=x+2y(x)-1$

(6) $y'=e^{x+y}-1$ (ヒント) $z=z(x)=x+y(x)$

例 (変数分離型)

方程式 $y' = x(1-y)$ の一般解を求める.

$$\Rightarrow \frac{y'}{1-y} = x \Rightarrow \int \frac{y'}{1-y}dx = \int x\,dx \Rightarrow -\log|1-y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\Rightarrow 1-y = \pm e^{-\frac{x^2}{2}-C} = \pm e^{-C}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = 1 \mp e^{-C} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ここで $-(\pm)e^{-C} \to C$ とおきかえる. ただし $C \neq 0$ である.

$$\Rightarrow y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}} \quad (C \neq 0)$$

$C=0$ も含む C が任意の場合を考える. $y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}\ (\forall C \in \mathbb{R})$ とする.

これを方程式に代入すると,

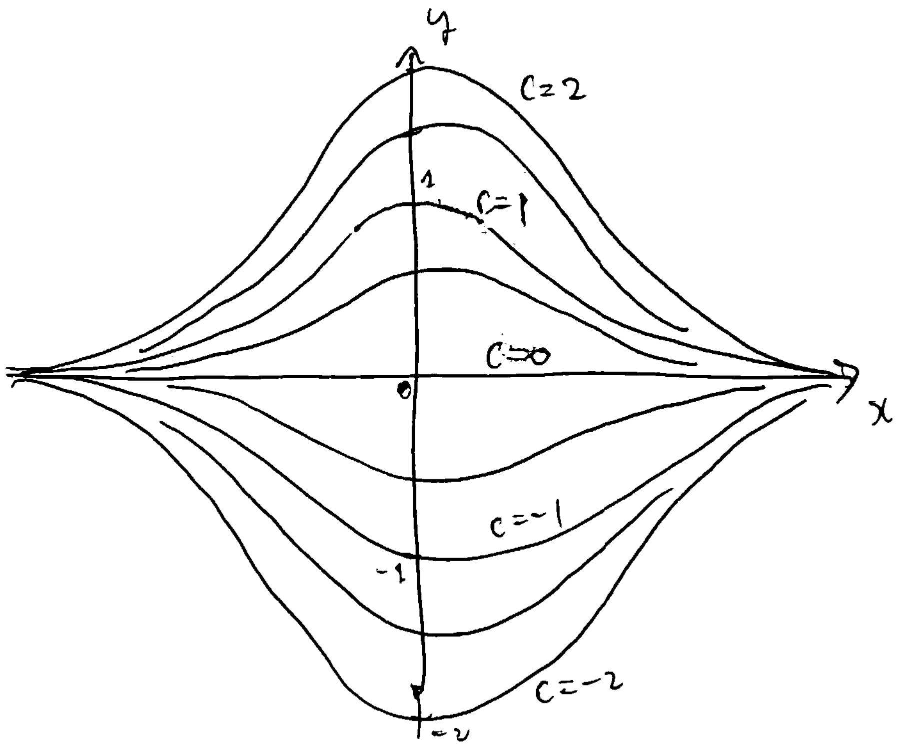
$$(\text{左辺}) = y' = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' Ce^{-\frac{x^2}{2}} = -xCe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$(\text{右辺}) = x(1-y) = x(\cancel{1}-\cancel{1}-Ce^{-\frac{x^2}{2}}) = -xCe^{-\frac{x^2}{2}}$$

であり, 恒等的に成立する. よって一般解は

$$y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

である.



$\boxed{\text{例1}}$ (変数分離型)

方程式 $y'+\nu y=g$ (定数: $\nu, g \neq 0$) の一般解をもとめる.

$y'=g-\nu y$

$\dfrac{y'}{g-\nu y}=1$

$\displaystyle\int\frac{y'}{g-\nu y}dx=\int dx$

$-\dfrac{1}{\nu}\log|g-\nu y|=x+C$

$\log|g-\nu y|=-\nu(x+C)$

$g-\nu y=\pm e^{-\nu x}\cdot e^{-\nu C}$

$\nu y= g\mp e^{-\nu C}\cdot e^{-\nu x}$

$y=\dfrac{g}{\nu}\mp\dfrac{e^{-\nu C}}{\nu}\cdot e^{-\nu x}$

ここで $\mp\dfrac{e^{-\nu C}}{\nu}\to c\ (\neq 0)$ とおく.

$y=\dfrac{g}{\nu}+c\,e^{-\nu x}\quad (c\neq 0)$

ここで $c=0$ も含む c が任意の場合も考える. $\forall c\in\mathbb{R}$ として方程式に代入すると.

$(\text{左辺})=y'+\nu y$

$=-\nu c\,e^{-\nu x}+\nu\cdot\left(\dfrac{g}{\nu}+c\,e^{-\nu x}\right)$

$=\cancel{-\nu c\,e^{-\nu x}}+g+\cancel{\nu c\,e^{-\nu x}}$

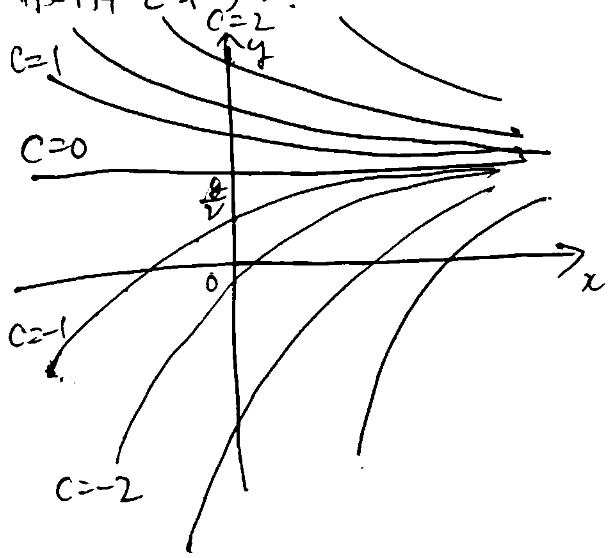
$=g\ =(\text{右辺})$

となり恒等的に成立する.

よって一般解は

$y=\dfrac{g}{\nu}+c\,e^{-\nu x}\quad(\forall c\in\mathbb{R})$

である.



例 (変数分離型)

方程式 $y'=\alpha(1-y)^2$ の一般解を求める.

$$\int \frac{y'}{(1-y)^2}dx = \int \alpha\, dx$$

$$\frac{1}{1-y} = \alpha x + C$$

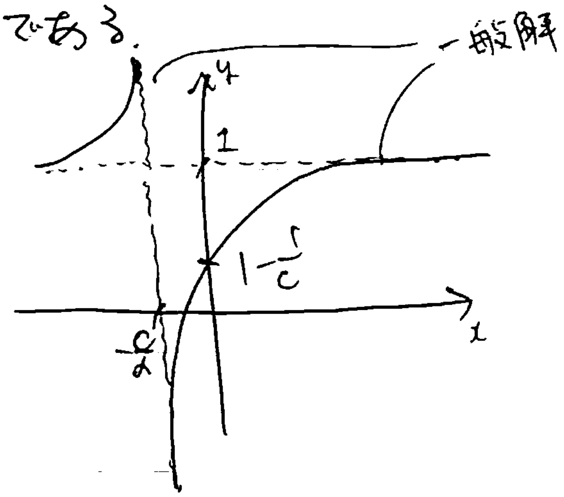
$$1-y = \frac{1}{\alpha x + C}$$

$$y = 1 - \frac{1}{\alpha x + C}$$

一般解は

$$y = 1 - \frac{1}{\alpha x + C} \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

である.



$y=1$ (定数関数) と解を仮定する.
方程式に代入すると

(左辺) $= y' = 0$

(右辺) $= \alpha(1-y) = \alpha(1-1) = 0$

であるから, $y=1$ も解である.

この解は一般解のCをどのようにとっても実現できない解である.
一般解に含まれない解を
<u>特異解</u> (<u>singular solution</u>) という.

例 (変数分離型)

方程式 $y' = 1-y^2$ の一般解を求める.

$$\int \frac{y'}{1-y^2}\,dx = \int dx$$

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2}\int\left(\frac{y'}{1-y} + \frac{y'}{1+y}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\log|1-y| + \log|1+y|\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C$$

$$(\text{右辺}) = x + C.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + C$$

$$\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = 2(x+C)$$

$$\frac{1+y}{1-y} = \pm e^{2C}\cdot e^{2x}$$

$\pm e^{2C} \to C\ (\neq 0)$ とおきかえる.

$$\frac{1+y}{1-y} = Ce^{2x}$$

$$1+y = Ce^{2x}(1-y)$$

$$(1+Ce^{2x})y = -1+Ce^{2x}$$

$$y = \frac{-1+Ce^{2x}}{1+Ce^{2x}} = 1 - \frac{2}{1+Ce^{2x}}.$$

ここで $C=0$ も含む任意の C とする.

方程式に代入すると

$$(\text{左辺}) = y' = \frac{4Ce^{2x}}{(1+Ce^{2x})^2}$$

$$(\text{右辺}) = 1-y^2 = 1-\left(1-\frac{2}{1+Ce^{2x}}\right)^2$$

$$= 1-1+\frac{4}{1+Ce^{2x}} - \frac{4}{(1+Ce^{2x})^2}$$

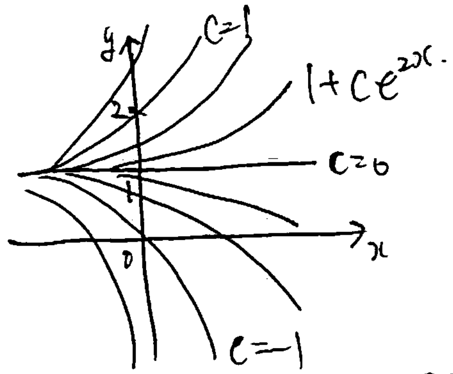
$$= \frac{4Ce^{2x}}{(1+Ce^{2x})^2} = (\text{左辺})$$

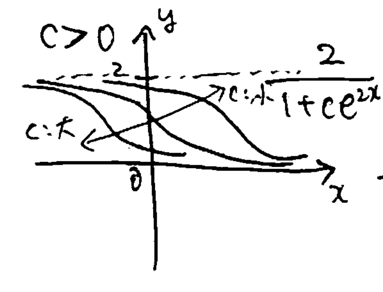
よって一般解は

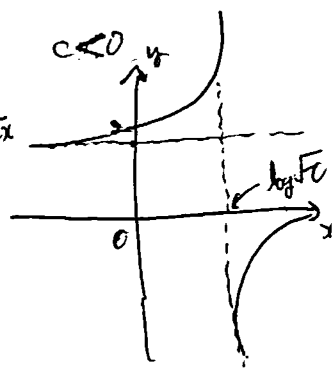
$$y = 1 - \frac{2}{1+Ce^{2x}} \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

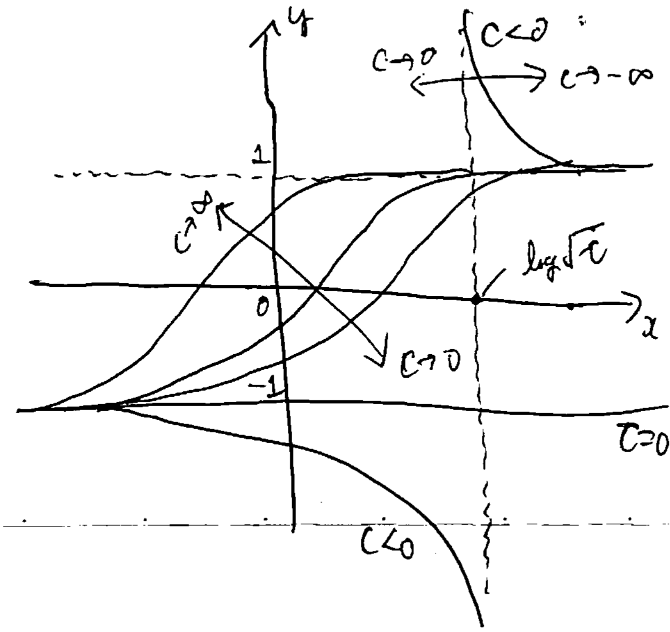
である.

問 $y = \dfrac{1+Ce^{-2x}}{1-Ce^{-2x}}$ も一般解であることを確認せよ. また, C をおきかえて上記の解と一致させよ.









§ 同次有理式型1階常微分方程式

$$y' = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + a_2 x^{m-2} y^2 + \cdots + a_m y^m}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + b_2 x^{m-2} y^2 + \cdots + b_m y^m} = R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$P(x,y)$ ← m次同次多項式

$Q(x,y)$ ← m次同次多項式

$R(x,y)$：有理式

↑ xとyについて全てm次の項の有理式

分子, 分母を x^m で割ると

$$y' = \frac{a_0 + a_1 \frac{y}{x} + a_2 \frac{y^2}{x^2} + \cdots + a_m \frac{y^m}{x^m}}{b_0 + b_1 \frac{y}{x} + b_2 \frac{y^2}{x^2} + \cdots + b_m \frac{y^m}{x^m}} = R\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})}$$

となる. ここで $z = \frac{y}{x}$ とおく. $y = xz$ より

$$y' = z + xz'$$

であることを用いると.

$$z + xz' = R(1, z)$$

$$\Rightarrow z' = \frac{R(1,z) - z}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{P(1,z) - zQ(1,z)}{Q(1,z)}$$

を得る. これは変数分離型である. よって

$$\int \frac{Q(1,z)}{P(1,z) - zQ(1,z)} dz = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

と表される. 左辺の積分が可能であれば解が求まる.

例（同次型）

微分方程式 $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ の解を求める。

右辺の分子，分母を x で割ると

$$y' = \frac{1+y/x}{1-y/x}$$

となる。$z = y/x$ とおく。$y = xz$ より

$$y' = z + xz'$$

となることを用いると，

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z}$$

を得る。変形すると，

$$xz' = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+\cancel{z}-\cancel{z}+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}.$$

$$\Rightarrow \frac{1-z}{1+z^2} z' = \frac{1}{x}.$$

となる。両辺を x で積分すると，

$$\int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

を得る。左辺を計算すると

$$\text{左辺} = \int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{z}{1+z^2} dz = \int \frac{dz}{1+z^2} - \frac{1}{2}\int \frac{(1+z^2)'}{1+z^2} dz.$$

$$= \arctan z - \frac{1}{2}\log\Big|\underbrace{1+z^2}_{>0}\Big|$$

となる。まとめると

$$\arctan z - \frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log|x| + C$$

$$\arctan z = \frac{1}{2}\log(1+z^2)|x|^2 + C$$

$$\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x^2 + C$$

$$\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\log(\underbrace{x^2+y^2}_{>0}) + C$$

を得る。以上より一般解 $y(x)$ は

$$\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C \qquad (C;\text{任意定数})$$

により定義される陰関数として与えられる。

問 (同次型)
次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y' = -\dfrac{x+2y}{y}$

(2) $y' = \dfrac{2x-y}{x}$

(3) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$

(4) $y' = \dfrac{y^2-x^2}{xy}$

極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ に変換する.

$$\arctan\left(\frac{\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r}\cos\theta}\right) = \frac{1}{2}\log(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) + C$$

$$\arctan\tan\theta = \frac{1}{2}\log r^2 + c$$

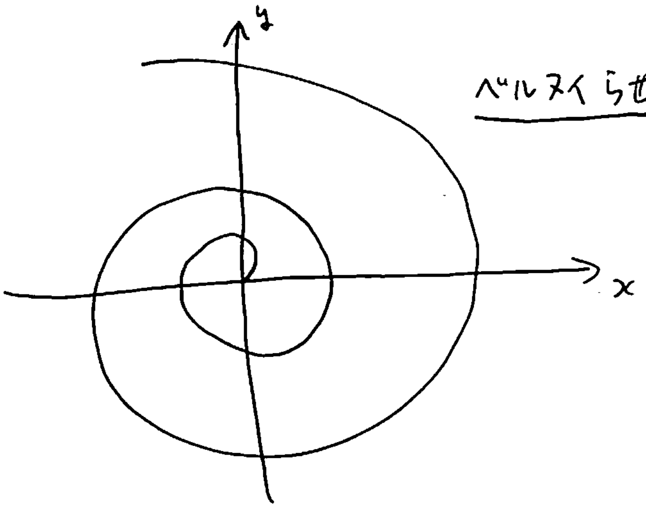
$$\theta = \log r + C$$

$$\theta - c = \log r$$

$$r = e^{-c}\cdot e^{\theta}$$

$e^{-c} \to c$ $\qquad r = ce^{\theta}$

よって一般解を極座標で表すと $r = ce^{\theta}$ である.



ベルヌイらせん (Bernoulli spiral)

1周すると r は $e^{2\pi}$ 倍となる.

問 (相似)
あるCの解を原点を中心に
α倍した相似な図形も
解であることを示せ.
すなわち $\begin{cases} x \to \alpha x \\ y \to \alpha y \end{cases}$ とおきかえても解である
ことを示せ.

例 (同次型)

方程式 $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ の一般解を求める.

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

ここで $u = \dfrac{y}{x}$ とおく.

$y = xu$ を微分すると.

$$y' = x'u + xu' = u + xu'$$

である. 代入すると.

$$u + xu' = \frac{2u}{1-u^2}$$

$$xu' = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{2u - u + u^3}{1-u^2} = \frac{u+u^3}{1-u^2} = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}$$

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} u' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right)du = \log|x| + C$$

$$\log|u| - \log|1+u^2| = \log|x| + C$$

$$\log\left|\frac{u}{1+u^2}\right| = \log|x| + C$$

$$\frac{u}{1+u^2} = \pm e^{\log|x|}\cdot e^C = \pm|x|e^C = \pm e^C x$$

$\pm e^C \to C\ (\neq 0)$ とおきかえると,

$$\frac{u}{1+u^2} = Cx.$$

$u = \dfrac{y}{x}$ を代入すると

$$\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = Cx$$

$$\frac{\cancel{x}y}{x^2+y^2} = C\cancel{x}$$

$$y = C(x^2+y^2)$$

$$x^2+y^2-C^{-1}y = 0.$$

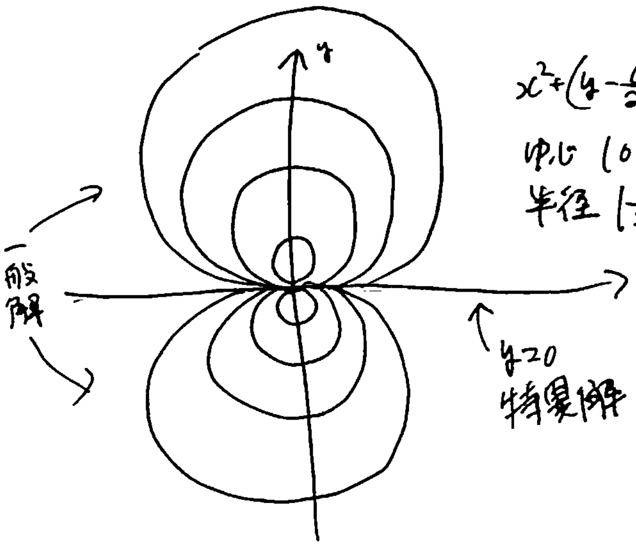
$C^{-1} \to C\ (\neq 0)$ とおきかえると

$$x^2+y^2-Cy = 0.$$

一般解は

$$x^2+y^2-Cy = 0 \quad (C \neq 0)$$

で定まる陰関数 $y = y(x)$ である.



$x^2+\left(y-\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2$

中心 $\left(0, \frac{C}{2}\right)$ で半径 $\left|\frac{C}{2}\right|$ の円.

また, $y=0$ という解を考える. 代入すると.

(左辺) $= y' = 0$

(右辺) $= \dfrac{2\cdot 0\cdot 0}{0^2-0^2} = \dfrac{0}{0}$ ← 不定形.

方程式を $y'(x^2-y^2) = 2xy$ と書き換える.

(左辺) $= y'(x^2-y^2) = 0\cdot(0^2-0^2) = 0$

(右辺) $= 2\cdot xy = 2\cdot 0\cdot 0 = 0.$

成立する. $y=0$ は解である.

問 (相似) (α:定数)

$x \to x\alpha,\ y \to y\alpha$ とおきかえても解であることを示せ.

$\boxed{例}$ (同次型)

方程式 $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ の一般解を求めよ.

$$y' = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

$u = \dfrac{y}{x}$ とおく. $y = xu$ より $y' = u + xu'$

代入すると.

$$u + xu = \frac{1+u^2}{2u}$$

$$xu = \frac{1+u^2}{2u} - u = \frac{1+u^2-2u^2}{2u}$$

$$= \frac{1-u^2}{2u}$$

$$\frac{2u}{1-u^2}u' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{2u}{1-u^2}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\log|1-u^2| = \log|x| + C$$

$$\log|1-u^2| = -\log|x| - C$$

$$1-u^2 = \pm e^{-C} \cdot e^{-\log|x|}$$

$\pm e^{-C} \to c\ (\neq 0)$ とおきかえる.

$$1-u^2 = c\,e^{-\log|x|} = c\,e^{\log|x^{-1}|}$$

$$= c\left|\frac{1}{x}\right| = \pm c\frac{1}{x}$$

$\pm c \to c\ (\neq 0)$ とおきかえる

$$1-u^2 = \frac{c}{x}$$

$u = \dfrac{y}{x}$ を代入する

$$1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x}$$

$$x^2 - y^2 = cx$$

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

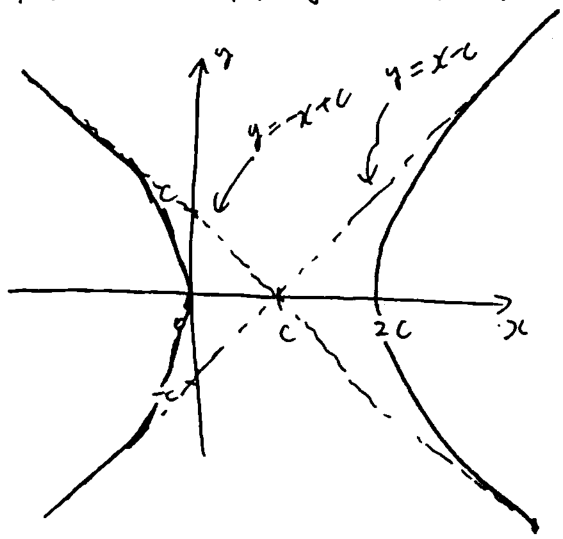
$\dfrac{c}{2} \to c\ (\neq 0)$ とおきかえる.

$$(x-c)^2 - y^2 = c^2.$$

よって一般解は

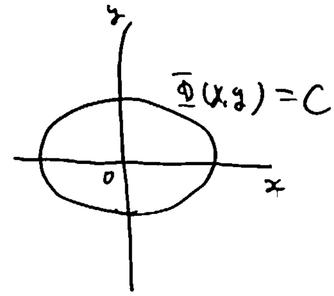
$$(x-c)^2 - y^2 = c^2 \quad (c \neq 0)$$

で定まる陰関数 $f(x)$ である.



(問) 原点を中心に定数倍した図形も解であることを示せ.

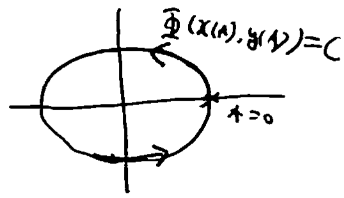
§ 完全微分型



微分方程式の一般解 $y(x)$ の解曲線は

$$(\star) \qquad \Phi(x,y) = C \qquad (C: 任意定数)$$

と表されることも多い。この場合の方程式の型を考える。
y は x を独立変数とし $(\star)$ で定まる陰関数である。
ここで、x, y を対等に扱い、別の独立変数 t を用いてパラメータ表示されるとする。つまり



$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

とおく。$(\star)$ に代入すると

$$\Phi(x(t), y(t)) = C$$

である。両辺を t で微分すると、

$$\frac{d}{dt}\Phi(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}C$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Phi_x + \Phi_y \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Phi_x + \Phi_y y' = 0$$

となる。よって、$(\star)$ で定まる陰関数 $y(x)$ を一般解としてもつ方程式は

$$\Phi_x + \Phi_y y' = 0 \iff y' = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$$

の形をしている。微分形式で表すと、

$$d\Phi(x,y) = \Phi_x dx + \Phi_y dy = 0$$

である。

$\boxed{\text{例}}$（完全微分型）

$$y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$$ の一般解を求める.

完全微分型であると仮定して

$$y' = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}, \quad \begin{cases} \Phi_x = ax+by & \cdots ① \\ \Phi_y = bx+cy & \cdots ② \end{cases}$$

とおく. まず, 矛盾してないか確認する.

①をyで偏微分した Φ_{xy} と

②をxで 〃 Φ_{xy} は等しくなる

必要がある.

①より $\Phi_{xy} = (ax+by)_y = b$

②より $\Phi_{xy} = (bx+cy)_x = b$

両者は等しいので必要条件はみたす.

次に, Φ を求める.

①をyは定数として, xで積分すると

$$\Phi = \int (ax+by)\,dx = \frac{ax^2}{2} + bxy + f(y) \cdots ③$$

である. $f(y)$ はyのみの任意関数である.

②をxは定数として, yで積分すると

$$\Phi = \int (bx+cy)\,dy = bxy + \frac{cy^2}{2} + g(x) \cdots ④$$

である. $g(x)$ はxのみの任意関数である.

③, ④を比較すると,

$$\frac{ax^2}{2} + \cancel{bxy} + f(y) = \cancel{bxy} + \frac{cy^2}{2} + g(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = \dfrac{cy^2}{2} \\ g(x) = \dfrac{ax^2}{2} \end{cases}$$

である. よって Φ は

$$\Phi = \frac{ax^2}{2} + bxy + \frac{cy^2}{2}$$

である.

以上より一般解は

$$y' = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y} \Leftrightarrow \Phi_x + \Phi_y y' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\Phi(x(t), y(t))$$

$$\Leftrightarrow \Phi(x,y) = C' \quad \text{(任意定数)}$$

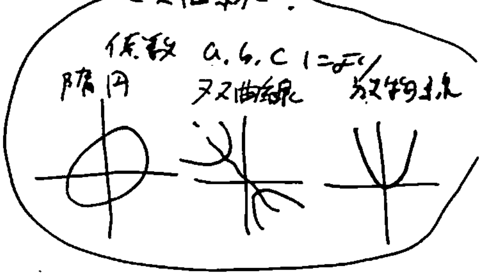
$$\Phi = \frac{ax^2}{2} + bxy + \frac{cy^2}{2} = C'$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2C'$$

$2C' \to C$ とおきかえると,

$$\underbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2C.}_{\text{2次曲線}}$$

と定まる.



$\boxed{\text{例}}$ (完全微分型)

$y' = -\dfrac{y+\cos x}{x}$ の一般解を求める.

$y' = -\dfrac{\Phi_x}{\Phi_y}$, $\begin{cases} \Phi_x = y+\cos x & \text{—①} \\ \Phi_y = x & \text{—②} \end{cases}$ と仮定する.

①より

$\Phi_{xy} = (y+\cos x)_y = 1$

②より $\Phi_{xy} = (x)_x = 1$

必要条件はみたす.

① を x で積分して

$\Phi = \int (y+\cos x)\,dx$

$= xy + \sin x + f(y)$ —③

② を y で積分して

$\Phi = \int x\,dy$

$= xy + g(x)$. —④

③④を比較して

$\cancel{xy} + \sin x + f(y) = \cancel{xy} + g(x)$

$\Rightarrow \begin{cases} f(y) = 0 \\ g(x) = \sin x \end{cases}$

Φ は

$\Phi = xy + \sin x$.

である. よって一般解は

$xy + \sin x = C$ (C:任意定数)

で定まる陰関数 $y(x)$ である.

$\boxed{\text{例}}$ (完全微分型)

$y' = \dfrac{y}{x}$ を解く.

$-y + xy' = 0$. —(a)

$\Phi_x = -y$, $\Phi_y = x$ とおく.

$\hookrightarrow$ $\Phi_{xy} = -1$, $\Phi_{xy} = 1$ となり一致しない.

(a) を y^2 で割る.

$-\dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y^2} y' = 0$.

$\Phi_x = -\dfrac{1}{y}$, $\Phi_y = \dfrac{x}{y^2}$ とおく.

$\Phi_{xy} = \dfrac{1}{y^2}$ $\quad$ $\Phi_{xy} = \dfrac{1}{y^2}$ となり必要条件を満たす

$\Phi = \int \left(-\dfrac{1}{y}\right) dx = -\dfrac{x}{y} + f(y)$.

$\Phi = \int \left(\dfrac{x}{y^2}\right) dy = -\dfrac{x}{y} + g(x)$.

よって $\Phi = -\dfrac{x}{y} = C$ が解である.

$\boxed{例}$（完全微分型）

$$y' = -\frac{x^2-2xy^3}{3x^2y^2}$$

$\Rightarrow$ $x^2-2xy^3+3x^2y^2y'=0$

$(x^2-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$ — (ア)

まず,

$$\begin{cases} \Phi_x = x^2-2xy^3 & \text{— ①} \\ \Phi_y = 3x^2y^2 & \text{— ②} \end{cases}$$ と仮定する.

① より $\Phi_{xy} = (x^2-2xy^3) = -6xy^2$

② より $\Phi_{xy} = (3x^2y^2)_x = 6xy^2$

となり 必要条件は成立しない.

そこで (ア) の両辺に関数 μ を掛ける

$\mu(x^2-2xy^3)dx+\mu(3x^2y^2)dx=0$

このとき

$$\begin{cases} \Phi_x = (x^2-2xy^3)\mu & \text{— ③} \\ \Phi_y = 3x^2y^2\mu & \text{— ④} \end{cases}$$

と仮定する.

③ より $\Phi_{xy} = \{(x^2-2xy^3)\mu\}_y$
$= -6xy^2\mu+(x^2-2xy^3)\mu_y$

④ より $\Phi_{xy} = \{(3x^2y^2)\mu\}_x$
$= 6xy^2\mu+3x^2y^2\mu_x$

これより

$(x^2-2xy^3)\mu_y = 12xy^2\mu+3x^2y^2\mu_x$ — (イ)

(イ) をみたす関数 μ をみつける.
$\underbrace{}_{1つでいいから}$

たとえば $\mu_y=0$ と仮定する.

(イ) より $3x^2y^2\mu_x = -12xy^2\mu$

$$\frac{\mu_x}{\mu} = -\frac{4}{x}$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu} = -\int\frac{4dx}{x}$$

$$\log|\mu| = -4\log|x|+C$$

$$\therefore \mu = \frac{C}{x^4}$$

よって $\mu = \dfrac{1}{x^4}$ と選ぶ.

③,④ より

$$\begin{cases} \Phi_x = \dfrac{x^2-2xy^3}{x^4} = \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2y^3}{x^3} & \text{— ⑤} \\ \Phi_y = \dfrac{3x^2y^2}{x^4} = \dfrac{3y^2}{x^2} & \text{— ⑥} \end{cases}$$

である.

⑤ より

$$\Phi = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{x}+\frac{y^3}{x^2}+f(y)$$

⑥ より

$$\Phi = \int\frac{3y^2}{x^2}dy$$
$$= \frac{y^3}{x^2}+g(x)$$

これらを比較すると.

$f(y)=0$, $g(x)=-\dfrac{1}{x}$

となる. よって

$$\Phi = \frac{y^3}{x^2}-\frac{1}{x}$$

を得る. 解曲線は $\Phi=C$（任意定数）であるので

$$\frac{y^3}{x^2}-\frac{1}{x} = C$$

$\Longrightarrow$ $y^3-x = Cx^2 \quad (\forall C\in\mathbb{R})$

と求まる.

例 (完全微分型)

$(x^2y+y^2e^y)dx+\left(-\frac{x^3}{3}+xy^2e^y\right)dy=0$.

まず, $\begin{cases}\Phi_x = x^2y+y^2e^y & \text{—①}\\ \Phi_y = -\frac{x^3}{3}+xy^2e^y & \text{—②}\end{cases}$

① より $\Phi_{xy} = (x^2y+y^2e^y)_y = x^2+2ye^y+y^2e^y$

② より $\Phi_{xy} = \left(-\frac{x^3}{3}+xy^2e^y\right)_x = -x^2+y^2e^y$

となり必要条件は成立しない.

そこで $\begin{cases}\Phi_x = (x^2y+y^2e^y)\mu & \text{—③}\\ \Phi_y = \left(-\frac{x^3}{3}+xy^2e^y\right)\mu & \text{—④}\end{cases}$

とおく.

③ より $\Phi_{xy} = (x^2+2ye^y+y^2e^y)\mu + (x^2y+y^2e^y)\mu_y$

④ より $\Phi_{xy} = (-x^2+y^2e^y)\mu + \left(-\frac{x^3}{3}+xy^2e^y\right)\mu_x$

2式より

$(2x^2+2ye^y)\mu+(x^2y+y^2e^y)\mu_y = \left(-\frac{x^3}{3}+xy^2e^y\right)\mu_x$.

$\mu_x=0$ と仮定すると.

$2\cancel{(x^2+ye^y)}\mu + y\cancel{(x^2+ye^y)}\mu_y=0$

$2\mu+y\mu_y=0$

$\frac{\mu_y}{\mu}=\frac{-2}{y}$

$\int\frac{d\mu}{\mu}=-2\int\frac{dy}{y}$

$\log|\mu| = -2\log|y|+C$

$\mu=\frac{c}{y^2}$

よって $\mu=\frac{1}{y^2}$ と選ぶ.

③, ④ より

$\begin{cases}\Phi_x = \frac{x^2}{y}+e^y & \text{—⑤}\\ \Phi_y = -\frac{x^3}{y^2}+xe^y & \text{—⑥}\end{cases}$

⑤ より

$\begin{cases}\Phi = \frac{x^3}{3y}+xe^y+f(y)\\ \Phi = \frac{x^3}{3y}+xe^y+g(x)\end{cases}$

比較すると $f(y)=0,\ g(x)=0$.

よって.
$$\Phi=\frac{x^3}{3y}+xe^y$$

である. 一般解は

$$x^3+3xye^y=cy$$

となる.

$\boxed{例}$ (完全微分型)

$(y^3+y^2)dx + xy\,dy = 0.$

$$\begin{cases} \Phi_x = (y^3+y^2)\mu & \text{—①} \\ \Phi_y = xy\mu & \text{—②} \end{cases}$$

と仮定する.

①より

$$\Phi_{xy} = \{(y^3+y^2)\mu\}_y$$
$$= (3y^2+2y)\mu + (y^3+y^2)\mu_y$$

②より

$$\Phi_{xy} = (xy\mu)_x$$
$$= y\mu + xy\mu_x$$

これらより

$$(3y^2+y)\mu + (y^3+y^2)\mu_y = xy\mu_x$$

である. ここで

$$\mu = x^m y^n$$

と仮定する.

$$(3y^2+y)x^m y^n + (y^3+y^2)(n x^m y^{n-1}) = xy(m x^{m-1} y^n)$$

$$x^m y^{n+2} + x^m y^{n+1} + n x^m y^{n+2} + n x^m y^{n+1} = m x^m y^{n+1}$$

$$x^m y^{n+1}\{3y + 1 + ny + n - m\} = 0$$

$$x^m y^{n+1}\{(3+n)y + (n-m+1)\} = 0$$

よって $\begin{cases} n+3=0 \\ n-m+1=0 \end{cases}$

をみたす必要がある. これを解くと

$$n=-3,\ m=-2$$

である. よって $\mu = \dfrac{1}{x^2y^3}$ と選ぶ.

①,②より

$$\begin{cases} \Phi_x = \dfrac{y^3+y^2}{x^2y^3} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2y} & \text{—③} \\ \Phi_y = \dfrac{xy}{x^2y^3} = \dfrac{1}{xy^2} & \text{—④} \end{cases}$$

③より

$$\Phi = \int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2y}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{xy} + f(y)$$

④より

$$\Phi = \int\frac{dy}{xy^2} = -\frac{1}{xy} + g(x)$$

比較すると

$$\Phi = -\frac{1}{x} - \frac{1}{xy}$$

を得る. よって

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} = C$$

$$\Rightarrow\ y + 1 = Cxy$$

$$\Rightarrow\ (1-Cx)y = -1$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{-1}{1-Cx} = \frac{1}{Cx-1}$$

以上より一般解は

$$y = \frac{1}{Cx-1} \quad (C:任意定数)$$

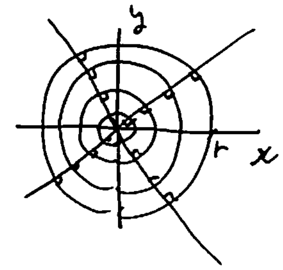
である.

§ 直交曲線族

曲線族 $f(x,y;m)=0$ のすべての曲線に直交する
曲線族 $g(x,y;c)=0$ を直交曲線族(orthogonal trajectory family)
という.

$\boxed{例}$ (直交曲線族)

同心円からなる曲線族 $x^2+y^2=r^2$ の ☆
直交曲線族を求める.



円上の点(x,y)における傾きは☆をxで微分して

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$$

より定まる. 直交曲線族$g(x,y;c)$の点(x,y)における傾きをy'とする.
このとき. y'と$-\frac{x}{y}$は直交するので

$$y'\times\left(-\frac{x}{y}\right)=-1 \quad — \text{#}$$

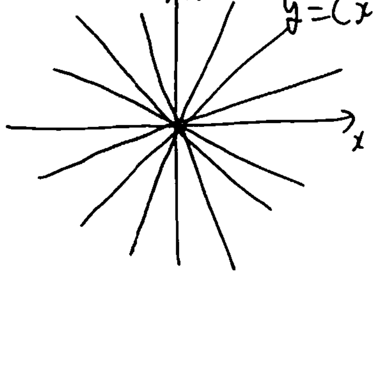
と条件をかす. この微分方程式を解く.

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \log|y|=\log|x|+C \Rightarrow y=Cx$$

とすまる. よって同心円の直交曲線族は

$$y=Cx \quad (C:任意定数)$$

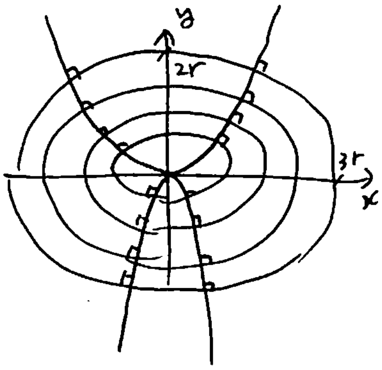
である.



例（直交曲線族）

曲線族

$$\left(\frac{x}{3r}\right)^2+\left(\frac{y}{2r}\right)^2=1 \quad \text{── ☆}$$



点 (x, y) における傾きは ☆ より

$$\frac{2x}{9r^2}+\frac{2yy'}{4r^2}=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{4x}{9y}$$

である. 直交曲線上の点を (x, y) とし
その点の傾きを y' とする. 条件は

$$y'\times\left(-\frac{4x}{9y}\right)=-1$$

である. この微分方程式を解く.

$$\frac{y'}{y}=\frac{9}{4x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\frac{9}{4}\int\frac{dx}{x}$$

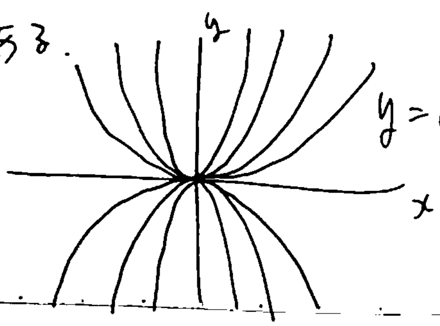
$$\Rightarrow \log|y|=\frac{9}{4}\log|x|+C$$

$$\Rightarrow y=Cx^{\frac{9}{4}}=Cx^2\sqrt{x}$$

よって直交曲線族は

$$y=Cx^2\sqrt{x} \quad (C:\text{任意定数})$$

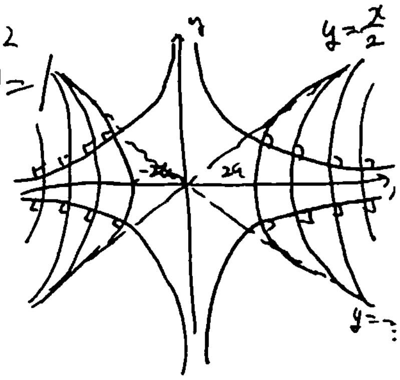
である.



例（直交曲線族）

曲線族.

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^2-\left(\frac{y}{a}\right)^2=1 \quad \text{── ☆}$$



(☆) の傾きは

$$\frac{2x}{4a^2}-\frac{2yy'}{a^2}=0 \Rightarrow y'=\frac{x}{4y}$$

である. よって条件式は

$$y'\times\left(\frac{x}{4y}\right)=-1.$$

となる. これを解く.

$$\frac{y'}{y}=-\frac{4}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=-4\int\frac{dx}{x}$$

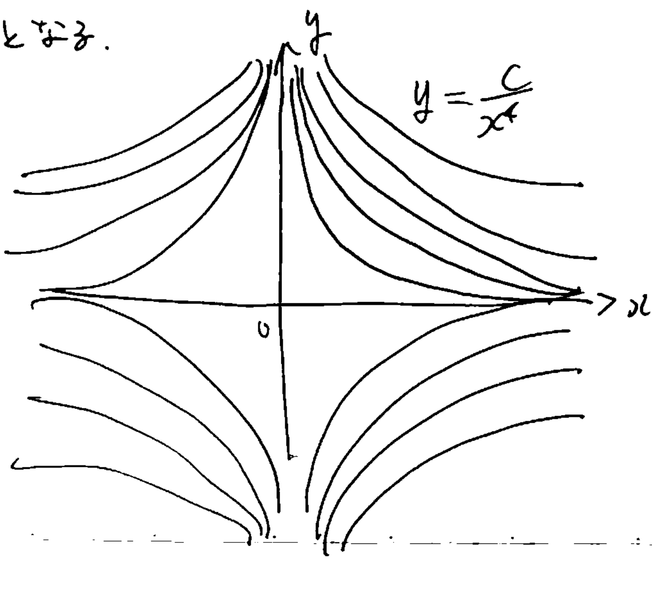
$$\Rightarrow \log|y|=-4\log|x|+C$$

$$\Rightarrow y=\frac{C}{x^4}$$

よって直交曲線族は

$$y=\frac{C}{x^4} \quad (C:\text{任意定数})$$

となる.



§ 線形常微分方程式

定義

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)\,y'+p_0(x)\,y=q(x).$$

n階線形常微分方程式 (n-th order linear ODE)

$q(x)=0$ のとき 同次形 (homogeneous)
$q(x)\neq 0$ のとき 非同次形 (inhomogeneous)

係数 $p_{n-1}(x),\cdots,p_0(x)$ が全て定数係数 $p(x)a_{n-1}=a_{n-1},\cdots,p_0(x)=a_0$ のとき

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=q(x)$$

を定数係数線形常微分方程式という.

定理

同次線形ODEが解 $u(x),v(x)$ をもつとき
$\alpha u(x)+\beta v(x)$ $(\forall\alpha,\forall\beta\in\mathbb{R})$ もまた解となる.

(証明)

$$y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1y'+p_0y=0$$

$$\underbrace{\left(\frac{d^n}{dx^n}+p_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+p_1\frac{d}{dx}+p_0\right)}_{\parallel \atop L \ \leftarrow\ \text{微分演算子}}y=0$$

$$Ly=0.$$

$u(x),v(x)$ を解とすると

$$Lu=0,\quad Lv=0$$

が成り立つ. このとき

L は線形演算子.

$$L(\alpha u+\beta v)=L(\alpha u)+L(\beta v)=\alpha L(u)+\beta L(v)=0+0=0$$

より, $\alpha u+\beta v$ もまた解である.

∎

注意 同次線形ODEの解の集合はベクトル空間となる.

§ 定数係数線形常微分方程式

同次定数係数 ODE

$$(\star)\quad y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$$

特性多項式

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

$\varphi(\lambda)$ の根を $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ とする.
このとき

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \cdots,\ e^{\lambda_n x}$$

は $(\star)$ の解となる. これを基本解という.
$(\star)$ の一般解は

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+c_ne^{\lambda_n x}$$

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n:\text{任意定数})$$

と表される.

0 n 階 ODE の一般解は n 個の任意定数をもつ.

注意

$\varphi(\lambda)$ が重根をもつときは基本解を変更する.
λ を $\varphi(\lambda)$ の m 重根とするとき, 対応する m 個の基本解を

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \cdots,\ x^{m-1}e^{\lambda x}$$

と変更する.

注意

$\varphi(\lambda)$ の根 λ が複素数のときは $e^{\lambda x}$ は複素関数となる.
このとき任意定数 c もまた複素数と考えて, 一般解全体で実関数となるように調整する.

注意

n 個の基本解は 1次独立な関数である

$\boxed{例1}$

(☆) $y'' + y' - 6y = 0$

解として $y = e^{\lambda x}$ と仮定する．代入すると

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$
$$(\lambda+3)(\lambda-2) = 0$$
$$\therefore\ \lambda = \lambda_1 = -3,\quad \lambda = \lambda_2 = 2$$

を得る．よって一般解は

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R})$$

$$\therefore\ y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

となる．

初期条件 $(y(0), y'(0)) = (1, 1)$ をみたす特殊解を求める．

一般解より

$$y'(x) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 x}$$

となる．条件より

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y(0) \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = y'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

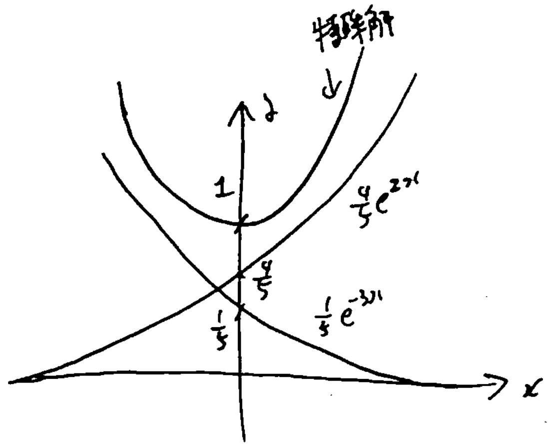
$$\Rightarrow c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y(0) & 1 \\ y'(0) & \lambda_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_2 y(0) - y'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2\times 1 - 1}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y(0) \\ \lambda_1 & y'(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{y'(0) - \lambda_1 y(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1-(-3)\times 1}{2-(-3)} = \frac{4}{5}$$

となるので特殊解は

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{4}{5}e^{2x}$$

となる．



例1

(☆) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

$y = e^{\lambda x}$ と仮定する. (☆) へ代入すると.

$$(e^{\lambda x})'' + 4(e^{\lambda x})' + 4(e^{\lambda x}) = 0$$

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 4)e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\therefore \lambda = -2 \text{ (2重根)}$$

を得る. よって基本解は.

$$u_1(x) = e^{\lambda x} = e^{-2x}, \quad u_2(x) = xe^{\lambda x} = xe^{-2x}$$

である. よって一般解は.

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = (c_1 + xc_2)e^{\lambda x}$$

$$\therefore y(x) = (c_1 + xc_2)e^{-2x} \qquad (\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R})$$

を得る.

初期条件 $(y(0), y'(0)) = (1, 1)$ をみたす特殊解を求める.

まず一般解より $y'(x)$ を求める. 計算すると

$$y'(x) = \{(c_2 + \lambda c_1) + \lambda c_2 x\}e^{\lambda x}$$

となる. 条件より

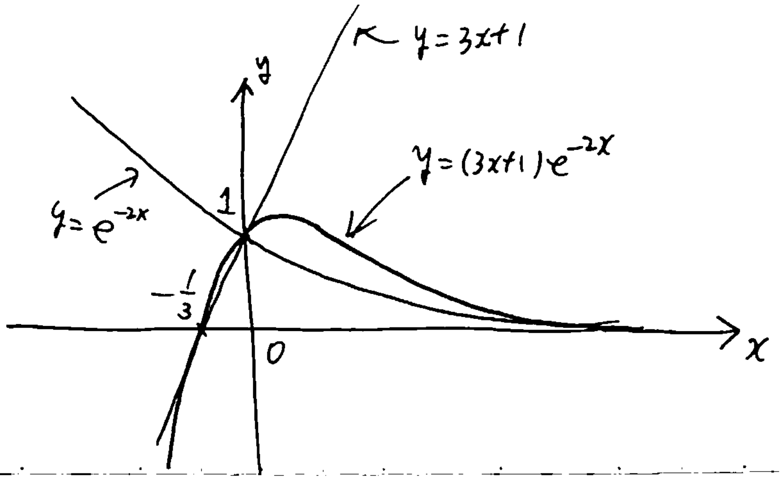
$$\begin{cases} 1 = y(0) = \{c_1 + 0\}e^0 = c_1 \\ 1 = y'(0) = \{(c_2 + \lambda c_1) + 0\}e^0 = c_2 + \lambda c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 1 - \lambda = 3$$

となるので特殊解は

$$y(x) = (3x+1)e^{-2x}$$

となる.



$\boxed{\text{例}}$

$(☆)\quad y'' + 3y' + 4y = 0$

$y = e^{\lambda x}$ と仮定する. (☆)へ代入すると

$$(e^{\lambda x})'' + 3(e^{\lambda x})' + 4(e^{\lambda x}) = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 3\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 4)e^{\lambda x} = 0 \qquad (e^{\lambda x} > 0 \text{ より})$$

$$(*)\quad \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

を得る. $(*)$ より

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \qquad (i = \sqrt{-1})$$

となる. ここで

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i = \alpha - \beta i$$

とおく. このとき基本解は

$$u_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$

$$u_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

となる. 基本解の1次結合はまた $\overbrace{\text{基本解}}^{\text{1次独立な}}$ である.

$$\tilde{u}_1(x) = \frac{1}{2}(u_1(x) + u_2(x))$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\alpha x} e^{i\beta x} + e^{\alpha x} e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2} e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})$$

$$= \frac{1}{2} e^{\alpha x}(\cos\beta x + \cancel{i\sin\beta x} + \cos\beta x - \cancel{i\sin\beta x})$$

$$= e^{\alpha x} \cos\beta x,$$

$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (u_1, u_2)\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} \end{bmatrix}}_{\text{正則}} = (u_1, u_2)P$$

$$(u_1, u_2) \xrightarrow[P]{} (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$$

基底の変換

$$\tilde{u}_2(x) = \frac{1}{2i}(u_1(x) - u_2(x))$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{\alpha x} e^{i\beta x} - e^{\alpha x} e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2i} e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})$$

$$= \frac{1}{2i} e^{\alpha x}(\cancel{\cos\beta x} + i\sin\beta x - \cancel{\cos\beta x} + i\sin\beta x)$$

$$= e^{\alpha x} \sin\beta x$$

とおくと $\tilde{u}_1(x)$, $\tilde{u}_2(x)$ はまた基本解である.

よって一般解は

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) \\ &= C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x \\ &= e^{\alpha x} (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \end{aligned}$$

$$\therefore\ y(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left\{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right\}$$

$$(\forall C_1, \forall C_2 \in \mathbb{R})$$

を得る.

初期条件 $(y(0), y'(0)) = (1, 1)$ をみたす特殊解を求める.

まず $y'(x)$ を求める. 一般解より計算すると

$$\therefore\ y'(x) = e^{\alpha x}\left\{(\alpha C_1 + \beta C_2)\cos\beta x + (\alpha C_2 - \beta C_1)\sin\beta x\right\}$$

を得る. 初期条件を代入すると.

$$\begin{cases} 1 = y(0) = e^0\{C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)\} = C_1 \\ 1 = y'(0) = e^0\{(\alpha C_1 + \beta C_2)\cos 0 + (\alpha C_2 - \beta C_1)\sin(0)\} \\ \qquad = \alpha C_1 + \beta C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ \alpha C_1 + \beta C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \dfrac{1 - \alpha C_2}{\beta} = \dfrac{5}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

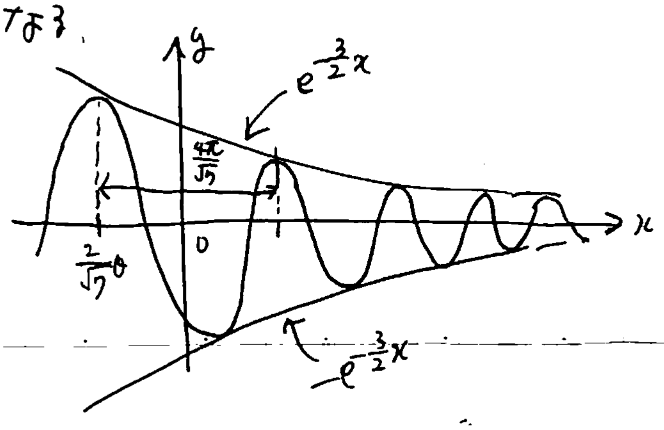
となるので特殊解は

$$y(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \frac{5}{\sqrt{7}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right\}$$

となる. またこの解は

$$y(x) = \sqrt{\frac{32}{7}}\, e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x - \theta\right),\quad \theta = \arctan\left(\frac{5}{\sqrt{7}}\right)$$

と表せるのでグラフは図のようになる.



$\boxed{\text{例}}$

(☆) $y'' + 2by' + cy = 0.$

解として $e^{\lambda x}$ を仮定する. (☆)へ代入すると.

$$(e^{\lambda x})'' + 2b\,(e^{\lambda x})' + c\,(e^{\lambda x}) = 0$$
$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 2b\lambda\, e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0$$
$$(\lambda^2 + 2b\lambda + c)\, e^{\lambda x} = 0$$

(☆☆) $\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0.$ ← 特性多項式

となる. (☆☆) の根は

$$\alpha = -b + \sqrt{b^2 - c} = -b + \sqrt{d},$$
$$\beta = -b - \sqrt{b^2 - c} = -b - \sqrt{d}$$

である. よって $\alpha \neq \beta$ のときの 基本解は

$$e^{\alpha x},\ e^{\beta x}$$

であり, $\alpha = \beta$ のときの基本解は

$$e^{\alpha x},\ x e^{\alpha x}$$

である. よって一般解は.

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} \qquad (\alpha \neq \beta)$$
$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} = (c_1 + c_2 x)\, e^{\alpha x} \qquad (\alpha = \beta)$$

$(c_1, c_2$: 任意定数$)$

となる.

$xe^{\alpha x}$ が解であるか確認する.

(☆)へ代入すると.

$$(xe^{\alpha x})'' + 2b(xe^{\alpha x})' + c(e^{\alpha x}) = 0$$

ここで $(xe^{\alpha x})' = 1 \cdot e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}$

$$= e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}$$

$$(xe^{\alpha x})'' = (e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x})'$$
$$= \alpha e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}$$
$$= 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}$$

より

$$(2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}) + 2b(e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}) + cxe^{\alpha x} = 0$$

$$\{(2\alpha + 2b) + (\alpha^2 + 2b\alpha + c)x\}\, e^{\alpha x} = 0$$

となる.

$$\left.\begin{aligned} &(*) && 2\alpha + 2b = 0 \\ &(**) && \alpha^2 + 2b\alpha + c = 0 \end{aligned}\right\}$$

α は $\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ の根なので $(**)$ は成立.
$\alpha = -b$ であるから $(*)$ も成立.

以上より $xe^{\alpha x}$ は解となる.

(ii) $d = b^2 - c < 0$ のとき.

α, β は複素数である.

$$\alpha = -b + \sqrt{d} = -b + \sqrt{-d}\,\sqrt{-1} = -b + \omega i$$
$$\beta = -b - \sqrt{d} = -b - \sqrt{-d}\,\sqrt{-1} = -b - \omega i$$
$$\omega = \sqrt{-d} = \sqrt{c - b^2}$$
$$\sqrt{-1} = i$$

とおく.

一般解は

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} = c_1 e^{(-b+\omega i)x} + c_2 e^{(-b-\omega i)x}$$

$$= e^{-bx}\left(c_1 e^{\omega x i} + c_2 e^{-\omega x i}\right)$$

となる。ここでオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

より

$$y = e^{-bx}\left\{c_1(\cos\omega x + i\sin\omega x) + c_2(\cos\omega x - i\sin\omega x)\right\}$$

$$= e^{-bx}\left\{(c_1+c_2)\cos\omega x + i(c_1-c_2)\sin\omega x\right\}$$

となる。任意定数を

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$　　$c_1 + c_2 \to c_1 \in \mathbb{R}$

　　　　　　　$i(c_1 - c_2) \to c_2 \in \mathbb{R}$

ととりかえる。よって一般解は、

$$y = e^{-bx}(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x) \quad (c_1, c_2 : 任意定数)$$

と得られる。

また、この解は

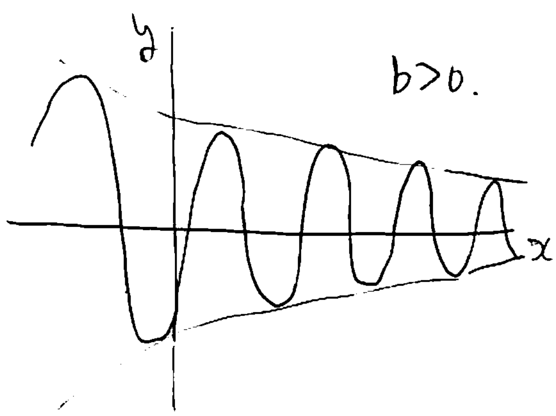
$$y = A e^{-bx} \cos(\omega x - \varphi)$$

$$(A, \varphi : 任意定数)$$

注 任意定数の個数は変らない。

とも表される。

問 これを示せ。



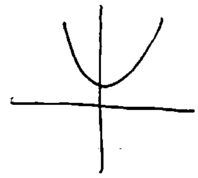
(iii) $d = b^2 - c > 0$ のとき

α, β は実数である.

$$\alpha = -b + \sqrt{d} = -b + \omega,$$
$$\beta = -b - \sqrt{d} = -b - \omega,$$
$$\omega = \sqrt{b^2 - c} = \sqrt{d}$$

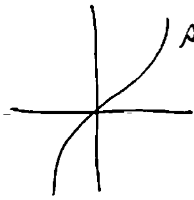
とおく.

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} = c_1 e^{(-b+\omega)x} + c_2 e^{(-b-\omega)x}$$
$$= e^{-bx}\left(c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}\right)$$



ここで

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



より

$$e^x = \cosh x + \sinh x,$$
$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

を用いると.

$$y = e^{-bx}\left\{c_1(\cosh \omega x + \sinh \omega x) + c_2(\cosh \omega x - \sinh \omega x)\right\}$$
$$= e^{-bx}\left\{(c_1 + c_2)\cosh \omega x + (c_1 - c_2)\sinh \omega x\right\}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \to c_1 \\ c_1 - c_2 \to c_2 \end{cases}$$

よって

$$y = e^{-bx}\left(c_1 \cosh \omega x + c_2 \sinh \omega x\right)$$

と表される.

また. この解はパラメータによって

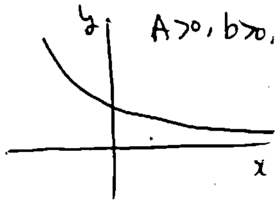
$$y = A e^{-bx} \cosh(\omega x + \varphi)$$

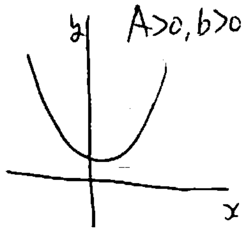
または

$$y = A e^{-bx} \sinh(\omega x + \varphi)$$

$(A, \varphi$: 任意定数$)$

とも表される.



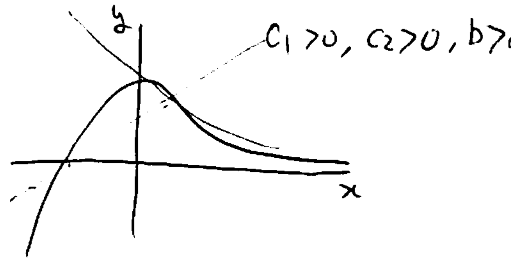


問 これを示せ.

(iii) $d = b^2 - c = 0$ のとき

$\alpha = \beta = -b$ となる.

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\alpha x} = (c_1 + c_2 x) e^{-bx}.$$



以上 (i), (ii), (iii) より 一般解は.

$b^2 < c$ のとき

$$y = e^{-bx}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x),$$
$$\omega = \sqrt{c - b^2}$$

$b^2 > c$ のとき

$$y = e^{-bx}(c_1 \cosh \omega x + c_2 \sinh \omega x),$$
$$\omega = \sqrt{b^2 - c}$$

$b^2 = c$ のとき

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-bx}$$

(c_1, c_2 : 任意定数)

と得られる.

問

b, c, c_1, c_2 の値をいろいろ変化させたときの一般解の概形をかけ.

問

初期条件 $(y(0), y'(0)) = (y_0, y_1)$ を変化させたときの特殊解の概形を書け.

例. $(y(0), y'(0)) = (1, 1), (1, 0), (1, -1)$

問

関数 y, y' の x を消去して (y, y') の軌道図を書け.

$\boxed{\text{まとめ}}$

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (a_j \in \mathbb{R})$$

特性多項式：$\varphi(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.

$\varphi(t) = 0$ の根：$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ ← n個

一般解：

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x)$$
$$(\forall c_1, \forall c_2, \cdots, \forall c_n \in \mathbb{R})$$

基本解：$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$. ← n個

λ_j：実数根 $\quad u_j(x) = e^{\lambda_j x}$.

λ_j：m重根 $\quad (\lambda_j = \lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_{j+m-1})$

$$\left.\begin{aligned} u_j(x) &= e^{\lambda_j x} \\ u_{j+1}(x) &= x e^{\lambda_j x} \\ u_{j+2}(x) &= x^2 e^{\lambda_j x} \\ &\vdots \\ u_{j+m-1}(x) &= x^{m-1} e^{\lambda_j x} \end{aligned}\right\} \text{m個}$$

λ_j：複素根 $\quad (\lambda_j = \overline{\lambda_{j+1}})$

$$\left.\begin{aligned} u_j(x) &= e^{\alpha x} \cos \beta x \\ u_{j+1}(x) &= e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}\right\} \text{2個}$$

ただし $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}) = \mathrm{Re}(\lambda) \\ \beta = \frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda}) = \mathrm{Im}(\lambda). \end{cases}$

λが複素根のとき $\bar{\lambda}$ もまた根

$0 = \varphi(\lambda) \Rightarrow \bar{0} = \overline{\varphi(\lambda)} \Rightarrow 0 = \overline{\sum a_j}$

$\Rightarrow 0 = \sum_{j=0}^{n} a_j \bar{\lambda}^j \Rightarrow 0 = \varphi(\bar{\lambda})$

§ 非斉次線形方程式

非斉次定数係数線形常微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = q(x).$$

$$\Leftrightarrow \left(a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0\right) y = q(x)$$

$$\Leftrightarrow Ly = q$$

$\boxed{\text{定理}}$ (非斉次線形)

非斉次形 $Ly=q$ の特殊解 $y=Y(x)$

斉次形 $Ly=0$ の一般解 $y=\tilde{y}(x; c_1, c_2, \cdots, c_n)$

$\Rightarrow$ $Ly=q$ の一般解 $y=\tilde{y}+Y$.

$\because$ $L\tilde{y}=0$, $LY=q$ より

$L(\tilde{y}+Y) = L\tilde{y} + LY = 0 + q = q$. ∎

$\boxed{\text{例}}$ (非斉次線形).

$y'' - 3y' + 2y = 2$.

① 同次形 $y''-3y'+2y=0$ の一般解 $\tilde{y}$ を求める.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda = 1, 2$.

$\Rightarrow \tilde{y} = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$.

② 非同次形 $y''-3y'+2y=2$ の特殊解 Y をもとめる.

$Y=1$ と仮定する. 代入すると. $y''-3y'+2y = (1)''-3(1)'+2\cdot 1$

$= 0 - 0 + 2 = 2$. ok

③ 非同次形の一般解がもとまる.

$$y = \tilde{y} + Y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + 1 \quad //$$

$\boxed{例}$ (非斉次線形)

方程式 $y''-4y'+3y=x$ の一般解を求める.

まず, 同次形 $y''-4y'+3y=0$ の一般解は

$$\lambda^2-4\lambda+3=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-3)=0 \Rightarrow \lambda=1,3.$$

より

$$y=\tilde{y}=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$$

である. 次に非同次形の特殊解をみつける.

$$y=Y=ax+b$$

と仮定する. 方程式に代入すると.

$$\begin{aligned}
左辺=y''-4y'+3y&=(ax+b)''-4(ax+b)'+3(ax+b)\\
&=0-4a+3ax+3b\\
&=3ax+(-4a+3b).\\
&=x=右辺.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3a=1\\-4a+3b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{4}{3}a=\frac{4}{9}.\end{cases}$$

よって特殊解は

$$Y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}=\frac{1}{9}(3x+4).$$

以上より, 非斉次形の一般解は

$$y=\tilde{y}+Y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{9}(3x+4)$$

となる.

$\boxed{例}$ (非斉次線形)

$y''-4y'+3y=x^2$ の一般解を求める.

同次形の一般解は $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ より.

$$\hat{y}=c_1e^x+c_2e^{3x}$$

である. 特殊解をみつける.

$$y=Y=ax^2+bx+c$$

とおく.

$$\begin{cases} y'=2ax+b \\ y''=2a \end{cases}$$

を代入して.

$$\begin{aligned} y''-4y'+3y &= 2a-4(2ax+b)+3(ax^2+bx+c) \\ &= 3ax^2+(3b-8a)x+(3c-4b+2a)=x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a=1 \\ 3b-8a=0 \\ 3c-4b+2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{8}{3}a=\frac{8}{9} \\ c=\frac{4b-2a}{3}=\frac{26}{27} \end{cases}$$

より特殊解は

$$y=Y=\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}=\frac{1}{27}(9x^2+24x+26).$$

となるので, 一般解は

$$y=\hat{y}+Y=c_1e^x+c_2e^{3x}+\frac{1}{27}(9x^2+24x+26)$$

である.

$\boxed{例}$ (非斉次線形)

$$y'' - 4y' + 3y = \cos x.$$

特殊解を

$$y = Y = a\cos x + b\sin x$$

とおく.

$$y' = -a\sin x + b\cos x$$

$$y'' = -a\cos x - b\sin x.$$

より. 代入すると

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y &= (-a\cos x - b\sin x) - 4(-a\sin x + b\cos x) + 3(a\cos x + b\sin x) \\ &= (2a - 4b)\cos x + (4a + 2b)\sin x. \\ &= \cos x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 4b = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - (-4)\cdot 4 = 4 + 16 = 20 \\ a = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \\ b = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-4}{20} = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

よって.

$$Y = \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x. = \frac{1}{10}(\cos x - 2\sin x)$$

一般解は

$$y = \tilde{y} + Y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{10}(\cos x - 2\sin x)$$

となる.

例 (非斉次線形).

$y''-4y'+3y=3e^{2x}+4e^{x}+2e^{3x}$ の一般解を求める.

特殊解を

$$y=Y=ae^{2x}+be^{x}+ce^{3x}$$

とおく.

$$\begin{cases} y'=2ae^{2x}+be^{x}+3ce^{3x} \\ y''=4ae^{2x}+be^{x}+9ce^{3x} \end{cases}$$

を代入すると.

$$y''-4y'+3y=(4ae^{2x}+be^{x}+9ce^{3x})-4(2ae^{2x}+be^{x}+3ce^{3x})+3(ae^{2x}+be^{x}+ce^{3x})$$

‖ 左辺

$$=(4a-8a+3a)e^{2x}+(\cancel{b-4b+3b})e^{x}+(\cancel{9c-12c+3c})e^{3x}$$

$$=-ae^{2x}$$

右辺 $=3e^{2x}+4e^{x}+2e^{3x}$

となり成立しない. そこで

$$y=Y=ae^{2x}+bxe^{x}+cxe^{3x}$$

とおく.

$$\begin{cases} y'=2ae^{2x}+be^{x}+bxe^{x}+ce^{3x}+3cxe^{3x} \\ y''=4ae^{2x}+be^{x}+be^{x}+bxe^{x}+3ce^{3x}+3ce^{3x}+9cxe^{3x} \\ \quad =4ae^{2x}+2be^{2x}+bxe^{x}+6ce^{3x}+9cxe^{3x}. \end{cases}$$

代入すると.

$$y''-4y'+3y=(4ae^{2x}+2be^{2x}+bxe^{x}+6ce^{3x}+9cxe^{3x})-4(2ae^{2x}+be^{x}+bxe^{x}+ce^{3x}+3cxe^{3x})+3(ae^{2x}+bxe^{x}+cxe^{3x})$$

$$=(4a-8a+3a)e^{2x}+(2b-4b)e^{x}+(\cancel{b-4b+3b})xe^{x}+(6c-4c)e^{3x}+(\cancel{9c-12c+3c})xe^{3x}$$

$$=-ae^{2x}-2be^{x}+2ce^{3x}$$

$$=右辺=3e^{2x}+4e^{x}+2e^{3x}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a=3 \\ -2b=4 \\ 2c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow Y=-3e^{2x}-2xe^{x}+xe^{3x}$$

よって, 一般解は

$$y=\hat{y}+Y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}-3e^{2x}-2xe^{x}+xe^{3x}=(c_1-2x)e^{x}+(c_2+x)e^{3x}-3e^{2x}$$

$\boxed{例}$ (非斉次線形)

$y''+y=\cos x$ の一般解を求める。

同次形 $y''+y=0$ の一般解は $\lambda^2+1=(\lambda-i)(\lambda+i)=0$ より

$$\tilde{y}=c_1e^{ix}+c_2e^{-ix}=c_1(\cos x+i\sin x)+c_2(\cos x-i\sin x)$$

$$=\underbrace{(c_1+c_2)}_{\downarrow\, c_1}\cos x+\underbrace{(ic_1-ic_2)}_{\downarrow\, c_2}\sin x$$

$$\tilde{y}=c_1\cos x+c_2\sin x.$$

特殊解を

$$y=a\cos x+b\sin x=Y$$

と仮定する。

$$y'=-a\sin x+b\cos x,\quad y''=-a\cos x-b\sin x$$

より、

$$y''+y=(-a\cos x-b\sin x)+(a\cos x+b\sin x)=0\neq\cos x.$$

となり成立しない。そこで

$$y=Y=ax\cos x+bx\sin x$$

と仮定する。

$$\begin{cases} y'=a\cos x-ax\sin x+b\sin x+bx\cos x. \\ y''=-a\sin x-a\sin x-ax\cos x+b\cos x+b\cos x-bx\sin x. \\ \quad=-2a\sin x-ax\cos x+2b\cos x-bx\sin x. \end{cases}$$

より、

$$y''+y=-2a\sin x-ax\cos x+2b\cos x-bx\sin x+ax\cos x+bx\sin x.$$

$$=-2a\sin x+\cancel{(a-a)}x\cos x+2b\cos x+\cancel{(-b+b)}x\sin x$$

$$=-2a\sin x+2b\cos x.$$

$$=\text{右辺}=\cos x$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}-2a=0\\ 2b=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}\Longrightarrow Y=\frac{1}{2}x\sin x.$$

よって、一般解は

$$y=\tilde{y}+Y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$$

$$=c_1\cos x+\left(c_2+\frac{x}{2}\right)\sin x$$

$$=c_1\cos x+\frac{1}{2}(c_2+x)\sin x$$

となる。

§ 定数変化法

非斉次方程式 $ay''+by'+cy=g$ の一般解を求める.

斉次形 $ay''+by'+cy=0$ の基本解を $y=u,\ y=v$ とすると. すなわち $\begin{cases} au''+bu'+cu=0 \\ av''+bv'+cv=0 \end{cases}$

一般解は $y=\hat{y}=C_1u+C_2v$ である.

ここで、非斉次形の一般解を $\hat{y}$ の定数 C_1, C_2 を変化させて,

$$y=A(x)u(x)+B(x)v(x)$$

と仮定する. このとき,

$$\begin{cases} y=Au+Bv. \\ y'=A'u+Au'+B'v+Bv'=(A'u+B'v)+(Au'+Bv') \\ y''=(A'u+B'v)'+A'u'+Au''+B'v'+Bv'' \\ \quad=(A'u+B'v)'+(A'u'+B'v')+(Au''+Bv'') \end{cases}$$

より.

$$ay''+by'+cy=A\boxed{(au''+bu'+cu)}^{0}+B\boxed{(av''+bv'+cv)}^{0}$$
$$+a(A'u+B'v)'+b(A'u+B'v)+c(A'u'+B'v')$$
$$=a(A'u+B'v)'+b(A'u+B'v)+a(A'u'+B'v')$$
$$=\text{右辺}=g.$$

同じ

と表される. もし. $A(x), B(x)$ が.

$$\begin{cases} A'u+B'v=0 \\ A'u'+B'v'=g/a \end{cases} \quad \cdots\cdots (☆)$$

をみたせば, $y=Au+Bv$ は一般解となる.

(☆) を A', B' について書くと.

$$W=\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}=uv'-u'v \quad \leftarrow \text{ロンスキアン (Wronskian)}$$

$$\begin{cases} A'=\dfrac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & v \\ g/c & v' \end{vmatrix}=\dfrac{-\frac{g}{a}v}{uv'-u'v}=-\dfrac{vg}{a(uv'-u'v)} \\ B'=\dfrac{1}{W}\begin{vmatrix} u & 0 \\ u' & g/c \end{vmatrix}=\dfrac{u\cdot\frac{g}{a}}{uv'-u'v}=\dfrac{ug}{a(uv'-u'v)} \end{cases}$$

となる．これより，A, B は．

$$A = -\frac{1}{a}\int \frac{vq}{uv'-u'v}\,dx, \quad B = \frac{1}{a}\int \frac{uq}{uv'-u'v}\,dx$$

と表される．A, B の積分定数をとり出して

$$A(x) = -\frac{1}{a}\int^x \frac{v(\tilde{x})q(\tilde{x})}{u(\tilde{x})v'(\tilde{x})-u'(\tilde{x})v(\tilde{x})}\,d\tilde{x} + C_1$$

$$B(x) = \frac{1}{a}\int^x \frac{u(\tilde{x})q(\tilde{x})}{u(\tilde{x})v'(\tilde{x})-u'(\tilde{x})v(\tilde{x})}\,d\tilde{x} + C_2.$$

と書くと，一般解は

$$\begin{aligned} y &= Au + Bv \\ &= C_1 u + C_2 v + \frac{1}{a}\int^x \frac{u(\tilde{x})v(x)-u(x)v(\tilde{x})}{u(\tilde{x})v'(\tilde{x})-u'(\tilde{x})v(\tilde{x})}\,d\tilde{x} \end{aligned}$$

となる．結局特解は

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{1}{a}\int^x \frac{u(\tilde{x})v(x)-u(x)v(\tilde{x})}{u(\tilde{x})v'(\tilde{x})-u'(\tilde{x})v(\tilde{x})}\,d\tilde{x} \\ &= \frac{1}{a}\int^x \frac{\begin{vmatrix} u(\tilde{x}) & v(\tilde{x}) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u(\tilde{x}) & v(\tilde{x}) \\ u'(\tilde{x}) & v'(\tilde{x}) \end{vmatrix}}\,d\tilde{x} \end{aligned}$$

により得られる．

$\boxed{\text{例}}$ (定数変化法)

$y''-4y'+3y=3e^{2x}+4e^{x}+2e^{3x}$ の一般解を求める.

同次形の一般解は $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ より

$$\tilde{y}=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$$

である. c_1, c_2 を関数 $A(x), B(x)$ と変化させて. 非同次形の一般解を

$$y=Ae^{x}+Be^{3x}$$

と仮定する. 代入すると.

$$\begin{cases} A'e^{x}+B'e^{3x}=0 \\ A'(e^{x})'+B'(e^{3x})'=3e^{2x}+4e^{x}+2e^{3x}=q. \end{cases}$$

を得る. 書き直すと,

$$W=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{3x} \\ (e^{x})' & (e^{3x})' \end{vmatrix}=e^{x}(e^{3x})'-(e^{x})'e^{3x}=3e^{4x}-e^{4x}=2e^{4x}$$

$$A'=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ q & (e^{3x})' \end{vmatrix}=\frac{-e^{3x}q}{W}=\frac{-e^{3x}}{2e^{4x}}(3e^{2x}+4e^{x}+2e^{3x})$$

$$=-\frac{1}{2}(3e^{x}+4+2e^{2x})$$

$$B'=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ (e^{x})' & q \end{vmatrix}=\frac{e^{x}q}{W}=\frac{e^{x}}{2e^{4x}}(3e^{2x}+4e^{x}+2e^{3x})$$

$$=\frac{1}{2}(3e^{-x}+4e^{-2x}+2)$$

A', B' を積分すると.

$$A=\int A'dx=\frac{-1}{2}(3e^{x}+4x+e^{2x}+C_1)$$

$$B=\int B'dx=\frac{1}{2}(-3e^{-x}-2e^{-2x}+2x+C_2)$$

となる. よって, 一般解は.

$$y=Ae^{x}+Be^{3x}=-\frac{1}{2}e^{x}(3e^{x}+4x+e^{2x}+c_1)+\frac{1}{2}e^{3x}(-3e^{-x}-2e^{-2x}+2x+C_2)$$

$$=(\underbrace{c_1-1}_{c_1}-2x)e^{x}+(\underbrace{c_2-\tfrac{1}{2}}_{c_2}+x)e^{3x}-3e^{2x}$$

$$y=(c_1-2x)e^{x}+(c_2+x)e^{3x}-3e^{2x}$$

となる.

例1 (定数変化法)

$y''-2y'+2y=2e^x\cos x$ の一般解を求める.

$\lambda^2-2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=1\pm i \Rightarrow \tilde{y}=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$.

ここで

$$y=Ae^x\cos x+Be^x\sin x$$

と仮定する.

$$\begin{cases} A'e^x\cos x+B'e^x\sin x=0 \\ A'(e^x\cos x)'+B'(e^x\sin x)'=2e^x\cos x=g. \end{cases}$$

$$W=\begin{vmatrix} e^x\cos x & e^x\sin x \\ (e^x\cos x)' & (e^x\sin x)' \end{vmatrix}=e^x\cos x\,(e^x\sin x)'-e^x\sin x\,(e^x\cos x)'$$

$$=e^x\cos x\,(e^x\sin x+e^x\cos x)-e^x\sin x\,(e^x\cos x-e^x\sin x)$$

$$=e^{2x}(\cancel{\sin x\cos x}+\cos^2x-\cancel{\sin x\cos x}+\sin^2x)$$

$$=e^{2x}(\cos^2x+\sin^2x)=e^{2x}.$$

$$A'=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & e^x\sin x \\ g & (e^x\sin x)' \end{vmatrix}=\frac{-e^x\sin x\,g}{W}=-\frac{e^x}{e^{2x}}\sin x\cdot 2e^x\cos x=-2\sin x\cos x$$
$$=-\sin 2x$$

$$B'=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} e^x\cos x & 0 \\ (e^x\cos x)' & g \end{vmatrix}=\frac{e^x\cos x\cdot g}{W}=\frac{e^x}{e^{2x}}\cos x\cdot 2e^x\cos x=2\cos^2x$$
$$=\cos 2x+1$$

$$A=\int A'dx=-\int\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\cos 2x+C_1$$

$$B=\int B'dx=\int(\cos 2x+1)dx=+\frac{1}{2}\sin 2x+x+C_2$$

よって、一般解は

$$y=Ae^x\cos x+Be^x\sin x=\left(\frac{1}{2}\cos 2x+C_1\right)e^x\cos x+\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x+C_2\right)\times e^x\sin x$$

$$y=e^x\left\{\frac{1}{2}\cos x(\cos 2x+C_1)+\frac{1}{2}\sin x(\sin 2x+2x+C_2)\right\}$$

§ オイラーの方程式

オイラーの方程式

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x) \quad (a, b, c: 定数)$$

$x = e^t$ と独立変数を置き換えることで
定数係数の方程式に変る。

$\boxed{例}$ (オイラーの方程式)

$x^2y'' - xy' - 3y = 0$ の一般解を求める。

$x = e^t$ とおく。独立変数を x から t に置き換えて考える。
x の微分を t の微分に置き換えるためにはチェインルール

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

を用いる。ここで $t = \log x$ より

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

であり、y の t 微分を $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ とおくことにする。このとき

$$y' = \frac{\dot{y}}{x}$$

となる。さらには

$$y'' = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt}\left(\frac{d}{dx}\frac{dt}{dx}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right)\frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}$$

より、$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$ を代入すると、

$$y'' = \frac{\ddot{y}}{x^2} - \frac{\dot{y}}{x^2}$$

となる。

代入すると.

$$x^2y''-xy'-3y=(\ddot{y}-\dot{y})-\dot{y}-3y=0$$

$$\Rightarrow \ddot{y}-2\dot{y}-3y=0.$$

となり定数係数となる. 基本解を $y=e^{\lambda t}$ と仮定すると

$$\lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=3,-1.$$

より $y=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$ となる. $e^t=x$ より, 一般解は

$$y=c_1x^3+\frac{c_2}{x}$$

となる. //

$\boxed{\text{例}}$ (オイラーの方程式)

$$x^2y''-4xy'+6y=2x.$$

$x=e^t$ とおく.

$t=\log x$, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$, $\frac{d^2t}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}$ より

$$\begin{cases} y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\dot{y}}{x} \\ y''=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} \\ \quad =\frac{\ddot{y}}{x^2}-\frac{\dot{y}}{x^2} \end{cases}$$

を代入すると

$$(\ddot{y}-\dot{y})-4\dot{y}+6y=2e^t$$

$$\ddot{y}-5\dot{y}+6y=2e^t$$

となる.

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda=2,3$$

より同次形の一般解は

$$\tilde{y}=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$$

である. 非同次形の特殊解は

$$Y=ae^t$$

とおくと

$$\ddot{y}-5\dot{y}+6y=ae^t-5ae^t+6ae^t$$

$$=2ae^t=2e^t=\text{右辺}.$$

$$\Rightarrow a=1. \Rightarrow Y=e^t$$

と定まる. よって一般解は

$$y=\tilde{y}+Y=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}+e^t.$$

であり $x=e^t$ より

$$y=c_1x^2+c_2x^3+x$$

となる. //

§ 巾級数展開

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^3+\cdots$$

$x=x_0$ まわりでの<u>整級数</u> または <u>巾級数 (power series)</u> という.

級数が $|x-x_0|<\rho$ において絶対収束するとき ρ を<u>収束半径</u>という

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

または

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

ある関数 $f(x)$ が巾級数で表されるとき<u>解析的</u> (analytic) であるという.

$f(x)$ が C^{∞} 級であるとき.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\cdots$$

$x=x_0$ まわりでの<u>テイラー級数展開 (Taylor series expansion)</u>

例 $x=0$ まわりで展開.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(|x|<\infty)$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\quad(|x|<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|x|<\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!}\quad(|x|<\infty)$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot1}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3\cdot2\cdot1}x^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}x^4+\cdots$$

$(\alpha\in\mathbb{R})$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\quad(|x|<\infty)$$

ただし $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!\,n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

$\boxed{例}$ (べき級数展開)

$y''-3y'+2y=0$ の $x=0$ まわりでのべき級数解を求める.

$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots \quad =\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ とおくと

$y'= \quad c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots \quad =\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}\underset{n\to n+1}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$

$y''= \quad 2c_2+3\cdot2c_3x+\cdots \quad =\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$

である. よって

$$0=y''-3y'+2y=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)c_{n+2}-3(n+1)c_{n+1}+2c_n\}x^n$$

が成り立つ. x^n の係数を全て0とすると.

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}-3(n+1)c_{n+1}+2c_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

を得る. この漸化式を解いて c_n を決定する.

$$(n+1)\{(n+2)c_{n+2}-3c_{n+1}\}+2c_n=0$$
$$(n+1)\{\underbrace{(n+2)c_{n+2}-2c_{n+1}}_{=d_{n+1}}\}-\{\underbrace{(n+1)c_{n+1}-2c_n}_{=d_n}\}=0$$
$$(n+1)d_{n+1}-d_n=0$$
$$d_{n+1}=\frac{1}{n+1}d_n$$
$$d_n=\frac{1}{n}d_{n-1}=\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}d_{n-2}=\frac{1}{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}d_0=\frac{d_0}{n!}=\frac{c_1-2c_0}{n!}$$
$$(n+1)c_{n+1}-2c_n=\frac{d_0}{n!}$$
$$\underbrace{(n+1)!\,c_{n+1}}_{=f_{n+1}}-2\underbrace{n!\,c_n}_{=f_n}=d_0$$
$$f_{n+1}-2f_n=d_0$$
$$f_{n+1}+d_0=2(f_n+d_0)$$
$$f_n+d_0=2(f_{n-1}+d_0)=2^2(f_{n-2}+d_0)=\cdots=2^n(f_0+d_0)=2^n(c_1-c_0)$$
$$c_n=\frac{f_n}{n!}=\frac{-d_0}{n!}+\frac{2^n(c_1-c_0)}{n!}=\frac{2^n}{n!}(c_1-c_0)+\frac{1}{n!}(2c_0-c_1)$$

よって $c_n = \frac{2^n}{n!}(c_1 - c_0) + \frac{1}{n!}(2c_0 - c_1)$ を得る.

c_0, c_1 は任意定数であるから. $c_1 - c_0 = A$, $2c_0 - c_1 = B$ とおく.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A\frac{2^n}{n!} + B\frac{1}{n!}\right)x^n = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!} + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

である. これで巾級数解を得た. しかし.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

を用いると.

$$y = Ae^{2x} + Be^{x}$$

と表わされる一般解を得る.

$\boxed{例}$ (巾級数展開)

$y''-xy'-y=0$ の $x=0$ まわりの巾級数解を求める.

$$\begin{cases} y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{cases}$$ を代入すると

$$0=y''-xy'-y=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

0以上から　1以上から　0以上から

$$=\Bigl(2c_2+\underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{n-2\to n}\Bigr)-\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n-\Bigl(c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\Bigr)$$

$$=(2c_2-c_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n-\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

$$=(2c_2-c_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-nc_n-c_n\right\}x^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_2-c_0 \\ (n+2)(n+1)c_{n+2}-(n+1)c_n=0 \\ \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2=\frac{1}{2}c_0 \\ c_{n+2}=\frac{\cancel{n+1}}{(n+2)\cancel{(n+1)}}c_n=\frac{1}{n+2}c_n \\ \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_{n+2}=\frac{1}{n+2}c_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$n=2k$ のとき

$$c_{2k}=\frac{1}{2k}c_{2k-2}=\frac{1}{2k(2k-2)}c_{n-4}$$
$$=\cdots=\frac{1}{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}c_0$$
$$=\frac{c_0}{2^k\,k(k-1)(k-2)\cdots2\cdot1}$$
$$=\frac{c_0}{2^k k!}$$

$n=2k+1$ のとき

$$c_{2k+1}=\frac{1}{2k+1}c_{2k-1}=\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}c_{2k-3}=\cdots$$
$$=\frac{1}{(2k+1)(2k-1)\cdots5\cdot3}c_1$$
$$=\frac{1}{(2k+1)!!}c_1$$

$$C_n = \begin{cases} C_{2k} = \dfrac{C_0}{2^k \cdot k!} \\ C_{2k+1} = \dfrac{c_1}{(2k+1)!!} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

よって

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(C_{2k} x^{2k} + C_{2k+1} x^{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C_0 x^{2k}}{2^k k!} + \frac{c_1 x^{2k+1}}{(2k+1)!!} \right)$$

$$= C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k + C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

$$= C_0 e^{\frac{x^2}{2}} + C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

ただし，C_0, C_1 は任意定数．

第2項の級数の収束半径は

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_k}{b_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!!} = \lim_{k\to\infty} (2k+3) = \infty$$

である．

よって，

$$y = C_0 e^{\frac{x^2}{2}} + C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!} \quad (|x| < \infty)$$

は一般解である．

例（巾級数展開）

$(x^2-1)y''-2y=0$ の $x=0$ まわりでの級数展開を行う．

$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}$，$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}$ を代入する．

$$0=(x^2-1)y''-2y=(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

$$=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^n}_{2次より}-\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}}_{0次より}-\underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n}_{0次より}$$

$n=2$　$n=3$　$n-2\to n$　$n=0$　$n=1$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^n-\left(2c_2+6c_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n\right)-2\left(c_0+c_1x+\sum_{n=2}^{\infty}c_n x^n\right)$$

$$=-2(c_0+c_2)-2(c_1+3c_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(n-1)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}-2c_n\right\}x^n.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_0+c_2=0\\ c_1+3c_3=0\\ n(n-1)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}-2c_n=0\\ \quad(n=2,3,4,\cdots)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_2=-c_0\\ c_3=-\frac{1}{3}c_1 \qquad (n=2,3,4\cdots)\\ c_{n+2}=\frac{n(n-1)-2}{(n+2)(n+1)}c_n=\frac{n^2-n-2}{(n+2)(n+1)}c_n\\ \quad=\frac{(n-2)\cancel{(n+1)}}{(n+2)\cancel{(n+1)}}c_n=\frac{n-2}{n+2}c_n.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ c_{n+2}=\frac{n-2}{n+2}c_n\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

偶　$c_0=A$：任意定数.

$n=0$　$c_2=-c_0=-A$.

$n=2$　$c_4=\frac{2-2}{2+2}c_2=0$

$n=4$　$c_6=\frac{4-2}{4+2}c_4=\frac{2}{6}c_4=0$

$n=6$　$c_8=\frac{6-2}{6+2}c_6=\frac{4}{8}c_6=0$

$\vdots$

$n=2k$　$c_{2k+2}=\frac{2k-2}{2k+2}c_{2k}=0$.

奇　$c_1=B$：任意定数

$n=1$　$c_3=-\frac{1}{3}c_1=-\frac{1}{3}B$

$n=3$　$c_5=\frac{3-2}{3+2}c_3=-\frac{1}{5\times3}B$

$n=5$　$c_7=\frac{5-2}{5+2}c_5=-\frac{\cancel{3}}{7\times5\times\cancel{3}}B=-\frac{1}{7\times5}B$.

$n=7$　$c_9=\frac{7-2}{7+2}c_7=-\frac{\cancel{5}}{9\times7\times\cancel{5}}B=-\frac{1}{9\times7}B$

$\vdots$

$n=2k-1$　$c_{2k+1}=\frac{2k-3}{2k+1}c_{2k-1}=\cdots=-\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}B$

$=-\frac{1}{4k^2-1}B$.

$$c_n = \begin{cases} A & (n=0) \\ B & (n=1) \\ -A & (n=2) \\ \dfrac{-B}{(2k-1)(2k+1)} & (n=2k+1;\ k=1,2,3,\cdots) \\ 0 & (n=2k;\ \ k=2,3,4,\cdots) \end{cases}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A+Bx-Ax^2-B\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=A+Bx-Ax^2-\frac{B}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)x^{2k+1}$$

$$=A+Bx-Ax^2-\frac{B}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k-1}+\frac{B}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

ここで

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1}-\frac{x^{2k}}{2k}\right)$$

$x \to -x$

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{x^{2k-1}}{2k-1}-\frac{x^{2k}}{2k}\right)$$

これらより

$$\log(1+x)-\log(1-x)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

よって、

$$y=A+Bx-Ax^2-\frac{B}{2}x^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\frac{B}{2}\left(-x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right)$$

$$=A+Bx-Ax^2-\frac{B}{2}x^2\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{B}{2}\left(-x+\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

$$=A+\frac{B}{2}x-Ax^2+\frac{B}{4}(1-x^2)\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

が一般解である。

§ 確定特異点をもつ方程式の巾級数展開

$\boxed{例}$ (巾級数展開)

$x^2y''+xy'-y=0$ の一般解を $x=0$ まわりの巾級数展開で求める。

$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\ y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},\ y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$ より

$$0=x^2y''+xy'-y=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n}_{2次から}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n}_{1次から}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{0次から}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n+\left(c_1x+\sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^n\right)-\left(c_0+c_1x+\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right)$$

$$=-c_0+\cancel{(c_1-c_1)}x+\sum_{n=2}^{\infty}\{\underbrace{n(n-1)+n-1}_{n^2-\cancel{n}+\cancel{n}-1\ \to\ n^2-1\ \to\ (n-1)(n+1)}\}c_n x^n$$

$$=-c_0+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+1)c_n x^n.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_0=0 \\ c_1=A\ (任意) \\ (n-1)(n+1)c_n=0 \\ \qquad (n=2,3,\cdots) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0=0 \\ c_1=A \\ c_2=0 \\ c_3=0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0+Ax+0x^2+\cdots$$
$$=Ax.$$

よって 解 $y=Ax$ を得る。しかし、これは任意定数を1つしか含まないので一般解ではない。もう1つの基本解をさがす~~必要~~がある。

2つの基本解 y_1, y_2 は

$$y_2=y_1 z(x)$$

の関係にあると仮定する。$y_1=x$ として方程式に代入すると

$$\begin{cases} y=xz \\ y'=1z+xz'=z+xz' \\ y''=z'+z'+xz''=2z'+xz'' \end{cases}$$

$$0=x^2y''+xy'-y=x^2(2z'+xz'')+x(z+xz')-xz$$
$$=2x^2z'+x^3z''\cancel{+xz}+x^2z'\cancel{-xz}$$
$$=x^3z''+3x^2z' \qquad \Rightarrow \frac{z''}{z'}=-\frac{3}{x}$$

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \log|z'| = -3\log|x| + C = \log\left|\frac{C}{x^3}\right|$$

$$\Rightarrow z' = \frac{C}{x^3} \Rightarrow z = C\int\frac{dx}{x^3} = \frac{C_1}{x^2} + C_2 .$$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 z = x\left(\frac{C_1}{x^2} + C_2\right) = \frac{C_1}{x} + C_2 x .$$

C_2xの項はy_1と独立ではないので $y_2 = \frac{1}{x}$ と選ぶ。
基本解は $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$ であり、一般解は

$$y = Ax + \frac{B}{x} \qquad (A, B : 任意定数)$$

と得られる。
ここで結果を吟味する。得られた一般解は$x=0$で発散する。
そのため巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ で展開することはできない。
解を仮定するならば、

$$y = \frac{c_0}{x} + c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

とする必要がある。一般的に書くと、

$$y = x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

となる。~~これ~~αが負の整数のときをローラン級数展開という。

$\boxed{例}$（巾級数展開）

$x^2y''+xy'-y=0$ を $y=x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ と仮定して一般解をもとめる.

$$\begin{cases} y=x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n = c_0x^\alpha+c_1x^{\alpha+1}+c_2x^{\alpha+2}+c_3x^{\alpha+3}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{\alpha+n}. \\ y'=\alpha c_0x^{\alpha-1}+(\alpha+1)c_1x^\alpha+(\alpha+2)c_2x^{\alpha+1}+(\alpha+3)c_3x^{\alpha+2}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_nx^{\alpha+n-1} \\ y''=\alpha(\alpha-1)c_0x^{\alpha-2}+(\alpha+1)\alpha c_1x^{\alpha-1}+(\alpha+2)(\alpha+1)c_2x^\alpha+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_nx^{\alpha+n} \end{cases}$$

これを代入すると.

$$0=x^2y''+xy'-y=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_nx^{\alpha+n}+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_nx^{\alpha+n}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{\alpha+n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{\underbrace{(\alpha+n)(\alpha+n-1)+(\alpha+n)-1}_{(\alpha+n)(\alpha+n-1+1)-1 \\ =(\alpha+n)^2-1=(\alpha+n-1)(\alpha+n+1)}\}c_nx^{\alpha+n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n-1)(\alpha+n+1)c_nx^{\alpha+n}.$$

$$\Rightarrow (\alpha+n-1)(\alpha+n+1)c_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

まず, $n=0$ のときを考える.

$$(\alpha-1)(\alpha+1)c_0=0.$$

$c_0=0$ とはせずに $(\alpha-1)(\alpha+1)=0$ となる場合を考える. このとき

$$\alpha=1,\ \alpha=-1$$

である. $\alpha=1$ のとき 漸化式は

$$n(n+2)c_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

であるから

$$\left.\begin{array}{llll} n=0 & 0\times c_0=0 & \Rightarrow & c_0=A\ (任意) \\ n=1 & 3\times c_1=0 & \Rightarrow & c_1=0 \\ n=2 & 4\times2\times c_2=0 & \Rightarrow & c_2=0 \\ n=3 & 5\times3\times c_3=0 & \Rightarrow & c_3=0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \begin{aligned} y_1&=x^1\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \\ &=x(A+0+0+\cdots) \\ &=Ax \end{aligned}$$

$\alpha=-1$ のとき漸化式は

$$n(n-2)c_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

であるから、

$$\left.\begin{array}{llll} n=0 & 0\times c_0=0 & \Rightarrow & c_0=B \\ n=1 & 1\times(-1)\times c_1=0 & \Rightarrow & c_1=0 \\ n=2 & 0\times c_2=0 & \Rightarrow & c_2=C \\ n=3 & 3\times1\times c_3=0 & \Rightarrow & c_3=0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \begin{aligned} y_2&=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \\ &=\frac{1}{x}(B+0+Cx^2+0+\cdots) \\ &=\frac{B}{x}+Cx. \end{aligned}$$

よって一般解は

$$y=y_1+y_2=Ax+\frac{B}{x}+Cx=(A+C)x+\frac{B}{x}=Ax+\frac{B}{x}$$

と得られる。

注（正則点）

関数 $f(x)$ が巾級数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

と表されて収束するとき、$f(x)$ は $x=x_0$ で解析的(analitic)であるという

$x=x_0$ を正則点、正常点(ordinary point)という。

正則点でない場合を特異点(singular point)という。

$\boxed{\text{定義}}$（確定特異点）

微分方程式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

の係数 $p(x), q(x)$ は $x=x_0$ で特異点をもつが、

$$(x-x_0)p(x), \quad (x-x_0)^2q(x)$$

は $x=x_0$ で正則であるとする。このとき $x=x_0$ を微分方程式の確定特異点(regular singular point)という。

$\boxed{例}$(巾級数展開)

$x(x+2)y''+(x+1)y'-4y=0$ の一般解をもとめる.

$$y''+\frac{x+1}{x(x+2)}y'-\frac{4}{x(x+2)}y=0$$ と変形する.

$p(x)=\dfrac{x+1}{x(x+2)}$, $q(x)=\dfrac{-4}{x(x+2)}$ は $x=0$ で特異点をもつが,

$xp(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$, $x^2q(x)=\dfrac{-4x}{x+2}$ は $x=0$ で正則である.

よって, $x=0$ は確定特異点であるので解として

$$y=x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

と仮定する.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{\alpha+n},\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_nx^{\alpha+n-1},\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_nx^{\alpha+n-2}$$

を代入すると.

$$0=x^2y''+2xy''+xy'+y'-4y$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n\underbrace{x^{\alpha+n}}_{\alpha次}+\sum_{n=0}^{\infty}2(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n\underbrace{x^{\alpha+n-1}}_{\alpha-1次}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_n\underbrace{x^{\alpha+n}}_{\alpha次}+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_n\underbrace{x^{\alpha+n-1}}_{\alpha-1次}-\sum_{n=0}^{\infty}4c_n\underbrace{x^{\alpha+n}}_{\alpha次}$$

$n-1\to n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_nx^{\alpha+n}+\left(2\alpha(\alpha-1)c_0x^{\alpha-1}+\sum_{n=1}^{\infty}2(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_nx^{\alpha+n-1}\right)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_nx^{\alpha+n}+\left(\alpha c_0x^{\alpha-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)c_nx^{\alpha+n-1}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}4c_nx^{\alpha+n}$$

$n-1\to n$

$$=\{\underbrace{2\alpha(\alpha-1)+\alpha}_{\alpha(2\alpha-2+1)=\alpha(2\alpha-1)}\}c_0x^{\alpha-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n+2(\alpha+n+1)(\alpha+n)c_{n+1}+(\alpha+n)c_n+(\alpha+n+1)c_{n+1}-4c_n\}x^{\alpha+n}$$

$$=\alpha(2\alpha-1)c_0x^{\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\{\underbrace{(\alpha+n)(\alpha+n-1)+(\alpha+n)-4}_{(\alpha+n)(\alpha+n\cancel{-1+1})-4}\}c_n+\{\underbrace{2(\alpha+n+1)(\alpha+n)+(\alpha+n+1)}_{(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+1)}\}c_{n+1}\Big\}x^{\alpha+n}$$

$=(\alpha+n)^2-4$

$=(\alpha+n+2)(\alpha+n-2)$

$$0=\alpha(2\alpha-1)c_0x^{\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(\alpha+n+2)(\alpha+n-2)c_n+(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+1)c_{n+1}\right\}x^{\alpha+n}$$

まず、$x^{\alpha-1}$ の項が消えるように

$$\alpha(2\alpha-1)=0$$

とする。$\alpha=0,\frac{1}{2}$ となる。c_0 は任意定数である。

$\alpha=0$ のとき

$$(n+2)(n-2)c_n+(n+1)(2n+1)c_{n+1}=0 \quad (n=0,1,\cdots)$$

$$c_{n+1}=-\frac{(n+2)(n-2)}{(n+1)(2n+1)}c_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\begin{cases} c_0=A \ (\text{任意}) \\ c_1=-\dfrac{2\times(-2)}{1\times 1}c_0=4A \\ c_2=-\dfrac{\cancel{3}\times(-1)}{2\times\cancel{3}}\times 4A=2A \\ c_3=-\dfrac{4\times 0}{3\times 5}\times 2A=0 \\ c_4=-\dfrac{5\times 1}{4\times 7}\times 0=0 \\ c_5=0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1=x^0\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$
$$=A+4Ax+2Ax^2+0+\cdots$$
$$=A+4Ax+2Ax^2$$
$$=A(1+4x+2x^2)$$

$\alpha=\frac{1}{2}$ のとき

$$\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)c_n+\left(n+\frac{3}{2}\right)(2n+2)c_{n+1}=0$$

$$(2n+5)(2n-3)c_n+4(2n+3)(n+1)c_{n+1}=0$$

$$c_{n+1}=-\frac{(2n+5)(2n-3)}{4(2n+3)(n+1)} \quad (n=0,1,\cdots)$$

$$c_0=B \ (\text{任意})$$

$$c_1=-\frac{5\times(-\cancel{3})}{4\times\cancel{3}\times 1}c_0=\frac{5}{4}B$$

$$c_2=-\frac{7\times(-1)}{4\times\cancel{5}\times 2}\,\frac{\cancel{5}}{4}B=\frac{7}{4^2\times 2}B$$

$$c_3=-\frac{9\times 1}{4\times\cancel{7}\times 3}\times\frac{\cancel{7}}{4^2\times 2}B=-\frac{9}{4^3\times 3!}B$$

$$c_4=-\frac{11\times 3}{4\times\cancel{9}\times 4}\times\frac{\cancel{9}}{4^3\times 3!}B=+\frac{11\times 3}{4^4\times 4!}B$$

$$c_5=-\frac{13\times 5}{4\times\cancel{11}\times 5}\times\frac{\cancel{11}\times 3}{4^4\times 4!}B=-\frac{13\times 5!!}{4^5\times 5!}$$

$$c_6=-\frac{15\times 7}{4\times\cancel{13}\times 6}\,\frac{-\cancel{13}\times 5!!}{4^5\times 5!}B$$
$$=+\frac{15\times 7!!}{4^6\times 5!}B$$

$$\cdots$$

$$c_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{(2n+3)(2n-5)!!}{n!}$$
$$(n=3,4,5,\cdots)$$

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = B\sqrt{x}\left\{1-5\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{7}{2}\left(-\frac{x}{4}\right)^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2n+3)(2n-5)!!}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n\right\}$$

収束半径は $b_n = \dfrac{(2n+3)(2n-5)!!}{n!}$ より

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)\cancel{(2n-5)!!}}{\cancel{n!}}\cdot\frac{(n+1)\cancel{n!}}{(2n+5)(2n-3)\cancel{(2n-5)!!}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(n+1)}{(2n+5)(2n-3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{5}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)} = \frac{(2+0)(1+0)}{(2+0)(2-0)}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

よって，y_2は $|x|<\frac{1}{2}$ において収束する．

以上より一般解は，

$$y = y_1 + y_2 = A(1+4x+2x^2)$$

$$+ B\sqrt{x}\left\{1-5\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{7}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2n+3)(2n-5)!!}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n\right\}$$

$$\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$$

と得られる．