線形代数学 II(2)(近藤)
中間試験

（注意）　$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ の内積：標準的な内積 $(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\overline{\boldsymbol{y}}$,　　$\mathbb{R}[x]_n$ の内積：$(f\,,\,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$

問 1.　次の 2 つのベクトルが直交するよう実数 a を定めよ．答えのみを解答欄に記入せよ．(10 点)

(1) $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$　(2) $\begin{bmatrix}1+i\\-2-3i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a-i\\7+i\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$　(3) $\begin{bmatrix}1\\a\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-2\\a\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$　(4) $1+x,\ a-x\ \in \mathbb{R}[x]_1$

問 2.　ベクトル空間 V の部分集合 W が V の部分空間となるか答えよ．部分空間である場合は解答欄に○を記入し，部分空間ではない場合は解答欄に×を記入せよ．(10 点)

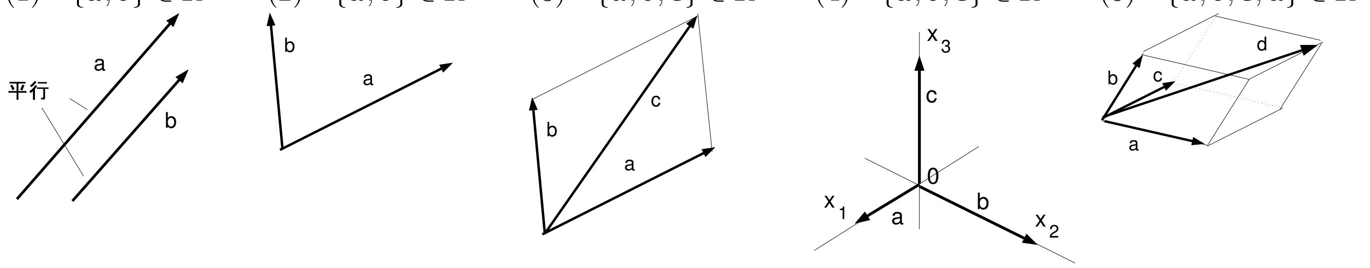
(1) $V = \mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 1 \right\}$　(2) $V = \mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

(3) $V = \mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 1 \right\}$　(4) $V = \mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}c\\-c\\0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$

(5) $V = \mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix}c\\-c\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$

問 3.　次のベクトルの組は 1 次独立であるか答えよ．1 次独立な場合は解答欄に○を記入し，1 次従属な場合は解答欄に×を記入せよ．(10 点)

(1)　$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in \mathbb{R}^2$　(2)　$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in \mathbb{R}^2$　(3)　$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \in \mathbb{R}^2$　(4)　$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \in \mathbb{R}^3$　(5)　$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\} \in \mathbb{R}^3$



問 4.　写像 f は線形写像であるか答えよ．線形写像である場合は解答欄に○を記入し，線形写像ではない場合は解答欄に×を記入せよ．(10 点)

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; 点 $\boldsymbol{x}$ から点 $\boldsymbol{x}$ と原点 $\boldsymbol{0}$ との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$.

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ y = f(\boldsymbol{x}) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$　(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ y = f(\boldsymbol{x}) = x_1x_2$

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}x_1 + x_2\\x_2\end{bmatrix}$　(5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}x_1 + 1\\2x_2\\x_1 + x_2\end{bmatrix}$

問 5.　ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_5\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数とそのときの組合せの 1 つを示せ．また，それ以外の 1 次従属なベクトルを 1 次独立なベクトルの 1 次結合で表せ．(10 点)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

問 6.　解空間 W の基底と次元を求めよ．(10 点)

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

問 7.　$\mathbb{R}^3$ の基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ をグラム・シュミットの直交化法で正規直交化し，正規直交基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ．また，ベクトル $\boldsymbol{p}$ の正規直交基底 Σ' における座標を求めよ．(10 点)

$$\Sigma = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

問 8.　線形写像 f の標準基底における行列表示 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を求めよ．(10 点)

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{x}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\boldsymbol{x}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\boldsymbol{x}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ をみたす．

問 9.　次の線形写像 f の核，像，退化次数，階数を求めよ．(10 点)

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4; f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

問 10.　$\mathbb{R}^2$ において，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ を原点 $\boldsymbol{0}$ を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転したベクトルを $\boldsymbol{y}$ とし，さらに $\boldsymbol{y}$ を x_1 軸に対して鏡映変換したベクトル（x_1 軸に対して線対称なベクトル）を $\boldsymbol{z}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を求めよ．また，3 つの変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{z}$ の標準基底における表現行列をそれぞれ求めよ．(10 点)

解答欄

問 1.

(1) $a =$	(2) $a =$
(3) $a =$	(4) $a =$

問 2.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

問 3.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

問 4.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)