# 線形代数学 II

近藤弘一

最終更新：平成 18 年 1 月 17 日

## 目 次

# 1 集合と写像

## 1.1 集合

**定義 1.1 (集合)** ある一定範囲にある対象物の集まりを１つの全体として考えるとき，これを**集合（set）**という．その範囲内の個々の対象物を**元**または**要素（element）**という．$x$ が集合 $X$ の元であることを，$x$ は $X$ に**属する（belong）**，または $X$ は $x$ を**含む（包含する）（contain）**といい，$x \in X$ と表記する．その否定を $x \notin X$ と表記する．

ある元 $x$ が条件 $C(x)$ をみたすとする．このとき，条件をみたす $x$ 全体の集合を

$$X = \{\, x \mid C(x) \,\}$$

と表記する．

**定義 1.2 (数の集合)**

- **自然数（natural number）**全体の集合：

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

- **整数（integer）**全体の集合：

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

- **有理数（rational number, rational integer）**全体の集合：

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- **実数（real number）**全体の集合：

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \{\, \text{有理数と}\textbf{無理数（irrational number）}\text{全体の集合} \,\} \\ &= \left\{ a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z};\ b_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\} \right\}. \end{aligned}$$

- **複素数（complex number）**全体の集合：

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R};\ i^2 = -1 \right\}.$$

**定義 1.3 (行列の集合)**

- 実列ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 複素列ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

- 実行ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{R}_n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 複素行ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

- 実行列全体の集合：

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R};\ i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n \right\}.$$

- 複素行列全体の集合：

$$\mathbb{C}^{m\times n} = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{C};\, i = 1, 2, \cdots, m;\, j = 1, 2, \cdots, n \right\}.$$

**定義 1.4 (その他の集合)**

- 高々 $n$ 次の実係数多項式全体の集合：

$$\mathbb{R}[x]_n = \left\{\, f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \,\right\}.$$

- 区間 $(a, b)$ で連続な関数全体の集合： $C(a, b)$.
- $n$ 回微分可能でかつ $n$ 階導関数が連続な関数全体の集合： $C^n$.
- 無限回微分可能な関数全体の集合： $C^\infty$.

## 1.2　部分集合

**定義 1.5 (集合の包含関係)**

- 元を 1 つも含まない集合を**空集合（empty set）**といい，$X = \emptyset$ と表記する．
- 集合 $X$ と $Y$ に含まれる元が全て等しいとき $X = Y$ と表記する．$X = Y$ ではないとき $X \neq Y$ と書く．
- $X$ に含まれる全ての元が $Y$ に含まれるとき，$Y$ は $X$ を**含む（contain）**，または，$X$ は $Y$ の**部分集合（subset）**といい，$X \subset Y$ と表記する．$X \subset Y$ ではないとき $X \not\subset Y$ と書く．

**注意 1.6 (真部分集合)** $X \subset Y$ は定義より $X = Y$ の意味も含む．$X \subset Y$ でありかつ $X \neq Y$ のときは，$X$ は $Y$ の**真部分集合（proper subset）**という．これを $X \subsetneq Y$ と表記する．書物によっては部分集合に $\subseteq$ を用い，真部分集合に $\subset$ を用いる場合もあるので注意が必要である．

**例 1.7 (包含関係の具体例)**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

**例 1.8 (包含関係の具体例)**

$$X = \{\, (x, y) \mid x + y \leq 1 \,\}, \qquad Y = \{\, (x, y) \mid x + y \leq 0 \,\}$$

のとき

$$X \supset Y$$

が成立する．

### 1.3　集合算

**定義 1.9 (和，積)**

- $X$ と $Y$ の**合併集合**（**union, join**）または**和集合**（**sum**）:

$$X \cup Y = \{\, x \mid x \in X \text{ または } x \in Y \,\}$$

- $X$ と $Y$ の**共通部分**（**intersection**）または**積集合**（**product**）：

$$X \cap Y = \{\, x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y \,\}$$

**定理 1.10 (和集合，積集合の性質)**

- **可換則**（**commutative law**）：

$$X \cup Y = Y \cup X, \qquad X \cap Y = Y \cap X$$

- **結合則**（**associative law**）：

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \qquad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

- **分配則**（**distributive law**）：

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \qquad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

- **吸収則**（**absorption law**）：

$$X \cup (X \cap Y) = X, \qquad X \cap (X \cup Y) = X$$

**問 1.11 (和集合，積集合の性質)** これを図を書いて示せ．

**定義 1.12 (互いに素)** $X \cap Y = \emptyset$ のとき $X$ と $Y$ は**互いに素**（**disjoint**）であるという．

**注意 1.13 (直和集合)** $X$ と $Y$ が互いに素のとき，すなわち $X \cap Y = \emptyset$ をみたすとき，和集合を $X \cup Y = X \dot{+} Y$ と書き，**直和集合**（**disjoint union**）という．

**注意 1.14 (直積集合)** **直積集合**（**direct product set, Cartesian product set**）：

$$X \times Y = \{\, (x, y) \mid x \in X,\, y \in Y \,\}$$

### 1.4　体

ある集合の元に対して四則演算が定義され，その集合内で閉じているとき，その集合を体と呼ぶ．正確には次のように定義される．

**定義 1.15 (体)** 集合 $K$ の任意の 2 つの元 $a, b$ に対して，加法 $a+b$ と乗法 $ab$ が定義されているとする．

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $(a+b)+c = a+(b+c)$. | （和の結合則） |
| (2) | $\forall a + \exists 0 = a = 0 + a$. | （零元 0 の存在） |
| (3) | $\forall a + \exists(-a) = 0 = (-a) + a$. | （和の逆元 $-a$ の存在） |
| (4) | $a+b = b+a$. | （和の交換則） |
| (5) | $(ab)c = a(bc)$. | （積の結合則） |
| (6) | $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$. | （分配則） |
| (7) | $ab = ba$. | （積の交換則） |
| (8) | $\forall a \exists 1 = a = 1a$. | （単位元 1 の存在） |
| (9) | $\forall a \exists (a^{-1}) = 1 = (a^{-1})a$．ただし，$a \neq 0$ とする． | （積の逆元 $a^{-1}$ の存在） |

- 条件 (1)–(3) を満たすとき，集合 $K$ を**群（group）**と呼ぶ.
- 条件 (1)–(4) を満たすとき，集合 $K$ を**可換群（commutative group）**または**アーベル群（Abel group）**と呼ぶ.
- 条件 (1)–(6) を満たすとき，集合 $K$ を**環（ring）**と呼ぶ.
- 条件 (1)–(7) を満たすとき，集合 $K$ を**可換環（commutative ring）**と呼ぶ.
- 条件 (1)–(9) を満たすとき，集合 $K$ を**体（field）**と呼ぶ．ただし，条件 (7) を満たさない体を**非可換体（noncommutative field）**と呼ぶ.

**例 1.16 (体の具体例)** 数の集合

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

を考える．

- 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を考える．$\mathbb{N}$ は加法，乗法ともに群をなさない．なぜなら，和の逆元 $-a$，積の逆元 $a^{-1}$ は自然数の範囲内で存在しないからである．
- 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を考える．$\mathbb{Z}$ は可換環である．積の逆元が存在しないので体とはならないことに注意する．
- 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を考える．$\mathbb{Q}$ は体である．
- 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を考える．$\mathbb{R}$ は体である．$\mathbb{R}$ を**実数体（real number field）**と呼ぶ.
- 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を考える．$\mathbb{C}$ は体である．$\mathbb{C}$ を**複素数体（complex number field）**と呼ぶ.

**例 1.17 (体の具体例)**

- 0 でない実数全体の集合 $\mathbb{R}^*$ は乗法に関して可換群となる．（$\because$）積 $\times$ を和 $+$ に置き換えて考える．条件 (5), (8), (9), (7) は条件 (1), (2), (3), (4) とみなせる．
- 行列の集合 $\mathbb{R}^{m\times n}$ は加法に関して可換群となる．（$\because$）(1) $(A+B)+C = A+(B+C)$. (2) $A+O = A$. (3) $A+(-A) = O$. (4) $A+B = B+A$.

- 正方行列の集合 $\mathbb{R}^{n\times n}$ は加法と乗法に関して環となる.（∵）条件 (1)–(4) と (5) $(AB)C = A(BC)$. (6) $A(B+C) = AB + AC$. (注意) 単位元は単位行列 $E$ である．$AB \neq BA$ であるから可換環ではない.

- 正則な $n \times n$ 型行列の集合 $GL(n)$ は非可換体となる.（∵）(8) $AE = A$. (9) $AA^{-1} = E$. (7) $AB \neq BA$.

### 1.5　体の性質

**定理 1.18 (体の性質)** 体 $K$ について次の条件が成り立つ：

(i) 零元 0，単位元 1 は唯一つに定まる.

(ii) 和の逆元 $-a$ は各 $a$ に対して唯一つに定まる.

(iii) 積の逆元 $a^{-1}$ は各 $a$ に対して唯一つに定まる.

(iv) $-(-a) = a$.

(v) $0a = 0$.

(vi) $(-1)a = -a$.

(vii) $(-1)(-1) = 1$.

(viii) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$.

(ix) $(-a)(-b) = ab$.

(x) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ または $b = 0$.

(xi) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.

(xii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

**問 1.19 (零元，単位元，逆元の一意性)** これを示せ.

（証明）　(i) 零元が $0, 0'$ と二つ存在するとする．すなわち

$$0 + a = a = 0 + a\,, \quad 0' + a = a = 0' + a$$

とする．この式は全ての元 $a$ で成立するので，第一式の $a$ を $0'$ とし，第二式の $a$ を $0$ とすると

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0'\,, \quad 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

となる．$0 + 0' = 0', 0 + 0' = 0$ より，$0 = 0'$ を得る．零元は唯一つに定まる.

(ii) $a$ の和の逆元が $b, b'$ と二つ存在するとする．すなわち

$$a + b = b + a = 0\,, \quad a + b' = b' + a = 0$$

とする．$a + b = 0$ に左から $b'$ を加えると

$$b' + (a + b) = b' + 0$$

となる．和の結合則より左辺の和の順を変える．右辺は零元を加えているので

$$(b' + a) + b = b'$$

が成り立つ．$b' + a = 0$ を用いると

$$0 + b = b'$$

である．よって

$$b = b'$$

を得る．$a$ に対する和の逆元は唯一つに定まる．

(iii) は (ii) と同様に示される．他は自習とする．

## 1.6 複素数

**定義 1.20 (複素数) 複素数（complex number）**とは，実数 $a, b$ に対して $z = a + ib$ で定まる数である．ただし $i$ は $i^2 = -1$ をみたし，**虚数単位（imaginary unit）**と呼ぶ．複素数 $z = a + ib$ の $a$ を**実部（real part）**といい $a = \mathrm{Re}(z)$ と表す．$b$ を**虚部（imaginary part）**といい $b = \mathrm{Im}(z)$ と表す．虚部が $\mathrm{Im}(z) = 0$ のとき $z$ は**実数（real number）**といい，実部が $\mathrm{Re}(z) = 0$ のとき $z$ は**純虚数（pure imaginary number）**という．

**定義 1.21 (複素平面)** 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と表す．この集合を実部 $\mathrm{Re}(z)$ を横軸に虚部 $\mathrm{Im}(z)$ を縦軸にとることできる平面を**複素平面（complex plane）**と呼ぶ．このとき横軸を**実軸（real axis）**といい，縦軸を**虚軸（imaginary axis）**という．

**定義 1.22 (複素共役)** 複素数 $z = a + ib$ に対して複素数 $\overline{z} = a - ib$ を $z$ の**複素共役（complex conjugate）**という．

**定義 1.23 (複素数の絶対値と偏角)** 複素数 $z = a + ib$ に対して実数 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ を $z$ の**絶対値（absolute value）**または**大きさ（modulus）**という．$\arg z = \arctan(b/a)$ を $z$ の**偏角（argument）**という．

**注意 1.24 (複素数の絶対値と偏角)** 複素平面上で原点 0 とあるある複素数 $z$ との距離は $|z|$ である．また，実軸と 2 点 $0, z$ を通る直線とのなす角は $\arg z$ である．

**定理 1.25 (複素数の性質)** 複素数 $z, w$ に対して次の性質が成り立つ：

(i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(ii) $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$.

(iii) $|z + w| \le |z| + |w|$.

(iv) $|zw| = |z||w|$.

(v) $|z|^2 = z\overline{z}$.

(vi) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$.

(vii) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

(viii) $z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z$ は実数.

(ix) $z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z$ は純虚数.

**問 1.26 (複素数の性質)** これらの性質を示せ.

## 1.7 写像

**定義 1.27 (写像)** 集合 $X, Y$ において，$X$ の各元 $x$ に対して $Y$ の元 $y$ を 1 つずつ対応させる規則 $f$ が定まっているとき，$f$ を $X$ から $Y$ への**写像（mapping）**という．これを

$$
\begin{aligned}
&f : X \to Y \\
&X \xrightarrow{f} Y \\
&f : x \mapsto y \\
&y = f(x)
\end{aligned}
$$

と表記する．$f$ は**関数（function）**とも呼ばれる．また，$X = Y$ のときは，特に写像のことを**変換（transformation）**ともいう．

**例 1.28 (写像の具体例)** ひらがなの集合とカタカナの集合

$$X = \{\,あ, い, う, え, お, か, \cdots\}, \qquad Y = \{\,ア, イ, ウ, エ, オ, カ, \cdots\}$$

を考える．ひらがなをカタカナに書き換えるという規則を $f$ とするとき，$f$ は $X$ から $Y$ への写像であり，

$$f(あ) = ア, \quad f(い) = イ, \quad f(う) = ウ, \quad f(う) = エ, \quad f(お) = オ, \quad f(か) = カ, \quad \cdots$$

と書ける．

**例 1.29 (写像の具体例)** ある実数を 2 倍して 1 を足すという規則を $f$ とする．このとき $f$ は写像であり，

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \\
&f : x \mapsto y; \\
&y = f(x) = 2x + 1
\end{aligned}
$$

と表される．

## 1.8 合成写像

**定義 1.30 (合成写像)** 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して，

$$h : X \to Z; \qquad z = h(x) = g(f(x))$$

で定義される写像を

$$h = g \circ f$$

と表記し，$f$ と $g$ の**合成写像（composite）**という．

**例 1.31 (合成写像の具体例)** 写像

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad & y = f(x) = 2x + 1, \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad & z = g(y) = y^2 - 1 \end{aligned}$$

の合成写像は

$$\begin{aligned} & h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \\ & z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 1 = 4x(x + 1) \end{aligned}$$

である．

**定理 1.32 (合成写像の性質)** 写像の合成に対して結合則

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ．

## 1.9 恒等写像，逆写像

**定義 1.33 (恒等写像)** 写像 $f : X \to X$ がすべての $x \in X$ に対して $f(x) = x$ をみたすとき，$f$ を**恒等写像（identity mapping）**といい，

$$f = \mathrm{id}$$

と表記する．

**例 1.34 (恒等写像の具体例)** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = x$ は恒等写像である．

**定義 1.35 (逆写像)** 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ の合成写像が

$$g \circ f = \mathrm{id}$$

をみたすとき，$g$ を $f$ の**逆写像（inverse mapping）**といい，

$$g = f^{-1}$$

と表記する．

**例 1.36 (逆写像の具体例)** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = 2x + 1$ の逆写像は $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x = f^{-1}(y) = (y - 1)/2$ である．

**例 1.37 (逆写像をもたない具体例)** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = 2x^2 + 1$ の逆写像 $f^{-1}$ は存在しない．

## 1.10 全単射

**定義 1.38 (定義域，値域)** 写像 $f : X \to Y$ に関して，$X$ を**定義域（domain）**といい，

$$f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\}$$

で定義される集合を**値域（range）**または**像（image）**という．

**例 1.39 (値域の具体例)** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = 2x + 1$ の定義域は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ であり，値域または $f$ の像は $f(\mathbb{R}) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ である．

**例 1.40 (値域の具体例)** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = 2x^2 + 1$ の定義域は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ であり，値域または $f$ の像は $f(\mathbb{R}) = [1, \infty) \subsetneq \mathbb{R}$ である．

**定義 1.41 (写像の分類)** 写像 $f : X \to Y$ に対して次の分類を定義する．

- $f(X) = Y$ をみたすとき．$f$ を**上への写像（onto-mapping）**または**全射（surjection）**という．
- 異なる 2 つの元 $x_1$, $x_2 \in X$ に対して $f(x_1) \neq f(x_2)$ となるとき，すなわち，ある元 $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となるただ 1 つの元 $x \in X$ が定まるとき，$f$ を **1 対 1 写像（one-to-one mapping）**または**単射（injection）**という．
- 単射かつ全射のとき $f$ を**上への 1 対 1 写像（onto one-to-one mapping）**または**全単射（bijection）**という．

**定理 1.42 (逆写像)** 全単射のとき逆写像をもつ．

**例 1.43 (全単射の具体例)** 写像

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad y = f(x) = ax + b$$

は上への 1 対 1 写像である．また，このとき逆写像をもち，

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

と表される．

**例 1.44 (全単射ではない具体例)** 写像

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad y = f(x) = ax^2 + b$$

を考える．$y \geq b$ より $f(\mathbb{R}) = [b, \infty) \neq \mathbb{R}$ をみたし，$f$ は上への写像ではない．さらには，$x = 1, -1$ に対して $y = a + b$ となり，2 対 1 の写像であり 1 対 1 写像ではない．またこれらより，逆写像 $f^{-1}$ は存在しない．

# 2　数ベクトル空間

## 2.1　数ベクトル空間

**定義 2.1** (*n* **次元実ベクトル空間**) 要素が実数の列ベクトル全体の集合

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \ a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

に次の演算 (i) **スカラー倍（scalar product）**, (ii) **ベクトルの和**が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $n$ **次元実ベクトル空間（$n$-dimensional real vector space）**という．

(i) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\alpha\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

**定義 2.2** (*n* **次元複素ベクトル空間**) 要素が複素数の列ベクトル全体の集合

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \ a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

に次の演算 (i) スカラー倍，(ii) ベクトルの和が定義されているとき，$\mathbb{C}^n$ を $n$ **次元複素ベクトル空間（$n$-dimensional complex vector space）**という．

(i) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\alpha\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

(ii) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

**定義 2.3** (**数ベクトル空間**) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ を**数ベクトル空間（number vector space）**という．

## 2.2 数ベクトル空間の性質

**注意 2.4 (零ベクトル)** $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$ を**零ベクトル（zero vector）**という．零ベクトルは

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}, \qquad \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

をみたす.

**注意 2.5 (逆ベクトルと差)** $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**を

$$-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

と定義する．また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**差**を

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-1)\boldsymbol{a}$$

と定義する.

**定理 2.6 (ベクトルの演算の性質)** ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ （または $\mathbb{C}^n$）とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ （または $\mathbb{C}$）に対して次の性質が成立する：

(i) **（交換則）**$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

(ii) **（結合則）**$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

(iii) **（スカラー倍に関する結合則）**$\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$.

(iv) **（スカラー倍に関する分配即）**$(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$.

(v) **（スカラー倍に関する分配即）**$\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$.

**問 2.7 (ベクトルの演算の性質)** この定理をスカラー倍とベクトルの和の定義を用いて証明せよ.

## 2.3 実ベクトルの内積

**定義 2.8 (内積)** $\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

に対して

$$(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \sum_{k}^{n} a_k b_k = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

なる 2 項演算を**内積（inner product）**という.

**例 2.9 (内積の具体例)** ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

の内積は

$$(\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 1$$

である．ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

の内積は

$$(\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 2$$

である．

**定理 2.10 (内積の性質)** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

(i) **（内積の交換則）** $(\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\,, \boldsymbol{a})$.

(ii) **（内積の分配則）** $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\,, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}\,, \boldsymbol{c})$.

(iii) **（内積のスカラー倍の結合則）** $(\alpha \boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b}) = \alpha\,(\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}\,, \alpha \boldsymbol{b}) = \alpha\,(\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b})$.

(iv) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $(\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{a}) > 0$

**問 2.11 (内積の性質)** これを示せ．

## 2.4 複素ベクトルの内積

**定義 2.12 (内積)** $\mathbb{C}^n$ の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

に対して

$$(\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T \overline{\boldsymbol{b}} = \sum_k^n a_k \bar{b}_k = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \cdots + a_n \bar{b}_n$$

なる 2 項演算を**内積（inner product）**という．

**例 2.13 (内積の具体例)** ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2-2i \\ -1+i \\ -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

の内積は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}) &= a_1\overline{b}_1 + a_2\overline{b}_2 + a_3\overline{b}_3 \\ &= (1+i)\overline{(2-2i)} + (1-i)\overline{(-1+i)} + 1\cdot\overline{(-i)} \\ &= (1+i)(2+2i) + (1-i)(-1-i) + 1\cdot i \\ &= -2+3i\end{aligned}$$

である．

**定理 2.14 (内積の性質)** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

(i) **（内積の交換則）**$(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{a})}$.

(ii) **（内積の分配則）**$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{c})$.

(iii) **（内積のスカラー倍の結合則）**$(\alpha\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}) = \alpha\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}\,,\,\alpha\boldsymbol{b}) = \overline{\alpha}\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})$.

(iv) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\mathbb{R} \ni (\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{a}) > 0$

**問 2.15 (内積の性質)** これを示せ．

## 2.5 内積と行列の積

**注意 2.16 (行列の積と内積)** $l \times m$ 型行列 $A$ を行ベクトルに分割し，$m \times n$ 型行列 $B$ を列ベクトルに分割し

$$A = \begin{bmatrix} {\boldsymbol{a}_1}^T \\ {\boldsymbol{a}_2}^T \\ \vdots \\ {\boldsymbol{a}_l}^T \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_i$ は $m \times 1$ 型の列ベクトルである．このとき積は

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix} {\boldsymbol{a}_1}^T \\ {\boldsymbol{a}_2}^T \\ \vdots \\ {\boldsymbol{a}_l}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {\boldsymbol{a}_1}^T\boldsymbol{b}_1 & {\boldsymbol{a}_1}^T\boldsymbol{b}_2 & \cdots & {\boldsymbol{a}_1}^T\boldsymbol{b}_n \\ {\boldsymbol{a}_2}^T\boldsymbol{b}_1 & {\boldsymbol{a}_2}^T\boldsymbol{b}_2 & \cdots & {\boldsymbol{a}_2}^T\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {\boldsymbol{a}_l}^T\boldsymbol{b}_1 & {\boldsymbol{a}_l}^T\boldsymbol{b}_2 & \cdots & {\boldsymbol{a}_l}^T\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{b}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{b}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{b}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{b}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_l\,,\,\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_l\,,\,\boldsymbol{b}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_l\,,\,\boldsymbol{b}_n) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

と表される．

**定理 2.17 (内積の性質)** 複素行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$; $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ に対して

$$(\boldsymbol{x}\,,\, A\boldsymbol{y}) = (A^*\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{y})$$

が成り立つ．特に $A$ が実行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ であれば

$$(\boldsymbol{x}\,,\, A\boldsymbol{y}) = \left(A^T\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{y}\right)$$

が成り立つ.

（証明）

$$(\boldsymbol{x}\,,\, A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T(\overline{A\boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{x}^T\bar{A})\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{A}^T\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} = \left(\overline{A}^T\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{y}\right) = (A^*\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{y})\,.$$

## 2.6 ノルム

**定義 2.18 (ノルム)** ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ または $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}\,,\, \boldsymbol{a})} = \sqrt{\boldsymbol{a}^T\overline{\boldsymbol{a}}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{a_k}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$$

をベクトルの**ノルム（norm）**または**長さ（length）**という.

**注意 2.19 (ノルムの性質)**

- $\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$.
- $\|\boldsymbol{u}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.
- $\|c\,\boldsymbol{u}\| = |c|\,\|\boldsymbol{u}\|$.

**例 2.20 (ノルムの具体例)** ベトクル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

のノルムはそれぞれ

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}\,,\, \boldsymbol{a})} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\,, \qquad \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{(\boldsymbol{b}\,,\, \boldsymbol{b})} = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

である.

**例 2.21 (ノルムの具体例)** ベトクル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

のノルムはそれぞれ

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} |a_k|^2} = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}\,, \qquad \|\boldsymbol{b}\| \quad = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} |b_k|^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6}$$

である.

**例 2.22 (ノルムの具体例)** ベトクル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

のノルムは

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} |a_k|^2} = \sqrt{|1+i|^2 + |2-3i|^2} = \sqrt{(1^2+1^2)+(2^2+3^2)} = \sqrt{15}$$

である．

**例 2.23 (ノルムの具体例)** ベトクル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2-2i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

のノルムは

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} |a_k|^2} = \sqrt{|12-2i|^2 + |-1|^2 + |-i|^2} = \sqrt{(2^2+(-2)^2)+(-1)^2+1^2} = \sqrt{10}$$

である．

## 2.7 ノルムの性質

**定理 2.24 (ノルムの性質) シュバルツの不等式（Schwartz' inequality）**：

$$|\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})\,| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\,, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$$

（証明） $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} 0 \leq \|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,,\,t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = t^2\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{a}) + t\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}) + t\,(\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{b}) \\ &= t^2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2t\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ． $t$ の 2 次式は

$$0 \leq D = (\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

をみたさなければならない．よって

$$(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})^2 \leq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})\,| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

を得る．

**定理 2.25 (ノルムの性質) 三角不等式**：

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$$

（証明）

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{a}) + 2\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})\,| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \leq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \boldsymbol{b}\|^2 = (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2\end{aligned}$$

より

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$$

を得る．

**定義 2.26 (ノルム)** ノルムはシュバルツの不等式と三角不等式をみたすものであればよい．次に定義される式もノルムとなる．

$$\|\boldsymbol{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}, \qquad \|\boldsymbol{a}\|_3 = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^3}, \qquad \cdots,$$

$$\|\boldsymbol{a}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p}, \qquad \|\boldsymbol{a}\|_\infty = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)$$

## 2.8 単位ベクトル

**定義 2.27 (単位ベクトル)** ノルムが 1 のベクトルを**単位ベクトル（unit vectar）**または**正規化されたベクトル（normalized vector）** という．

**例 2.28 (単位ベクトルの具体例)** ベトクル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

は $\|\boldsymbol{e}_j\| = 1$ であり全て単位ベクトルである．

**定義 2.29 (正規化)** あるベクトルを向きが同じで長さが 1 のベクトルに変換することを**正規化（normalization）**という．

**例 2.30 (正規化の具体例)** ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を正規化し，$\boldsymbol{a}$ と向きが同じ単位ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

と得る．

**例 2.31 (正規化の具体例)** ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を正規化し，$\boldsymbol{a}$ と向きが同じ単位ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

と得る．

## 2.9 ベクトルのなす角

**定義 2.32 (ベクトルの成す角)** 2 つのベトクル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

により与えられる $\theta$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**成す角（angular）**という．また，$\cos\theta$ を**方向余弦（direction cosine）**という．

**注意 2.33 (内積とノルムの比)** シュバルツの不等式より

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \leq 1$$

となることに注意する．

**例 2.34 (成す角の具体例)** ベトクル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

を考える．このとき方向余弦は

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

となるので，成す角は

$$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0.4\pi \simeq 72^\circ$$

である．

**例 2.35 (成す角の具体例)** ベトクル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

を考える．このとき方向余弦は

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

となるので，成す角は

$$\theta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0.34\pi \simeq 62^\circ$$

である．

## 2.10　ベクトルの直交

**定義 2.36 (ベクトルの直交)** $(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})=0$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する（orthogonal）**という．このとき $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ と表記する．

**例 2.37 (ベクトルの直交の具体例)** ベトクル

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

を考える．このとき

$$(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})=1\times1+1\times(-1)=0$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は互いに直交する．

**定義 2.38 (直交系)** ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ が互いに直交するとき，すなわち，

$$(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j)=0,\quad i\neq j$$

をみたすとき，$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ を**直交系（orthogonal system）**という．

**例 2.39 (ベクトルの直交の具体例)** ベトクル

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

は直交系である．なぜなら $i\neq j$ に対して

$$(\boldsymbol{e}_i\,,\,\boldsymbol{e}_j)=0$$

をみたすからである．

**問 2.40 (ベクトルの直交)** 次のベクトルの組は直交系であることを示せ．

(1) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$　(2) $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$　(3) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$

## 2.11　基本ベクトル

**定義 2.41 (基本ベクトル)** $\mathbb{R}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

を $\mathbb{R}^n$ の**基本ベクトル（elemental vector）**という．

**注意 2.42 (基本ベクトルのノルム)** $\|\boldsymbol{e}_j\| = 1$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ であるから，基本ベクトルはすべてノルムは 1 である．

**注意 2.43 (基本ベクトルの直交性)** $(\boldsymbol{e}_i\,,\,\boldsymbol{e}_j) = 0$ $(i \neq j)$ であるから，異なる基本ベクトルどうしは直交する．

**定理 2.44 (基本ベクトルと任意のベクトル)** $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

は $\mathbb{R}^n$ の基本ベトクル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

と表される．

### 2.12　正規直交系

**定義 2.45 (正規直交系)** ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は直交系であり，かつ，すべてのベクトルが単位ベクトルであるとする．すなわち，

$$(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

をみたすとき，このベクトルの組を**正規直交系（orthonormal system）**という．

**例 2.46 (基本ベクトルの正規直交性)** 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ は正規直交系である．

**問 2.47 (正規直交系の具体例)** 次のベクトルの組は正規直交系であることを示せ．

(1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$　(2) $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$　(3) $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

(4) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$　(5) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

## 3　ベクトル空間

### 3.1　ベクトル空間

**定義 3.1 (ベクトル空間)** 集合 $V$ の任意の元 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ と体 $K$ ($\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) の任意の元 $\alpha$ に対して，**和** $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ と**スカラー倍** $\alpha\boldsymbol{u} \in V$ が定義されていて，次の性質 (i)–(viii) をみたすならば，$V$ を $K$ 上の**ベクトル空間（vector space）**と呼び，$V$ の元 $\boldsymbol{v} \in V$ を**ベクトル（vector）**と呼ぶ．

1. **（交換則）**$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.
2. **（結合則）**$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$.

3. **（零元の存在）**$\boldsymbol{u} + \exists\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

4. **（スカラー倍に関する結合則）**$\alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$.

5. **（スカラー倍に関する分配即）**$(\alpha+\beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$.

6. **（スカラー倍に関する分配即）**$\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$.

7. **（スカラー倍に関する単位元）**$1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

8. **（スカラー倍に関する零元）**$0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

**例 3.2 (ベクトル空間の例)**

- 実列ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \ a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

  条件 (i)–(viii) をみたすので $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である.

- 複素列ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \ a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

  条件 (i)–(viii) をみたすので $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である.

- 実行ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{R}_n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \middle| \ a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

  条件 (i)–(viii) をみたすので $\mathbb{R}_n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である.

- 複素行ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \middle| \ a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

  条件 (i)–(viii) をみたすので $\mathbb{C}_n$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である.

- 高々 $n$ 次の実係数多項式全体の集合：

$$\mathbb{R}[x]_n = \left\{ \ f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \ \middle| \ a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

  $\mathbb{R}[x]_n$ の元は多項式であり

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x]_n \ni f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \\ \mathbb{R}[x]_n \ni g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \end{aligned}$$

と表される．これらの和は

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n \\
&= c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n \in \mathbb{R}[x]_n
\end{aligned}
$$

となり，スカラー倍は

$$
\begin{aligned}
(\alpha f)(x) &= (\alpha a_0)+(\alpha a_1)x+(\alpha a_2)x^2+\cdots+(\alpha a_n)x^n \\
&= c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n \in \mathbb{R}[x]_n
\end{aligned}
$$

となる．$\mathbb{R}[x]_n$ は和とスカラー倍の演算について閉じている．また，条件 (i)–(viii) をみたすので，$\mathbb{R}[x]_n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．

- 区間 $(a,b)$ で連続な関数全体の集合： $C(a,b)$．$C(a,b)$ の元は関数であり $f(x),g(x)\in C(a,b)$ とおく．これらの和は

  $$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\in C(a,b)$$

  であり連続関数となる．スカラー倍は

  $$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)\in C(a,b)$$

  であり連続関数となる．$C(a,b)$ は和とスカラー倍に関して閉じている．また，条件 (i)–(viii) をみたすので，$C(a,b)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．

- 無限回微分可能な関数全体の集合 $C^\infty$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．

## 3.2 内積空間

**定義 3.3 (実ベクトル空間の内積)** $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $V$ の任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して，2 項演算 $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})$ が次の条件 (i)–(iv) をみたすとき，演算 $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})$ を**内積（inner product）**という．

(i) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'\,,\,\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}'\,,\,\boldsymbol{v})$.

(ii) $(\alpha\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})=\alpha\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(iii) $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{u})$.

(iv) $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ のとき $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{u})\neq 0$.

**定義 3.4 (複素ベクトル空間の内積)** $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $V$ の任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して，2 項演算 $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})$ が次の条件 (i)–(iv) をみたすとき，演算 $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})$ を**内積（inner product）**という．

(i) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'\,,\,\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}'\,,\,\boldsymbol{v})$.

(ii) $(\alpha\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})=\alpha\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})$, $\alpha\in\mathbb{C}$.

(iii) $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})=\overline{(\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{u})}$.

(iv) $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ のとき $\mathbb{R}\ni(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{u})\neq 0$.

**注意 3.5 (複素ベクトル空間の内積)**

(iia) $(\alpha\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = \alpha\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})$.

(iib) $(\boldsymbol{u}\,,\,\alpha\boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})$.　　（$\Leftarrow$(i), (ii)）

**定義 3.6 (内積空間)** 内積が定義されたベクトル空間を**内積空間（inner product space）**という．

**定義 3.7 (標準的な内積)** 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に対して内積

$$(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

を $\mathbb{R}^n$ の**標準的な内積**という．また，複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ に対して内積

$$(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T\overline{\boldsymbol{v}} = \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k} = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

を $\mathbb{C}^n$ の**標準的な内積**という．

**問 3.8 (標準的な内積)** 標準的な内積が内積の定義 (i)–(iv) をみたすことを示せ．

**問 3.9 (内積の具体例)** 区間 $(a, b)$ で連続関数の集合 $C(a, b)$ はベクトル空間である．$C(a, b)$ の 2 つのベクトル $f(x)$, $g(x)$ に対して 2 項演算 $(f\,,\,g)$ を

$$(f\,,\,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

と定義する．この演算は性質 (i)–(iv) をみたすので内積となる．これを示せ．

**問 3.10 (内積の具体例)** $\mathbb{R}[x]_n$ の 2 つのベクトル $f(x)$, $g(x)$ に対して 2 項演算

$$(f\,,\,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

は性質 (i)–(iv) をみたすので内積となる．これを示せ．

## 3.3　一般のベクトル空間におけるノルムと直交系

**定義 3.11 (ノルム)** 内積空間 $V$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})}$$

をベクトル $\boldsymbol{x}$ の**ノルム（norm）**という．

**定義 3.12 (方向余弦)** $\mathbb{R}$ 上の内積空間 $V$ において

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}, \qquad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$$

を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の**方向余弦**という．

**定義 3.13 (直交，直交系，正規直交系)** 内積空間 $V$ において次の定義をする．

(i) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ が $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$ をみたすとき $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{v}$ は**直交**するという．

(ii) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が $\|\boldsymbol{u}_i\| \neq 0$, $(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = 0$ $(i \neq j)$ をみたすとき，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は**直交系（orthogonal system）**であるという．

(iii) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が $(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ をみたすとき，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は**正規直交系（orthonormal system）**であるという．

**例 3.14 (ベクトルの内積の具体例)** ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ において内積を

$$(f\,,\,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

と定義する．このとき

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1 + 2x, \quad f_2 = 1 - 4x + 3x^2$$

とする．これらの内積は

$$\begin{aligned}
(f_0\,,\,f_0) &= \int_0^1 1 \cdot 1\,dx = 1, & (f_1\,,\,f_1) &= \int_0^1 (1+2x)^2\,dx = \frac{13}{3}, \\
(f_0\,,\,f_1) &= \int_0^1 1 \cdot (1+2x)\,dx = 2, & (f_1\,,\,f_2) &= \int_0^1 (1+2x)\cdot(1-4x+3x^2)\,dx = -\frac{1}{6}, \\
(f_0\,,\,f_2) &= \int_0^1 1 \cdot (1-4x+3x^2)\,dx = 0, & (f_2\,,\,f_2) &= \int_0^1 (1-4x+3x^2)^2\,dx = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\|f_0\| = \sqrt{(f_0\,,\,f_0)} = 1, \qquad \|f_1\| = \sqrt{(f_1\,,\,f_1)} = \sqrt{\frac{13}{3}}, \qquad \|f_2\| = \sqrt{(f_2\,,\,f_2)} = \sqrt{\frac{2}{15}}$$

である．また，$(f_0\,,\,f_2) = 0$ より，$f_0$ と $f_2$ は直交する．

**問 3.15 (直交系)** $C^\infty$ において内積を

$$(f\,,\,g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

と定義すると $C^\infty$ は内積空間となる．このとき，

$$f_0 = g_0 = 1. \qquad f_n = \sin(nx), \qquad g_n = \cos(nx)$$

とおくと，

$$\{f_0, f_1, f_2, f_3, \cdots, g_1, g_2, g_3, \cdots\}$$

は直交系となる．すなわち，すべての $n, m = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$(f_n\,,\,f_n) \neq 0, \qquad (g_n\,,\,g_n) \neq 0, \qquad (f_n\,,\,f_m) = 0, \qquad (g_n\,,\,g_m) = 0, \qquad (f_n\,,\,g_m) = 0$$

が成り立つ．これを示せ．また，正規化して正規直交系にせよ．

### 3.4　演習問題 〜 内積空間

**問 3.16 (内積)** 次のベクトルのノルムをすべて求めよ．また，二つのベクトルの内積とそれらの成す角をすべての組合わせで求めよ．

(1) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$　(2) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$　(3) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$　(4) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}$　(5) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-2\\-7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$

(6) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}$　(7) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-3\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\5\\0\\0\end{bmatrix}$

(8) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}4\\2\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix}$　(9) $\mathbb{R}^5 \ni \begin{bmatrix}2\\-1\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\\-1\end{bmatrix}$

**問 3.17 (内積)** 次のベクトルのノルムをすべて求めよ．また，二つのベクトルの内積をすべての組合わせで求めよ．

(1) $\mathbb{C} \ni -1+i,\ -2+3i,\ -5-4i,\ -3i,\ -2i,\ 3-i$
(2) $\mathbb{C}^2 \ni \begin{bmatrix}-1+i\\2-3i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3-i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5+i\\-1+i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4-2i\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7i\\-i\end{bmatrix}$
(3) $\mathbb{C}^3 \ni \begin{bmatrix}2+i\\3-i\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4+i\\2-3i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1-i\\i\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5+4i\\2+4i\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7i\\3\\3+5i\end{bmatrix}$

**問 3.18 (内積)** 次のベクトルのノルムをすべて求めよ．また，二つのベクトルの内積とそれらの成す角をすべての組合わせで求めよ．ただし，内積は次のように定義する．

$$(f\,,\,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

(1) $\mathbb{R}[x]_1 \ni 1+x,\ 5x,\ -3+2x,\ 2-5x,\ 5$
(2) $\mathbb{R}[x]_2 \ni 2+x-x^2,\ 1-x+x^2$
(3) $\mathbb{R}[x]_2 \ni 1+x+x^2,\ 3x-x^2,\ 5+x,\ 3-x+2x^2,\ 2$
(4) $\mathbb{R}[x]_3 \ni 1+x+x^2+x^3,\ -3x+x^2-2x^3,\ 2x^2+3x^3$

**問 3.19 (直交)** 次のベクトルと直交するベクトルをひとつ求めよ．ただし，(1)–(3) の内積は標準的な内積とし，(4) の内積は前問の内積を用いること．

(1) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$　(2) $\mathbb{C}^2 \ni \begin{bmatrix}1+i\\-2-3i\end{bmatrix}$　(3) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$　(4) $\mathbb{R}[x]_2 \ni 1-2x+x^2$

**問 3.20 (直交)** ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ が直交するよう $a$ を定めよ．

**問 3.21 (直交)** ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ と直交し，ノルムが 1 のベクトルを求めよ．

## 3.5　部分空間

**定義 3.22 (部分空間)** ベクトル空間 $V$ の部分集合 $W$ が，$V$ と同じ和とスカラー倍の定義で，ベクトル空間となるとき，$W$ を $V$ の**部分空間（subspace）**という．

**定理 3.23 (部分空間)** $V$ の部分集合 $W$ が $V$ の部分空間となるための必用十分条件は次の (i)–(iii) をみたすことである．

(i) $\mathbf{0}_V \in W$.

(ii) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$.

(iii) $\forall \boldsymbol{u} \in W, \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad c\boldsymbol{u} \in W$.

（証明）　（必用条件）$W$ が部分空間であれば，ベクトル空間の条件 (i)–(viii) をみたす．このとき条件 (i)–(iii) をみたすのは明らか.（十分条件）$W$ が条件 (i) をみたすとき，ベクトル空間の条件 (iii) をみたす．条件 (ii) をみたすとき，ベクトル空間の条件 (i)–(ii) をみたす．条件 (iii) をみたすとき，ベクトル空間の条件 (iv)–(viii) をみたす.

**定理 3.24 (部分空間)** 次の条件 (☆) は $V$ の部分集合 $W$ が $V$ の部分空間となるための必用十分条件である．

$$(\text{☆}) \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} \in W$$

（証明）　$\alpha = \beta = 0$ のとき条件 (i) と等価である．$\alpha = \beta = 1$ のとき条件 (ii) と等価である．$\beta = 0$ のとき条件 (iii) と等価である．

**注意 3.25 (部分空間と零ベクトル)** 部分空間 $W$ は零ベクトル $\mathbf{0}$ を含む．なぜなら，部分空間の必用十分条件 (☆) で $\alpha = \beta = 0$ とおくと

$$0\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{b} = \mathbf{0} \in W$$

となるからである．

## 3.6 $\mathbb{R}^n$ の部分空間

**例 3.26 (部分空間の具体例)** 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の集合

$$W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分集合であり， $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とする．すなわち，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解であり，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

をみたすとする．このとき，

$$A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha(A\boldsymbol{x}) + \beta(A\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{0} + \beta\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

となるので $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ もまた解である．よって $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in W$ となり，$W$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

**例 3.27 (部分空間の具体例)** 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,(\neq \boldsymbol{0})$ の解の集合

$$W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \,\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分集合であり， $\mathbb{R}^n$ の部分空間ではない．

$A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b}$ より非同次系は原点 $\boldsymbol{0}$ を解にもたない．よって $W$ は $\boldsymbol{0}$ を含まず，部分空間とはならない．つまり，

$$W \ni \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \quad \mathbb{R} \ni \alpha = 0, \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \notin W$$

である．

**例 3.28 (部分空間の具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．

$W$ は同次連立方程式の解の集合であるから，解を求めと，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

となる．$W$ は

$$W = \{\, \boldsymbol{x} = c\boldsymbol{u} \mid c \in \mathbb{R} \,\}$$

と表される．$c = 0$ のとき $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるから条件 (i) $\boldsymbol{0} \in W$ をみたす．ある $c_1, c_2$ に対して $\boldsymbol{x}_1 = c_1\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{x}_2 = c_2\boldsymbol{u}$ とおく．このとき $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{u} = (c_1 + c_2)\boldsymbol{u}$ となる．任意の $c$ について $c\boldsymbol{u}$ は解となるから，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = (c_1 + c_2)\boldsymbol{u}$ も解であるので，条件 (ii) $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W$ をみたす．解 $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{u}$ にある定数 $\alpha$ をかけた $\alpha\boldsymbol{x} = \alpha c\boldsymbol{u} = (\alpha c)\boldsymbol{u}$ もまた解となるから，条件 (iii) $\alpha\boldsymbol{x} \in W$ をみたす．よって $W$ は部分空間である．

**例 3.29 (部分空間ではない具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{array} \right\}$$

は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．なぜなら，方程式は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解にもたない．よって $\boldsymbol{0} \notin W$ となり，部分空間ではない．

**例 3.30 (部分空間ではない具体例)** 集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1 \right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．

$$(\because) \qquad W \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} \ni \alpha = 2, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\boldsymbol{a} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W.$$

**例 3.31 (部分空間ではない具体例)** 集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0 \right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．

$$(\because) \qquad W \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} \ni \alpha = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\boldsymbol{a} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W.$$

**例 3.32 (部分空間ではない具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 1 \end{array} \right\}$$

は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．

$$(\because) \qquad W \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} \ni \alpha = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\boldsymbol{a} = -1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W.$$

**例 3.33 (部分空間ではない具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．

$$(\because) \qquad W \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} \ni \alpha = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\boldsymbol{a} = -1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin W.$$

**例 3.34 (部分空間の具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の集合であるから，$\mathbb{R}^3$ の部分空間である．

## 3.7 $\mathbb{R}[x]_n$ の部分空間

**例 3.35 (多項式からなる部分空間の具体例)** ベクトル空間

$$\mathbb{R}[x]_3 = \left\{ f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

の部分集合

$$W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0,\ f(-1) = 0 \}$$

は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間ではない.

(証明)　(i) $\mathbb{R}[x]_3$ の零ベクトルは $f_0(x) = 0$ である．$f_0(1) = 0$, $f_0(-1) = 0$ となるから，$f_0 \in W$ である．(ii) $f, g \in W$ とする．すなわち $f(\pm 1) = 0$, $g(\pm 1) = 0$ をみたすとする．このとき $(f+g)(\pm 1) = f(\pm 1) + g(\pm 1) = 0 + 0 = 0$ が成り立つ．よって $f + g \in W$ となる．(iii) $f \in W$, $f(\pm 1) = 0$ とする．任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $(\alpha f)(\pm 1) = \alpha f(\pm 1) = 0$ が成り立つ．よって $\alpha f \in W$ となる．(i), (ii), (iii) より，$W$ は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である.

**例 3.36 (多項式からなる部分空間の具体例)** ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ の部分集合

$$W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 1 \}$$

は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間ではない．なぜなら，$f_0(1) = 0 \neq 1$ となるから，$W \not\ni f_0 = 0$ である．よって $W$ は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間ではない.

**例 3.37 (多項式からなる部分空間の具体例)** ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ の部分集合

$$W = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid xf'(x) = 2f(x) \right\}$$

は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である.

(証明)　$\mathbb{R}[x]_3$ の任意の元は $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ である．このとき $xf' = 2f$ より

$$x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) = 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \quad \Rightarrow \quad 0 = 2a_0 + a_1x - a_3x^3$$

となる．任意の $x$ について成り立つので,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad \forall a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 = 0$$

である．$W$ の任意の元は $f = a_2x^2$ と表される．(i) $a_2 = 0$ のとき $f = f_0 = 0 \in W$．(ii) $f = a_2x^2$, $g = b_2x^2 \in W$ に対して $(f+g)(x) = (a_2 + b_2)x^2 = c_2x^2 \in W$．(iii) $f = a_2x^2 \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $(\alpha f)(x) = (\alpha a_2)x^2 \in W$．(i), (ii), (iii) より $W$ は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である.

## 3.8 $C^\infty$ の部分空間

**問 3.38 (線形微分方程式の解集合)** $n$ 階線形定数係数微分方程式の解集合

$$W = \left\{ f(x) \in C^\infty \;\middle|\; a_n \frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dx} + a_0 f = 0 \right\}$$

は $C^\infty$ の部分空間である．これを示せ.

### 3.9 演習問題 〜 部分空間

**問 3.39 (部分空間)** ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において，部分集合 $W$ は部分空間であるか述べよ.

(1) $W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ (2) $W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \,\}$ （ただし，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$）

(3) $W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1 \,\}$ (4) $W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1 \,\}$

(5) $W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0 \,\}$ （$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ はあるベクトル）

(6) $W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, \cdots, x_n \leq 1 \,\}$

**問 3.40 (部分空間)** ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，部分集合 $W$ は部分空間であるか述べよ.

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1 - x_2 = 0 \right\}$ (2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1 - x_2 = 3 \right\}$

(3) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 - x_2 = 0 \right\}$ (4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 1 \right\}$

(5) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = 0, x_2 = 0 \right\}$ (6) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 > 0, x_2 > 0 \right\}$

(7) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$ (8) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ 4x_1 + x_2 \geq 1 \end{array} \right\}$

(9) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 1 \right\}$ (10) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(11) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\}$

**問 3.41 (部分空間)** ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，部分集合 $W$ は部分空間であるか述べよ.

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ (2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$

(3) $W = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ (4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$

(5) $W = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ (6) $W = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, c_3 > 0 \right\}$ (7)

$W = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 \\ 2c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ (8) $W = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

(9) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ (10) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$

(11) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \right\}$ (12) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} 3x_1 - x_2 + 5x_3 \geq 0 \\ x_2 - 2x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$ (13)

$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} 3x_1 - x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ x_3 \geq 1 \end{array} \right\}$

(14) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(15) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \right\}$

(16) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(17) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \right\}$

**問 3.42 (部分空間)** ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ において，部分集合 $W$ は部分空間であるか述べよ．

(1) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(x) = 0 \,\}$　(2) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(x) = 1 \,\}$
(3) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(0) = 0,\ f(1) = 0 \,\}$　(4) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(0) = 1,\ f(1) = 1 \,\}$　(5) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(3) = 0,\ f(2) = 0 \,\}$　(6) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(0) \geq 0,\ f(1) \geq 0 \,\}$　(7) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}$
(8) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(x) \geq 0 \,\}$
(9) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(x) \geq 1 \,\}$　(10) $W = \left\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid (f(1))^2 = 0 \,\right\}$
(11) $W = \left\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f'(x) = 0 \,\right\}$　(12) $W = \left\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f'(x) = 1 \,\right\}$
(13) $W = \left\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0,\ f'(1) = 0 \,\right\}$
(14) $W = \left\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0,\ f'(1) = 0,\ f''(1) = 0 \,\right\}$
(15) $W = \left\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 1,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 1 \,\right\}$
(16) $W = \left\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f'(3) = 0,\ f(1) = 0 \,\right\}$
(17) $W = \left\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(0) + f'(1) = 0,\ f'(0) + f''(1) = 0 \,\right\}$
(18) $W = \left\{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f''(x) - 2xf'(x) = 0 \,\right\}$

## 3.10 ベトクルの 1 次独立と 1 次従属

**定義 3.43 (1 次結合，1 次従属)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ に対して，ベクトル

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_1\boldsymbol{u}_m \in V, \qquad c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$$

を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の **1 次結合**または**線形結合（linear combination）**という．またこのとき，ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ に **1 次従属**または**線形従属（linearly dependent）**であるという．

**定義 3.44 (1 次関係，1 次独立，1 次従属)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ に対して，条件式

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_1\boldsymbol{u}_m = \mathbf{0}, \qquad c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$$

を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の **1 次関係**または**線形関係**という．

1 次関係をみたす係数が $c_1 = 0, c_2 = 0, \cdots, c_n = 0$ のみであるとき，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は **1 次独立**または**線形独立（linearly independent）**という．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立ではないとき，**1 次従属**または**線形従属**という．

**注意 3.45 (自明な 1 次関係)** 任意のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_1\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0},$$

において

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

とおくと，明らかに 1 次関係は成立する．これを**自明な 1 次関係**という．成立するのが自明な 1 次関係のみのときベクトルは 1 次独立である．また，自明な 1 次関係ではないとき**非自明な 1 次関係**という．非自明な 1 次関係のときベクトルは 1 次従属である．非自明な場合は例えば

$$\begin{aligned} c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0 \\ c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad \cdots, \quad c_n = 0 \\ c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 1 \\ c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad \cdots, \quad c_n = 1 \end{aligned}$$

等々がある．

**例 3.46 (ベクトルの 1 次独立，1 次従属の具体例)** ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ を考える．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が同じ向きのときを考える．向きが同じなので $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a}$ と書ける．また，

$$\alpha\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となので，非自明な 1 次関係である．よって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は 1 次従属である．

**例 3.47 (ベクトルの 1 次独立，1 次従属の具体例)** ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ を考える．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の向きが異なるときを考える．このとき 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

は自明なもののみである．もし非自明であれば $c_1 = 0$ と $c_2 = 0$ とが同時には成立しないので，$c_1 \neq 0$ とおく．このとき

$$\boldsymbol{a} = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{b}$$

と表される．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは同じ向きとなる．これは与えられた条件と矛盾する．よって 1 次関係は自明なものに限る．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立である．

**例 3.48 (ベクトルの 1 次独立，1 次従属の具体例)** ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ を考える．$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ となるときを考える．条件を書き換えると

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

となる．非自明な 1 次関係であるから，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次従属である．

**例 3.49 (基本ベクトルの 1 次独立性)** 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である．なぜなら，1 次関係は

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

となるので，係数は自明

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

なものに限るからである．

**例 3.50 (1 次独立の具体例)** $\mathbb{R}[x]_n$ のベクトル $1, x, x^2, \cdots, x^n$ は 1 次独立なベクトルである．

（証明）　1 次関係

$$c_0 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$$

より $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$ を定める．$x = 0$ とおくと $c_0 = 0$ が定まる．1 次関係を微分すると

$$c_1 + 2c_2 x + \cdots + nc_n x^{n-1} = 0$$

となる．$x = 0$ とおくと $c_1 = 0$ が定まる．同様にして

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

を得る．自明な係数のみであるから，よって 1 次独立である．

**例 3.51 (1 次独立の具体例)** $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

は 1 次独立であるか考える．これらの 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$$

をみたす $c_1$, $c_2$, $c_3$ を定める．1 次関係を変形して

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

であり，

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり,

$$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

と表される．行列 $A$ を簡約化すると

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である．よって

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る．係数は自明なもの

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

に限るので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．

**例 3.52 (1 次従属の具体例)** $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

は 1 次独立であるか考える．1 次関係より,

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{0} \\ c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{0} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となる．簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるから，

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ -3c \\ c \end{bmatrix}, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

を得る．1 次関係は

$$\begin{aligned} (2c)\boldsymbol{a}_1 + (-3c)\boldsymbol{a}_2 + (c)\boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{0} \\ 2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となる．非自明な 1 次関係であるから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属である．

## 3.11 ちょっとまとめ

**まとめ 3.53 (1 次独立性の判定)** ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ の 1 次独立性を考える．これらのベクトルを列ベクトルにもつ行列を

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} : m \times n$$

とおく．このとき $\boldsymbol{c}$ に関する方程式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

の解の任意定数の個数は $n - \mathrm{rank}\,(A)$ であるから，次の関係が成り立つ：

$$\begin{array}{llll} n = \mathrm{rank}\,(A) & \Leftrightarrow & \text{自明解 } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \text{ のみをもつ} & \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{ は 1 次独立} \\ n > \mathrm{rank}\,(A) & \Leftrightarrow & \text{自明解と非自明解をもつ} & \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{ は 1 次従属} \end{array}$$

## 3.12 正規直交系は 1 次独立

**定理 3.54 (直交系の 1 次独立性)** 内積空間 $V$ において，ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が直交系であるとき，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立である．

（証明） 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_j\boldsymbol{u}_j + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

の両辺と $\boldsymbol{u}_j$ との内積をとると

$$\begin{aligned} (c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_j\boldsymbol{u}_j + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n\,,\,\boldsymbol{u}_j) &= (\boldsymbol{0}\,,\,\boldsymbol{u}_j) \\ c_1\,(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_j) + c_2\,(\boldsymbol{u}_2\,,\,\boldsymbol{u}_j) + \cdots + c_j\,(\boldsymbol{u}_j\,,\,\boldsymbol{u}_j) + \cdots + c_n\,(\boldsymbol{u}_n\,,\,\boldsymbol{u}_j) &= 0 \end{aligned}$$

となる．$(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = \alpha\delta_{ij}$ $(\alpha \neq 0)$ より

$$\begin{aligned} c_1 \times 0 + c_2 \times 0 + \cdots + c_j \times \alpha + \cdots + c_n \times 0 &= 0 \\ c_j &= 0 \end{aligned}$$

を得る．すべての $j = 1, 2, \cdots, n$ に対して同様に成り立つので

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_j = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

となる．自明な 1 次関係のみであるから，ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立である．

## 3.13 ベトクルの 1 次独立の性質 〜 その 1

**定理 3.55 (1 次独立の性質)** $m$ 個のベトクル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ に対して次の条件が成り立つ.

(i) $m$ 個のうち $r$ $(r < m)$ 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ が 1 次従属であれば, $m$ 個のベトクル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ も 1 次従属となる.

(ii) $m$ 個のベトクル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立であれば, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ のうち任意の $r$ $(1 \leq r \leq m)$ 個のベクトルも 1 次独立である.

（証明） (i) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次従属であるので, 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$$

をみたす非自明な係数 $c_1, \cdots, c_r$ が存在する. このとき,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r + 0\boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

となるので, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ は 1 次従属である. (ii) は (i) の対偶である.

**定理 3.56 (1 次独立の性質)** $m$ 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次従属であることと, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ のうち少なくとも 1 個のベクトルが他の $m-1$ 個のベクトルの 1 次結合で表されることとは, 必用十分条件である.

（証明） （必用条件）ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次従属であれば, 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}$$

をみたす係数で非自明なもの $c_1 = \cdots = c_m = 0$ 以外にも存在する. 例えば $c_1 \neq 0$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \left(-\frac{c_m}{c_1}\right)\boldsymbol{u}_m$$

となる. $\boldsymbol{u}_1$ は $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で表される. (十分条件) $\boldsymbol{u}_1$ が他のベクトル $\boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で表されるとすると

$$\boldsymbol{u}_1 = c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m$$

となる. これより

$$\begin{aligned}(-1)\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m &= \boldsymbol{0}\\ c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m &= \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

を得る. $c_1 \neq 0$ であるから, 非自明な係数 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ が存在する. よって $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次従属である.

**定理 3.57 (1 次独立の性質)** ベトクル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が 1 次独立のとき, あるベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ が

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

と表されるとする. このとき $c_1, c_2, \cdots, c_m$ は一意に定まる.

（証明）　一意に表されないと仮定する．このとき

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n, \qquad \boldsymbol{v} = c_1'\boldsymbol{u}_1 + c_2'\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n'\boldsymbol{u}_n$$

と書かれる．これらの差をとると

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = (c_1 - c_1')\boldsymbol{u}_1 + (c_2 - c_2')\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (c_n - c_n)\boldsymbol{u}_n$$

となる．これは $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ に関する 1 次関係である．$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立であるから，

$$c_1 - c_1' = 0, \quad c_2 - c_2' = 0, \quad \cdots, \quad c_n - c_n' = 0$$

であり，

$$c_1 = c_1', \quad c_2 = c_2', \quad \cdots, \quad c_n = c_n'$$

が成り立つ．係数 $c_j$ は一意に定まる．

**定理 3.58 (1 次独立の性質)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ が 1 次独立であり，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v} \in V$ が 1 次従属とする．このとき

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m$$

と一意に表される．

（証明）　ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}$ は 1 次従属であるから，1 次関係

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m + c\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

の係数 $c_1, \cdots, c_m, c$ は非自明なものとなる．このとき $c \neq 0$ となる．なぜなら $c = 0$ とすると係数 $c_1, \cdots, c_m$ のうち $c_j \neq 0$ となる係数が存在することになり，1 次関係

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}$$

は非自明な係数が存在することになる．これはベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立であることと矛盾する．よって $c \neq 0$ となる．このときベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \left(-\frac{c_1}{c}\right)\boldsymbol{u}_1 + \left(-\frac{c_2}{c}\right)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c}\right)\boldsymbol{u}_n$$

と一意に表される．

### 3.14　1 次結合の記法

**定義 3.59 ( 1 次結合の記法)** $n$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のそれぞれが，$m$ 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ の 1 次結合として，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{u}_m, \\
\boldsymbol{v}_2 &= a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{u}_m, \\
&\ \ \vdots \\
\boldsymbol{v}_n &= a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + a_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{u}_m
\end{aligned}$$

と表されるとする．このとき，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n) &= (a_{11}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{u}_m,\ a_{12}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{u}_m,\ \cdots,\ a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{u}_m) \\ &= (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \\ &= (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A\end{aligned}$$

と表記することにする．

**例 3.60 ( 1 次結合の記法)** ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ と $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in V$ が

$$\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + 4\boldsymbol{u}_2$$

をみたすとき，

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3) = (3\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,\ 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_1 + 4\boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2)\,A$$

と表される．

**注意 3.61 (1 次結合の記法)** $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ において，前例のベクトルは

$$V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix} = UA$$

と行列として表されることに注意する．

**例 3.62 (1 次結合の記法)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ の 1 次関係は

$$\boldsymbol{0} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n\end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{c}$$

と表される．

## 3.15 ベトクルの 1 次独立の性質 〜 その 2

**定理 3.63 (ベトクルの 1 次独立の性質)** ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ の各ベクトルが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で表され，かつ，$n > m$ であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属である．

（証明） ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で表されるので，

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{ij}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

と書ける．$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次関係は

$$\mathbf{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n)\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A\boldsymbol{c}$$
$$= (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,\tilde{\boldsymbol{c}}$$

となる．ここで $\tilde{\boldsymbol{c}} = A\boldsymbol{c}$ とおいた．このとき $A\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{c}}$ を $\boldsymbol{c}$ に関する方程式であると考える．$n > m \geq \mathrm{rank}\,(A)$ より $n - \mathrm{rank}\,(A) > 0$ となるので，方程式の解は 1 個以上の任意定数を含む．よって非自明解をもつので，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は非自明な 1 次関係の係数 $\boldsymbol{c}$ をもつ．

**例 3.64 (ベトクルの 1 次独立の性質)** ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を用いると

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{v}_2 = 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{v}_3 = 5\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$$

か書けるので，

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3) = (2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2,\ 5\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\,A$$

となる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次関係は

$$(\star) \quad \mathbf{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3)\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\,A\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\,\tilde{\boldsymbol{c}}$$

となる．ここで $A\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{c}}$ とおいた．これは $\boldsymbol{c}$ に関する方程式となみせる．($\star$) は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の 1 次関係ともみなせる．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は 1 次独立であるから，自明な係数 $\tilde{\boldsymbol{c}} = \mathbf{0}$ のみをもつ．よって $A\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ となる．$2 \geq \mathrm{rank}\,(A)$ より解の任意定数の個数は $3 - \mathrm{rank}\,(A) \geq 1$ となる．以上より $\boldsymbol{c}$ は非自明な解となるから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は非自明な係数 $\boldsymbol{c}$ をもつ．よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次従属である．

**注意 3.65 (ベトクルの 1 次独立の性質)** ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ の $n$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は，$n > m$ のとき 1 次従属である．

**定理 3.66 (ベトクルの 1 次独立の性質)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ と行列 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ に対して，次の条件 (i), (ii) が成り立つとき，$A = O$ が成り立つ．

(i) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立.

(ii) $(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A = (\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \cdots,\ \mathbf{0})$.

（証明）

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A = (\mathbf{0},\ \cdots,\ \mathbf{0})$$

より，

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\boldsymbol{u}_1+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{u}_m=\boldsymbol{0} \\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \\ a_{1n}\boldsymbol{u}_1+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{u}_m=\boldsymbol{0} \end{array}\right\}$$

となる．それぞれが $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ の 1 次関係である．$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立であるので，係数は自明なもののみに限る．よって $a_{ij}=0$ となり，$A=O$ を得る．

**注意 3.67 ( 1 次関係)** 特に $A=\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$ とおく．このとき

$$c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{m}_1=(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}=(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

となり，$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ の 1 次関係を得る．$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立であれば，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ となる．

**定理 3.68 (ベトクルの 1 次独立の性質)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m \in V$ が 1 次独立であれば，

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A=(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,B$$

のとき，$A=B$ が成立する．

（証明）

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A=(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,B \quad\Rightarrow\quad (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A-(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,B=(\boldsymbol{0},\ \cdots,\ \boldsymbol{0}) \\ &\quad\Rightarrow\quad (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,(A-B)=(\boldsymbol{0},\ \cdots,\ \boldsymbol{0}) \quad\Rightarrow\quad A-B=O \quad\Rightarrow\quad A=B. \end{aligned}$$

**例 3.69 (ベトクルの 1 次独立の性質)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \in V$ は 1 次独立であり，ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4 \in V$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+3\boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+6\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_4, \\ \boldsymbol{v}_4 &= \boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_3+3\boldsymbol{u}_4 \end{aligned}$$

により与えられているとする．このとき，

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4)=(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}=(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4)\,A$$

となる．$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_4$ の 1 次関係は

$$\mathbf{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_4\boldsymbol{v}_4 = (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_4)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_4)\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_4)\,A\boldsymbol{c}$$
$$= (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_4)\,\tilde{\boldsymbol{c}}$$

である．ここで $A\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{c}}$ とおいた．これは $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_4$ の 1 次関係ともみなせる．$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_4$ は 1 次独立であるから，自明な係数 $\tilde{\boldsymbol{c}} = \mathbf{0}$ のみをもつ．よって $A\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ が成り立つ．$A$ を簡約化すると $A \to E$ であり，$\mathrm{rank}\,(A) = 4$ より，解は自明な解 $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ に限る．以上より $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_4$ は自明な係数 $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ のみをもつので，1 次独立である．

**例 3.70 (ベトクルの 1 次独立の性質)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \in V$ は 1 次独立であり，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in V$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4, \\ \boldsymbol{v}_4 &= 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3 - 3\boldsymbol{u}_4 \end{aligned}$$

により与えられているとする．このとき，

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4) = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4)\,A$$

となる．$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_4$ の 1 次関係は

$$\mathbf{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_4\boldsymbol{v}_4 = (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_4)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_4)\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_4)\,A\boldsymbol{c}$$
$$= (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_4)\,\tilde{\boldsymbol{c}}$$

である．ここで $A\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{c}}$ とおいた．これは $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_4$ の 1 次関係ともみなせる．$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_4$ は 1 次独立であるから，自明な係数 $\tilde{\boldsymbol{c}} = \mathbf{0}$ のみをもつ．よって $A\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ が成り立つ．$A$ を簡約化すると

$$A \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であり，$\mathrm{rank}\,(A) = 3$ より，解は非自明な解

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_4 \\ c_4 \\ -c_4 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ c \\ -c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

をもつ．よって $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_4$ の 1 次関係は

$$\mathbf{0} = -c\boldsymbol{v_1} + c\boldsymbol{v_2} - c\boldsymbol{v_3} + c\boldsymbol{v_4}$$
$$\mathbf{0} = -\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_3} + \boldsymbol{v_4}$$

となる．非自明な 1 次関係であるから，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次従属である．

## 3.16 演習問題 〜 1 次独立

**問 3.71 (1 次独立)** 次のベクトルの組が 1 次独立であるか 1 次従属であるか述べよ．

(1) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (2) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (3) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ (4) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

(5) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (6) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (7) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(8) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ (9) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (10) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(11) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$ (12) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (13) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(14) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (15) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(16) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (17) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(18) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ (19) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

(20) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ (21) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(22) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (23) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (24) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (25) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

(26) $\mathbb{R}[x]_2 \ni 1 + x + x^2,\ 2 - x + 2x^2,\ -1 + 2x + x^2$

**問 3.72 (1 次結合)** ベクトルを

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 5 \end{bmatrix}$$

とおく．$\boldsymbol{u}_3$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の 1 次結合で表せ．また，$\boldsymbol{u}_4$ か $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の 1 次結合で表されるための $a$ の値を定めよ．

**問 3.73 (1 次独立)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立のとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であるか 1 次従属であるか述べよ．

(1) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \end{cases}$
(2) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 = -3\boldsymbol{u}_1 + 6\boldsymbol{u}_2 \end{cases}$
(3) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$
(5) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$
(6) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$
(8) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$
(9) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$
(10) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$
(12) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$
(13) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 - 2\boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \end{cases}$

(15) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3 + 2\boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + 3\boldsymbol{u}_4 \end{cases}$
(16) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3 - 2\boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_4 = 5\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \end{cases}$

(17) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 - 2\boldsymbol{u}_5 \\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4 + \boldsymbol{u}_5 \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 - 3\boldsymbol{u}_5 \\ \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_4 - 2\boldsymbol{u}_5 \end{cases}$
(18) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{v}_{m-1} = \boldsymbol{u}_{m-1} + \boldsymbol{u}_m \end{cases}$
(19) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3 \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_m \end{cases}$

## 3.17 1 次独立なベクトルの最大個数

**定義 3.74 (ベクトルの 1 次独立な最大個数)** ベクトルの集合 $X$ が，ある $r$ 個のベクトルでは 1 次独立となり，任意の $r+1$ 個のベクトルでは 1 次従属となるとき，$r$ を集合 $X$ の **1 次独立なベクトルの最大個数**という．

**定理 3.75 (ベクトルの 1 次独立な最大個数)** ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ において，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の各ベクトルが $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で表されるとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数以下となる．

（証明）　$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の各ベクトルは $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で表されるので

$$\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{u}_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

であり，

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A$$

と書ける．$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次独立のベクトルの最大個数を $r$ とする．$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ が 1 次独立であるとすると，その他のベクトル $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ の 1 次結合で表される．よって

$$\boldsymbol{u}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} b_{i,r+1}\boldsymbol{u}_i, \qquad \cdots, \qquad \boldsymbol{u}_m = \sum_{i=1}^{r} b_{i,m}\boldsymbol{u}_i$$

と表される．このとき

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m) = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\begin{bmatrix} 1 & & \text{\Large 0} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,m} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{\Large 0} & & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,m} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\begin{bmatrix} E_r & B \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,m-r} \end{bmatrix}$$

となる．これより

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\begin{bmatrix} E_r & B \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,m-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\begin{bmatrix} A_{11} + BA_{21} & A_{12} + BA_{22} \\ O & O \end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

を得る．よって

$$\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\boldsymbol{u}_i, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

となる．$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の各ベクトルは $r$ 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ の 1 次結合で表される．このとき $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のうち任意の $r+1$ 個のベクトルは 1 次従属であるので，1 次独立の最大個数は $r$ 個以下となる．

**例 3.76 (ベクトルの 1 次独立な最大個数の具体例)** $\mathbb{R}^n$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $n$ である．

（証明） $n=2$ のときを考える．まず明らかに $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ は 1 次独立であるので，1 次独立なベクトルの最大個数は 2 以上である．ここで，3 個のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 \quad \in \mathbb{R}^2$$

を 1 次独立と仮定する．このとき 1 次関係

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

を考える．これより

$$(\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1)\boldsymbol{e}_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

となる．係数行列の階数は 2 以下であるから $(\alpha, \beta, \gamma)$ は任意定数を含む解であり，1 次関係は非自明係数となる．よって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次従属である．以上より，$\mathbb{R}^2$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は 2 である．$n \geq 3$ のときも同様に示される．

### 3.18 1 次独立なベクトルの最大個数と 1 次結合

**定理 3.77 (ベクトルの 1 次独立な最大個数)** ベトクルの集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数が $r$ であることの必用十分条件は，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ のなかに $r$ 個の 1 次独立なベクトルがあり，他の $m-r$ 個のベクトルはこの $r$ 個のベクトルの 1 次結合で表されることである．

（証明） （必用条件）$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ のうち 1 次独立な $r$ 個のベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ とする．このとき $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_t$ $(t = r+1, r+2, \cdots, m)$ は 1 次従属であるから，$\boldsymbol{u}_t$ は $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ の 1 次結合で表される．（十分条件）$r$ 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ が 1 次独立であるとする．$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $r$ 以上となる．また，他の $m-r$ 個のベクトル $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ の 1 次結合で表されるとする．このとき，

$$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r) \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,m} \end{bmatrix}$$

と表されるから，$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数 $r$ 以下となる．よって $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $r$ である．

**例 3.78 (ベクトルの 1 次独立な最大個数の具体例)** ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^4$$

の 1 次独立なベクトルの最大個数とそのときベクトルの組の一つを求める．また，その他のベクトルを 1 次独立なベクトルの 1 次結合で表す.

まず，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 + c_5\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0}$$

を考える．これは

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{bmatrix} = A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

と表される．方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を求めることで，1 次関係の係数 $\boldsymbol{c}$ が定まる．行列 $A$ を簡約化すると

$$A \to B = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_4 & \boldsymbol{b}_5\end{bmatrix}$$

となる．方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解と方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解とは等しく $\boldsymbol{c}$ であるから，ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_5$ の 1 次関係とベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係は等しい.

まず，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_5$ の 1 次独立なベクトルの最大個数を考える．$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ に着目すると，

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_3$$

であり，$\mathbb{R}^4$ の基本ベクトルである．明らかにベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4\}$ は 1 次独立であるので，1 次独立なベクトルの最大個数は 3 以上である．他のベクトル $\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_5$ について見ると

$$(\bigcirc) \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\\0\end{bmatrix} = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{b}_5 = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4$$

が成り立つ．$\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_5$ はそれぞれ $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ に関して 1 次従属である.

4 個以上のベクトルの組が 1 次従属となることを示す．**(その 1)** まず，5 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_5\}$ に関する 1 次関係は (○) を用いると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} &= c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 + c_4\boldsymbol{b}_4 + c_5\boldsymbol{b}_5 = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3(-\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2) + c_4\boldsymbol{b}_4 + c_5(2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4)\\
&= (c_1 - c_3 + 2c_5)\boldsymbol{b}_1 + (c_2 + 2c_3 - c_5)\boldsymbol{b}_2 + (c_4 + c_5)\boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1 - c_3 + 2c_5\\c_2 + 2c_3 - c_5\\c_4 + c_5\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{bmatrix} = B\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

となる．この方程式の係数行列は $B$ そのものであるから，階数は 3 であり非自明な係数をもつ．よって $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{b}_4,\ \boldsymbol{b}_5\}$ は 1 次従属となる．次に 4 個のベクトルの組が 1 次従属となることを示す．$\{\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_5\}$, $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_5\}$, $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_5\}$, $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_5\}$, $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4\}$ の 1 次関係は同様の操作で,

$$c_2\boldsymbol{b}_2+c_3\boldsymbol{b}_3+c_4\boldsymbol{b}_4+c_5\boldsymbol{b}_5=c_2\boldsymbol{b}_2+c_3(-\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2)+c_4\boldsymbol{b}_4+c_5(2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_4)=\begin{bmatrix}0&-1&0&2\\1&2&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

$$c_1\boldsymbol{b}_1+c_3\boldsymbol{b}_3+c_4\boldsymbol{b}_4+c_5\boldsymbol{b}_5=c_1\boldsymbol{b}_1+c_3(-\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2)+c_4\boldsymbol{b}_4+c_5(2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_4)=\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\0&2&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_3\\c_4\\c_5\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

$$c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_4\boldsymbol{b}_4+c_5\boldsymbol{b}_5=c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_4\boldsymbol{b}_4+c_5(2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_4)=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_4\\c_5\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

$$c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_3\boldsymbol{b}_3+c_5\boldsymbol{b}_5=c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_3(-\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2)+c_5(2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_4)=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&1&2&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_5\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

$$c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_3\boldsymbol{b}_3+c_4\boldsymbol{b}_4=c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_3(-\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2)+c_4\boldsymbol{b}_4=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

とそれぞれなる．これらの方程式の係数行列はそれぞれ行列 $B$ の第 1, 2, 3, 4, 5 列目を除いた形をしている．係数行列の階数はいずれも 3 以下であるから，非自明な 1 次関係が存在する．4 個のベクトルの組はいずれも 1 次従属となる．**(その 2)** また別の方法としては次のように示す．方程式 $B\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ の解は，任意定数を $\alpha,\beta$ とすると

$$(☆)\qquad (\alpha-2\beta)\boldsymbol{b}_1+(-2\alpha+\beta)\boldsymbol{b}_2+\alpha\boldsymbol{b}_3-\beta\boldsymbol{b}_4+\beta\boldsymbol{b}_5=\boldsymbol{0}$$

と表される．5 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_5\}$ の 1 次関係は (☆) である．非自明な 1 次関係であるから $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_5\}$ は 1 次従属となる．また，(○) より

$$\boldsymbol{0}=-\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3+0\boldsymbol{b}_4,\qquad \boldsymbol{0}=2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_4-\boldsymbol{b}_5$$

と非自明な 1 次関係が成り立つので，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4\}$, $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_5\}$ は 1 次従属となる．さらには (☆) において，$\alpha=2\beta$, $\beta=2\alpha$, $\beta=0$ とおくと，それぞれ

$$-3\boldsymbol{b}_2+2\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4+\boldsymbol{b}_5=\boldsymbol{0},\quad -3\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_3-2\boldsymbol{b}_4+2\boldsymbol{b}_5=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{b}_1-2\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-0\boldsymbol{b}_5=\boldsymbol{0}$$

と非自明な 1 次関係が成り立つので，$\{\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_5\}$, $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_5\}$, $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_5\}$ は 1 次従属となる．

以上より，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_5\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $r=3=\operatorname{rank}A$ である．これらの結果はベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係にも適用される．1 次独立なベクトルの最大個数は

$r = \operatorname{rank} A = 3$ であり，その 1 次独立となるベクトルの組のひとつは $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ である．また，その他のベクトルはこれらの 1 次結合

$$\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{a}_5 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$$

として表される．

## 3.19　1 次関係と行列の簡約化

**定理 3.79 (簡約化行列の 1 次関係)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

を簡約化した行列を

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

とする．このとき $A$ の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に関する 1 次関係と $B$ の列ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ に関する 1 次関係とは等価である．

（証明）　行列 $A$ を簡約化して $B$ となるとき，基本変形を表す行列 $P$ を用いて

$$B = PA$$

と表される．これは

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P\boldsymbol{a}_1 & P\boldsymbol{a}_2 & \cdots & P\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので，各列ベクトルは

$$\boldsymbol{b}_j = P\boldsymbol{a}_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

と表される．また $P$ は正則行列であるから，

$$\boldsymbol{a}_j = P^{-1}\boldsymbol{b}_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

とも表される．ここで $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に関する 1 次関係を

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

とする．これより，

$$\begin{aligned} c_1P^{-1}\boldsymbol{b}_1 + c_2P^{-1}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_nP^{-1}\boldsymbol{b}_n &= \boldsymbol{0} \\ P^{-1}(c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n) &= \boldsymbol{0} \\ PP^{-1}(c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n) &= P\boldsymbol{0} \\ c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

を得る．これは $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ に関する 1 次関係であり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に関する 1 次関係と等しい．

## 3.20 1 次独立なベクトルの最大個数と行列の階数

**定理 3.80 (行列の列ベクトルと行ベクトルの 1 次独立な最大個数)**

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A) &= A \text{ の列ベクトル 1 次独立な最大個数}\\ &= A \text{ の行ベクトル 1 次独立な最大個数}\end{aligned}$$

（証明） 行列 $A$ を列ベクトルに分割し，$A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$ とおく．行列 $A$ を簡約化し，$B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$ を得たとする．$r = \operatorname{rank}(A)$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ のうちで主成分がある列ベクトルは，左から順に基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ となる．主成分がない他の列ベクトルは基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ の 1 次結合で表される．基本ベクトルは明らかに 1 次独立であるから，$\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $r$ となる．$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ の 1 次関係は $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ の 1 次関係と等しいので，$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $r$ となる．

行列 $A$ を行ベクトルに分割し簡約化して

$$A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} B = \begin{bmatrix}1 & * & 0 & * & 0 & *\cdots & 0 & *\\ & & 1 & * & 0 & *\cdots & 0 & *\\ & & & & 1 & *\cdots & \vdots & \vdots\\ & & & & & & 1 & *\\ \\ \text{\Large 0} & & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_s\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

となるとする．$B$ の零ベクトルではない行ベクトルの個数を $s$ とする．このときベクトル $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ の 1 次関係は

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{b}_s = \begin{bmatrix}c_1 & * & c_2 & * & c_3 & *\cdots & c_s & *\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

であり，自明な係数 $c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$ のみであるから，$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ は 1 次独立である．よって $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $s = \operatorname{rank}(A)$ である．次に，$B$ は $A$ を基本変形を繰り返して得られるので，$B$ の行ベクトルすべては $A$ の行ベクトルの 1 次結合

$$\boldsymbol{b}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m, \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

で表される．よって $s \leq r$ が成り立つ．一方，$B$ に対して基本変形を繰り返して $A$ を得ることもできるので，

$$\boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{b}_m, \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

と表される．よって $r \leq s$ が成り立つ．以上より，$r = s = \operatorname{rank}(A)$ が得られる．

## 3.21 1 次独立なベクトルの最大個数と行列の正則性

**定理 3.81 (行列と 1 次独立性)** 正方行列 $A : n \times n$ に対して次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} & A \text{ の } n \text{ 個の列ベクトルは 1 次独立}\\ \Leftrightarrow\ & A \text{ の } n \text{ 個の行ベクトルは 1 次独立}\\ \Leftrightarrow\ & A\text{: 正則行列（}A \text{ は逆行列をもつ）}\\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{rank}(A) = n\\ \Leftrightarrow\ & \det(A) \neq 0\end{aligned}$$

## 3.22　一般の場合での 1 次独立なベクトルの最大個数

**定理 3.82 ( 1 次独立なベクトルと行列)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ が 1 次独立であり，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A, \qquad A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

をみたす.

(i) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次関係と $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次関係は等しい.

(ii) 特に $m = n$ のとき，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であることと，$A$ が正則であることとは，必用十分条件である.

（証明）　(i) ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次関係は

$$\boldsymbol{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n)\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,A\boldsymbol{c}$$

$$= (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)\,\tilde{\boldsymbol{c}}$$

となる．$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立であるから，$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}$ となる．$A\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}$ より

$$\boldsymbol{0} = A\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$$

を得る．これは $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次関係である．(ii) $m = n$ のとき $A$ は正方行列であるから，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立であることと $A$ が正則であることは等価である.

**例 3.83 ( 1 次独立なベクトルと行列)** ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ のベクトル

$$f_1(x) = 1 + x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x - x^3, \qquad f_3(x) = 1 + 3x - 3x^2 - 2x^3,$$
$$f_4(x) = -2 - 4x + x^2 - x^3, \qquad f_5(x) = -1 - 4x + 7x^2$$

が 1 次独立であるか調べる．まず，ベクトル $1, x, x^2, x^3 \in \mathbb{R}[x]_3$ は明らかに 1 次独立である．このとき $f_1, \cdots, f_5$ と $1, x, x^2, x^3$ とは

$$(☆) \qquad (f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5) = \left(1,\ x,\ x^2,\ x^3\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \left(1,\ x,\ x^2,\ x^3\right)A$$

の関係にある．次に $f_1, \cdots, f_5$ の 1 次関係は

$$0 = c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 + c_4f_4 + c_5f_5 = (f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = (f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5)\,\boldsymbol{c}$$

と表される．(☆) を用いると

$$0 = (f_1,\ \cdots,\ f_5)\,\boldsymbol{c} = \left(1,\ x,\ x^2,\ x^3\right) A\boldsymbol{c} = \left(1,\ x,\ x^2,\ x^3\right) \tilde{\boldsymbol{c}}, \qquad \tilde{\boldsymbol{c}} = A\boldsymbol{c}$$

となり，$1, x, x^2, x^3$ に関する 1 次関係を得る．$1, x, x^2, x^3$ は 1 次独立であるから $\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}$ が成立する．よって $\boldsymbol{c}$ は $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ をみたす．$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_5 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\boldsymbol{0} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 + c_5\boldsymbol{a}_5$$

となるので，$f_1, \cdots, f_5$ と $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係は等しい．ここで，行列 $A$ を簡約化して

$$A \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_4 & \boldsymbol{b}_5 \end{bmatrix}$$

とおく．このときある正則行列 $P$ を用いて $B = PA$ と表されるから，$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ より $B\boldsymbol{c} = PA\boldsymbol{c} = P\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ が成り立つので，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ と $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_5$ の 1 次関係は等しい．よって，$f_1, \cdots, f_5$ の 1 次関係は $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_5$ の 1 次関係より定まる．

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2,$$

$$\boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4$$

より，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ は 1 次独立である．$\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_5$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ の 1 次結合で表される．よって $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_5$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $3 = \operatorname{rank} A$ である．行列 $A$ の列ベクトルに対しても同じ 1 次関係が成り立つので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は 1 次独立である．残りのベクトルは $\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_5 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ と 1 次結合で表される．$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $3 = \operatorname{rank} A$ である．$f_1, \cdots, f_5$ にも同じ 1 次関係が成り立つので，$f_1, f_2, f_4$ は 1 次独立である．残りのベクトルは $f_3 = -f_1 + 2f_2$, $f_5 = 2f_1 - f_2 + f_4$ と 1 次結合で表される．よって $f_1, \cdots, f_5$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $3 = \operatorname{rank} A$ である．

## 3.23 演習問題 〜 1 次独立なベクトルの最大個数

**問 3.84 (1 次独立なベクトルの最大個数)** 次のベクトルの組の 1 次独立なベクトルの最大個数とそのときの組合わせのひとつを示せ．また，それ以外の 1 次従属なベクトルを 1 次独立なベクトルの 1 次結合で表わせ．

(1) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ (3) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

(4) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (5) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (6) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(7) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (8) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(9) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (10) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(11) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (12) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(13) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ (14) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(15) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \\ 23 \end{bmatrix}$ (16) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(17) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ (18) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$

(19) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (20) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(21) $\mathbb{R}^5 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(22) $\mathbb{R}[x]_3 \ni 1+2x,\ 2+3x-x^3,\ 1-x+2x^2,\ 1+x-x^3,\ 3x-2x^2$ (23) $\mathbb{R}[x]_4 \ni 1+x-x^2+2x^3+x^4$, $1+x^2+x^3$, $3+5x-7x^2+8x^3+5x^4$, $1-2x+5x^2-x^3-2x^4$, $x+2x^2+x^3+x^4$

**問 3.85 (1 次独立なベクトルの最大個数)** 次の行列の列ベクトルの 1 次独立なベクトルの最大個数を述べよ．また，行ベクトルの 1 次独立なベクトルの最大個数を述べよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

## 3.24 ベクトルで張られる空間

**定義 3.86 (ベクトルによって生成される空間)** $K$ 上のベクトル空間 $V$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の線形結合全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle_K = \{\, c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \mid c_1, c_2, \cdots, c_n \in K \,\}$$

と定義する．この集合をベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ によって**生成される（張られる）空間**という．または省略して単に $\langle \boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle$ と表記する．

**定理 3.87 (ベクトルにより生成される空間と部分空間)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ により生成される空間

$$W = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle$$

は $V$ の部分空間である．

（証明） まず，明らかに $W \subset V$ である．次に $W$ の任意の 2 つのベクトルは

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n, \qquad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{u}_1 + b_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$$

と表される．これらと任意のスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ との線形結合は

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} &= (\alpha a_1 + \beta b_1)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\alpha a_n + \beta b_n)\boldsymbol{u}_n \\ &= c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \in W \end{aligned}$$

となる．よって $W$ は部分空間である．

**例 3.88 (ベクトルによって生成される空間の具体例)** $\mathbb{R}^2$ のベクトルにより生成される空間

$$W = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \{\, \alpha\boldsymbol{u}_1 \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}$$

は，方向ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ で原点 $\mathbf{0}$ を通る直線である．

**例 3.89 (ベクトルによって生成される空間の具体例)** $\mathbb{R}^2$ のベクトルにより生成される空間

$$W = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

の任意のベクトルは

$$y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

である．2 つのスカラー $y_1, y_2$ はすべての実数をとる．ここで $y_1, y_1 + y_2$ を新たな 2 つの実数 $x_1, x_2$ を用いて $y_1 = x_1$, $y_1 + y_2 = x_2$ とおく．このとき，

$$y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

と表される．ベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体のなす集合は $\mathbb{R}^2$ と等しい．以上より，

$$W = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle = \mathbb{R}^2$$

が成立する．

**例 3.90 (ベクトルによって生成される空間の具体例)** $\mathbb{R}^3$ のベクトルにより生成される部分空間

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

は，方向ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ で原点 $\boldsymbol{0}$ を通る直線である．部分空間

$$W_2 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

は原点 $\boldsymbol{0}$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の平面である．部分空間

$$W_3 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

は $W_3 = \mathbb{R}_3$ が成り立つ．

**例 3.91 (ベクトルによって生成される空間の具体例)** 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ により生成される空間

$$W = \langle \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n \rangle$$

を考える．$W$ の任意のベクトルは

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

となる．係数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ はすべての実数であるから，ベクトル $\boldsymbol{x}$ のなす集合は $\mathbb{R}^n$ と等しい．よって，

$$\langle \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$$

が成り立つ．

## 3.25 基底

**定義 3.92 (基底)** ベクトル空間 $V$ が 1 次独立なベトクル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_n$ により生成される空間

$$V = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle$$

として表されるとき，ベクトルの組

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$$

を $V$ の**基底（basis）**という．

**例 3.93 (基底の具体例)** $\mathbb{R}^n$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を用いて

$$\mathbb{R}^n = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle$$

と表される．また，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立であるから，

$$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の基底である．これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底（standard basis）**という．

**注意 3.94 (基底の取り方の非一意性)** 基底の取り方は一意ではない．

**例 3.95 (基底の具体例)** $\mathbb{R}^2$ の基底を考える．$\mathbb{R}^2$ は標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をもち，

$$\mathbb{R}^2 = \langle \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2 \rangle$$

と表される．他の基底を考える．例えば，

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

は基底となり得るか調べる．まず，

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

であるから，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立である．次に，

$$\mathbb{R}^2 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle$$

となるか調べる．すなわち $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1' \boldsymbol{u}_1 + x_2' \boldsymbol{u}_2$$

をみたす $x_1', x_2'$ が一意に定まるか調べる．この式を書き換えると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = x_1' \boldsymbol{u}_1 + x_2' \boldsymbol{u}_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2' \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}' \end{aligned}$$

となる．これは $\boldsymbol{x}'$ についての非同次連立方程式 $P\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$ である．$\det(P) \neq 0$ より $P$ は正則であるから

$$\boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1' = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \quad x_2' = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

となる．$x_1', x_2'$ は任意の $x_1, x_2$ に対して一意に定まる．よって，$\mathbb{R}^2 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle$ が成り立つ．以上より

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の基底である．

### 3.26 次元

**定理 3.96 (ベクトル空間の基底の個数)** ベクトル空間の基底の個数は取り方に依らず一意に定まる．その個数は，ベクトル空間に含まれる 1 次独立なベクトルの最大個数と等しい．

（証明） ベトクル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ と $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が共に $V$ の基底とする．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書ける．$n > m$ と仮定すると $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属であり，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であることと矛盾する．よって $n \leq m$ である．同様に $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける．$m > n$ と仮定すると $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次従属であり，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立であることと矛盾する．よって $m \leq n$ である．以上より $n = m$ となり，基底の個数は一定である．

**定義 3.97 (次元)** $K$ 上のベクトル空間 $V$ の基底の個数が $n$ 個であるとき，これをベクトル空間 $V$ の**次元（dimension）**と呼び，

$$\dim_K(V) = n$$

と表記する．または省略して単に

$$\dim(V) = n$$

と表記する．

**注意 3.98 (零ベクトル空間)** 零ベクトル $\mathbf{0}$ のみからなるベクトル空間 $V = \{\mathbf{0}\}$ を**零ベクトル空間**といい，次元は $\dim(V) = 0$ とする．

**定義 3.99 (有限次元のベクトル空間)** ベクトル空間 $V$ の次元 $\dim(V)$ が有限であるとき，$V$ を**有限次元のベクトル空間**という．

**定理 3.100 (ベクトル空間の次元)** ベクトル空間 $V$ の次元 $\dim(V)$ は $V$ の 1 次独立なベクトルの最大個数と等しい．

（証明） (必用条件) $\dim(V) = n$ とすると，基底の個数は $n$ である．このとき任意の $n+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属となるから，$V$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $n$ である．(十分条件) $V$ の 1 次独立なベクトルの最大個数を $n$ とする．$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立とすると，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}$ は 1 次従属となる．このとき $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合で表される．これは $\boldsymbol{u}$ は $V$ の任意のベクトルに対して成り立つので，$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $V$ の基底となる．よって $\dim(V) = n$ を得る．

**例 3.101 (ベクトル空間の次元の具体例)** $\mathbb{R}^n$ は

$$\mathbb{R}^n = \langle \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n \rangle$$

と表される．標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ の個数は $n$ である．よって次元は

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

となる．

**例 3.102 (ベクトル空間の次元の具体例)** $\mathbb{R}[x]_n$ の次元を考える．$\mathbb{R}[x]_n$ のベクトル $1, x, x^2, \cdots, x^n$ の 1 次関係

$$0 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

の係数は自明なもの $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ に限るので，$1, x, x^2, \cdots, x^n$ は 1 次独立である．また，このベクトルの 1 次結合全体の集合は

$$\left\{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle 1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n \right\rangle = \mathbb{R}[x]_n$$

をみたす．よって $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ は $\mathbb{R}[x]_n$ の基底となるから，

$$\dim(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1$$

となる．

**例 3.103 (ベクトル空間の次元の具体例)** 無限回微分可能な関数全体の集合 $C^\infty$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．$C^\infty$ は解析関数

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots$$

全体の集合であるから，基底として $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots\}$ をもつ．無限個の基底をもつので，$C^\infty$ は**無限次元のベクトル空間**である．

**問 3.104 (線形微分方程式の解集合)** $C^\infty$ の部分空間

$$W = \left\{ f(x) \in C^\infty \;\middle|\; a_n \frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dx} + a_0 f = 0 \right\}$$

は $\dim(W) = n$ をみたす．これを示せ．

## 3.27 ちょっとまとめ

**まとめ 3.105 (次元)** ベクトル空間 $V$ に座標軸を書いたとき，座標軸の方向ベクトルの組が基底である．次元は

$$\begin{aligned}\dim(V) &= \text{基底の個数} \\ &= V \text{ の 1 次独立なベクトルの最大個数} \\ &= \text{座標軸の本数}\end{aligned}$$

である．

## 3.28 ベクトルで張られる部分空間の次元

**定理 3.106 (ベクトル空間の次元と階数)** 部分空間

$$W = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle$$

の次元は

$$\dim(W) = \mathrm{rank}\,(A), \qquad A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

である．

（証明）　ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ の 1 次独立なベクトル最大個数は $r = \mathrm{rank}\,(A)$ である．$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ が 1 次独立であるとすると，その他のベクトル $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ はこれらの 1 次結合で表されるので，

$$\boldsymbol{u}_i = \mu_{i,1}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_{i,r}\boldsymbol{u}_r, \qquad i = r+1, r+2, \cdots, n$$

となる．このとき $W$ の任意のベクトルは

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r + c_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \\
&= c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r + c_{r+1}(\mu_{r+1,1}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_{r+1,r}\boldsymbol{u}_r) + \cdots + c_n(\mu_{n,1}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_{n,r}\boldsymbol{u}_r) \\
&= (c_1 + c_{r+1}\mu_{r+1,1} + \cdots + c_n\mu_{n,1})\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (c_n + c_{r+1}\mu_{r+1,r} + \cdots + c_n\mu_{n,r})\boldsymbol{u}_r \\
&= \tilde{c}_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \tilde{c}_r\boldsymbol{u}_r
\end{aligned}$$

である．よって $W$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ となり，次元は $r = \mathrm{rank}\,(A) = \dim(W)$ となる．

**例 3.107 (部分空間の次元の具体例)** ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3 \rangle$$

を考える．この次元を求める．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を列ベクトルする行列 $A$ を簡約化して

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix}$$

を得る．このとき $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{b}_3 = -5\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2$ が成り立つので，$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立であり，$\boldsymbol{a}_3 = -5\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$ が成り立つ．ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $2 = \mathrm{rank}\,(A)$ である．$W$ の任意のベクトルは

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3(-5\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2) \\
&= (c_1 - 5c_3)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 + 2c_3)\boldsymbol{a}_2 = \tilde{c}_1\boldsymbol{a}_1 + \tilde{c}_2\boldsymbol{a}_2
\end{aligned}$$

と表される．$\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ は任意であるから

$$\begin{aligned}
W = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3 \rangle &= \{\, c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \,\} \\
&= \{\, \tilde{c}_1\boldsymbol{a}_1 + \tilde{c}_2\boldsymbol{a}_2 \mid \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R} \,\} = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2 \rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立であるから，$W$ の基底は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ となる．よって

$$\dim(W) = \dim(\langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3 \rangle) = \dim(\langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2 \rangle) = 2 = \mathrm{rank}\,(A)$$

を得る．

### 3.29 部分空間のさらに部分空間の次元

**定理 3.108 (部分空間の次元)** ベクトル空間 $V$, $W$ が

$$W \subset V$$

であるとき,

$$\dim(W) \leq \dim(V)$$

が成り立つ.

**例 3.109 (部分空間の次元の具体例)** 部分空間

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

の基底は $\{\boldsymbol{u}_1\}$ である．よって

$$\dim(W_1) = 1$$

となる．$W_1$ は原点 $O(\boldsymbol{0})$ と点 $P(\boldsymbol{u}_1)$ を通る直線である.

**例 3.110 (部分空間の次元の具体例)** 部分空間

$$W_2 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

の基底を求める．$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ が 1 次独立であるか調べる.

$$A_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから，$\mathrm{rank}\,(A_2) = 2$ であり，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立となる．よって $W_2$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ であり,

$$\dim(W_2) = \mathrm{rank}\,(A_2) = 2$$

を得る．$W_2$ は原点 $O(\boldsymbol{0})$ と点 $P_1(\boldsymbol{u}_1)$, $P_2(\boldsymbol{u}_2)$ を通る平面である．さらには

$$W_1 \subset W_2, \qquad \dim(W_1) < \dim(W_2)$$

となることに注意する.

**例 3.111 (部分空間の次元の具体例)** 部分空間

$$W_3 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

の基底を求める．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるか調べる．

$$A_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから，$\operatorname{rank}(A_3) = 3$ であり，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立となる．よって $W_3$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ であり，

$$\dim(W_3) = \operatorname{rank}(A_3) = 3$$

を得る．$W_3$ は 3 本の軸がそれぞれ点 $P_1(\boldsymbol{u}_1)$, $P_2(\boldsymbol{u}_2)$, $P_3(\boldsymbol{u}_3)$ を通る 3 次元空間である．さらには

$$W_1 \subset W_2 \subset W_3, \qquad \dim(W_1) < \dim(W_2) < \dim(W_3)$$

となることに注意する．

**例 3.112 (部分空間の次元の具体例)** 部分空間

$$W_4 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

の基底を求める．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立であるか調べる．

$$A_4 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから，$\operatorname{rank}(A_4) = 2 < 3$ であり，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_4$ は 1 次従属となる．最大個数となる 1 次独立なベクトルは $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ であり，その他のベクトルは $\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ と表される．よって $W_4$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ であり，

$$\begin{aligned} W_4 &= \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle = \{\, \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \,\} = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle \\ &= \{\, \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \,\} = \{\, (\alpha + \gamma)\boldsymbol{u}_1 + (\beta - \gamma)\boldsymbol{u}_2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \left\{ \tilde{\alpha}\boldsymbol{u}_1 + \tilde{\beta}\boldsymbol{u}_2 \;\middle|\; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R} \right\} = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle = W_2 \end{aligned}$$

となる．以上より

$$\dim(W_4) = \operatorname{rank}(A_4) = 2$$

を得る．$W_4$ は平面 $W_2$ と等しい．点 $P_4(\boldsymbol{u}_4)$ は平面 $W_2$ に含まれるためである．さらには

$$W_1 \subset W_2 = W_4 \subset W_3, \qquad \dim(W_1) < \dim(W_2) = \dim(W_4) < \dim(W_3)$$

となることに注意する．

**例 3.113 (部分空間の次元の具体例)** 部分空間

$$W_5 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_5 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

の基底を求める．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5$ が 1 次独立であるか調べる．

$$A_5 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

であるから，$\mathrm{rank}\,(A_5) = 3 < 4$ であり，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_5$ は 1 次従属となる．最大個数となる 1 次独立なベクトルは $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ であり，その他のベクトルは $\boldsymbol{u}_5 = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3)/2$ と表される．よって $W_5$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ であり，

$$\begin{aligned}
W_5 &= \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_5 \rangle = \{\ \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_3 + \delta\boldsymbol{u}_5 \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\ \} \\
&= \left\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3 \right\rangle \\
&= \left\{\ \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_3 + \delta\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3\right) \ \middle|\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{\ \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)\boldsymbol{u}_1 + \left(\beta + \frac{\delta}{2}\right)\boldsymbol{u}_2 + \left(\gamma + \frac{\delta}{2}\right)\boldsymbol{u}_3 \ \middle|\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{\ \tilde{\alpha}\boldsymbol{u}_1 + \tilde{\beta}\boldsymbol{u}_2 + \tilde{\gamma}\boldsymbol{u}_3 \ \middle|\ \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in \mathbb{R} \right\} = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = W_3
\end{aligned}$$

となる．以上より

$$\dim(W_5) = \mathrm{rank}\,(A_5) = 3$$

を得る．$W_5$ は $W_3$ と等しい．さらには

$$W_1 \subset W_2 = W_4 \subset W_3 = W_5, \qquad \dim(W_1) < \dim(W_2) = \dim(W_4) < \dim(W_3) = \dim(W_5)$$

となることに注意する．

## 3.30　次元と同じ個数の 1 次独立なベクトルは基底

**定理 3.114 (ベクトルで張られる空間の次元)** ベクトル空間 $V$ の次元が $\dim(V) = n$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ に対して次の条件は等価である．

(i) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は $V$ の基底である．

(ii) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．

(iii) $V = \langle \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n \rangle$.

**例 3.115 (ベクトルで張られる空間の次元)** $\mathbb{R}^3$ の基底のひとつに標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ がある．個数は 3 個なので $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ となる．次に次元 $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ と同じ個数のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

を考える．これらを列ベクトルとする行列を $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ とおく．$\operatorname{rank}(A) = 3$ より $A$ は正則となり，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次独立である．このとき $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は基底となる．これを示す．$\mathbb{R}^3$ の任意のベクトルは

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = E\boldsymbol{c} = AA^{-1}\boldsymbol{c} = A\tilde{\boldsymbol{c}} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{c}} = \tilde{c}_1\boldsymbol{a}_1 + \tilde{c}_2\boldsymbol{a}_2 + \tilde{c}_3\boldsymbol{a}_3
\end{aligned}
$$

と表される．ここで $\tilde{\boldsymbol{c}} = A^{-1}\boldsymbol{c}$ とおいた．$\tilde{c}_1 = c_1$, $\tilde{c}_2 = -c_1 + c_2$, $\tilde{c}_3 = -c_2 + c_3$ は任意の実数となる．よって

$$
\mathbb{R}^3 = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3 \rangle
$$

が成り立つ．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次独立であり $\mathbb{R}^3$ を生成するので，$\mathbb{R}^3$ の基底となる．

**例 3.116 (ベクトルで張られる空間の次元)** $\mathbb{R}[x]_2$ の基底のひとつに $\{1, x, x^2\}$ がある．すなわち $\{1, x, x^2\}$ は 1 次独立であり

$$
\mathbb{R}[x]_2 = \left\langle 1,\ x,\ x^2 \right\rangle
$$

が成り立つ．よって $\dim(\mathbb{R}[x]_2) = 3$ となる．次に次元 $\dim(\mathbb{R}[x]_2) = 3$ と同じ個数のベクトル

$$
f_1 = x + x^2, \quad f_2 = 1 - x^2, \quad f_3 = x
$$

を考える．これらのベクトルは

$$
(f_1,\ f_2,\ f_3) = \left(1,\ x,\ x^2\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \left(1,\ x,\ x^2\right) A
$$

をみたす．$\operatorname{rank}(A) = 3$ であり $A$ は正則であるので，ベクトルの組 $\{f_1, f_2, f_3\}$ は 1 次独立となる．このとき $\{f_1, f_2, f_3\}$ は基底となる．これを示す．$(f_1,\ f_2,\ f_3)\,E = \left(1,\ x,\ x^2\right) A$ に対して右から $A^{-1}$ をかけると

$$
\left(1,\ x,\ x^2\right) = (f_1,\ f_2,\ f_3)\,A^{-1} = (f_1,\ f_2,\ f_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

が成り立つ．$\mathbb{R}[x]_2$ の任意のベクトルは

$$
\begin{aligned}
f = c_0 + c_1x + c_2x^2 &= \left(1,\ x,\ x^2\right) \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \left(1,\ x,\ x^2\right) \boldsymbol{c} = (f_1,\ f_2,\ f_3)\,A^{-1}\boldsymbol{c} \\
&= (f_1,\ f_2,\ f_3)\,\tilde{\boldsymbol{c}} = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1\,x + \tilde{c}_2\,x^2
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\tilde{\boldsymbol{c}} = A^{-1}\boldsymbol{c}$ とおいた．$\tilde{c}_1 = c_0 + c_2$, $\tilde{c}_2 = c_0$, $\tilde{c}_3 = -c_0 + c_1 - c_2$ は任意の実数であるから，

$$
\mathbb{R}[x]_2 = \langle f_1,\ f_2,\ f_3 \rangle
$$

が成り立つ．$\{f_1, f_2, f_3\}$ は一次独立であり $\mathbb{R}[x]_2$ を生成するので，$\mathbb{R}[x]_2$ の基底となる．

### 3.31 演習問題 〜 次元

**問 3.117 (ベクトルで生成される空間)** 次のベクトルで生成される集合が表す図形は何か述べよ.

(1) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ (2) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$ (3) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ (4) $\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$

**問 3.118 (基底)** 次のベクトルの組は基底となるか述べよ.

(1) $\mathbb{R}^3 \ni \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ (2) $\mathbb{R}^3 \ni \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(3) $\mathbb{R}[x]_2 \ni \{x + x^2,\ 1 - x^2,\ x\}$ (4) $\mathbb{R}[x]_2 \ni \{1 - x + x^2,\ -1 + 2x + 2x^2,\ 1 - 2x - x^2\}$

**問 3.119 (基底)** 次のベクトルの組が基底となるよう $a, b, c$ を定めよ.

(1) $\mathbb{R}^3 \ni \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\}$ (2) $\mathbb{R}[x]_2 \ni \{1 + x + 3x^2,\ 1 + 2x + 3x^2,\ a + bx + cx^2\}$

**問 3.120 (基底)** ベクトル空間 $V$ において基底のひとつを $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ とする. 次のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は $V$ の基底となるか述べよ.

(1) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases}$

**問 3.121 (次元)** 次のベクトル空間の次元と基底の組をひとつ求めよ.

(1) $\mathbb{R}^2$ (2) $\mathbb{R}^3$ (3) $\mathbb{R}^4$ (4) $\mathbb{R}^n$ (5) $\mathbb{R}[x]_2$ (6) $\mathbb{R}[x]_3$ (7) $\mathbb{R}[x]_4$ (8) $\mathbb{R}[x]_n$

(9) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\rangle$ (10) $\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ (11) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ (12) $\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle$

(13) $\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 87 \end{bmatrix} \right\rangle$ (14) $\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ (15) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

(16) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 13 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle$ (17) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ (18) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

(19) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ (20) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ (21) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$

(22) $\left\langle \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -17 \\ -11 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ (23) $\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ (24) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -11 \end{bmatrix} \right\rangle$

(25) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ (26) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle$

(27) $\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\1\\0\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\3\\1\\-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$ (28) $\left\langle \begin{bmatrix}1\\-4\\-2\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\-3\\-1\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\-8\\-2\\7\end{bmatrix} \right\rangle$
(29) $\langle \boldsymbol{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ (30) $\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ (31) $\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ (32) $\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ (33) $\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_5 \rangle_{\mathbb{R}}$
(34) $\langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_4,\ \boldsymbol{u}_6 \rangle_{\mathbb{R}}$ (35) $\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4,\ \boldsymbol{u}_5,\ \boldsymbol{u}_6 \rangle_{\mathbb{R}}$ (36) $\langle f_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ (37) $\langle f_1,\ f_2 \rangle_{\mathbb{R}}$
(38) $\langle f_1,\ f_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ (39) $\langle f_1,\ f_2,\ f_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ (40) $\langle f_1,\ f_3,\ f_5 \rangle_{\mathbb{R}}$ (41) $\langle f_2,\ f_4,\ f_6 \rangle_{\mathbb{R}}$
(42) $\langle f_1,\ f_3,\ f_5,\ f_6 \rangle_{\mathbb{R}}$ (43) $\langle f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6 \rangle_{\mathbb{R}}$
ただし

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix}-10\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_5 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_6 = \begin{bmatrix}0\\-1\\5\end{bmatrix},$$
$$f_1 = 1,\quad f_2 = 1 - x,\quad f_3 = -3,\quad f_4 = 1 - 2x^2,\quad f_5 = 1 - x + 2x^2,\quad f_6 = x - 2x^2.$$

### 3.32 解空間

**定義 3.122 (解空間)** 同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の集合

$$W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

を**解空間（solution space）**という．

**定理 3.123 (解空間と部分空間)** 解空間 $W$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

（証明） $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とする．すなわち，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解であり，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

をみたすとする．このとき，

$$A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha(A\boldsymbol{x}) + \beta(A\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{0} + \beta\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

となるので $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ もまた解である．よって $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in W$ となり，$W$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

**注意 3.124 (非同次系の解空間)** 非同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ の解集合 $W$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間ではない．なぜなら，$A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b}$ より原点 $\boldsymbol{0}$ を解にもたない．よって $W \not\ni \boldsymbol{0}$ であり，部分空間とはならない．

**定義 3.125 (一般解)** 解空間 $W$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k\}$ を方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解**という．このとき $W$ の任意のベクトルは基本解の線形結合で

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{u}_k$$

と表される．これを方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**一般解（general solution）**という．

**定理 3.126 (解空間の次元)** 同次系の解空間 $W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ の次元は解の任意定数の個数と等しく，

$$\dim(W) = n - \operatorname{rank}(A)$$

で与えられる．

（証明）　行列 $A$ を簡約化して方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解を

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{u}_k$$

の形で得たとする．ただし $k = n - \mathrm{rank}\, A$ とおく．このときベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k\}$ が 1 次独立か調べる．これらの 1 次関係は

$$\mathbf{0} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{u}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = U\boldsymbol{c}$$

となる．行列 $U$ は必ず

$$U = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

の形をしているので $c_1 = 0, c_2 = 0, \cdots, c_k = 0$ が成り立つ．よってベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k\}$ は 1 次独立である．このとき解空間 $W$ は

$$W = \{\, c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{u}_k \mid c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R} \,\} = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_k \rangle$$

となるので $W$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k\}$ である．よって $\dim(W) = k = n - \mathrm{rank}\,(A)$ となる．

**例 3.127 (解空間の具体例)** 解空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{aligned} \right\}$$

を考える．方程式を $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ とおく．$A$ を簡約化して

$$A \to B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる．これより，方程式は

$$x_1 = 2x_2 - 3x_4 - x_5, \qquad x_3 = x_4 - 2x_5$$

と書き換わる．$\mathrm{rank}\, A = 2$ より任意定数の個数は $5 - \mathrm{rank}\,(A) = 3$ となり，任意定数を $x_2 = c_1, x_3 = c_2, x_5 = c_3 \in \mathbb{R}$ とおく．よって一般解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$$

と得られる．ここで $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_3$ は基本解である．解空間は

$$W=\{\ c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3 \mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\ \}=\langle\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\rangle$$

となる．$W$ の基底を求める．$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立であるか調べる．1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$$

は

$$\left.\begin{aligned}2c_1-3c_2-c_3&=0\\ c_1&=0\\ c_2-2c_3&=0\\ c_2&=0\\ c_3&=0\end{aligned}\right\}$$

となる．よって条件をみたすのは $c_1=0,c_2=0,c_3=0$ のときのみである．$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．$W$ の基底は $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ となる．以上より

$$\dim(W)=3$$

を得る．これは解の任意定数の個数と等しい．

## 3.33 演習問題 〜 解空間

**問 3.128 (解空間)** 次の解空間の基底と次元を求めよ．ただし，(12), (13), (19) では $\dim(W)\geq 1$ となるよう $a$ の値を定めよ．

(1) $W=\{\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ \text{ただし}\ \operatorname{rank}(A)=r\ \}$　(2) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\,|2x_1-x_2=0\right\}$

(3) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{aligned}2x_1-x_2&=0\\ x_1+x_2&=0\end{aligned}\right\}$　(4) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{aligned}2x_1-x_2&=0\\ -2x_1+x_2&=0\end{aligned}\right\}$

(5) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\ \text{ただし}\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0,\ a_{11}\neq 0,a_{22}\neq 0\right\}$

(6) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\ \text{ただし}\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0,\ a_{11}\neq 0,a_{22}\neq 0\right\}$

(7) $W=\left\{\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0\right\}$　(8) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix}1&2&-1\\3&-3&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$

(9) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$　(10) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$

(11) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&3&-1\\2&-2&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$　(12) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix}4&-2&-a\\2&-3&1\\3&-1&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$

(13) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix}1&2&-1\\3&a&-2\\1&5a&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$　(14) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&3&-1\\1&2&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$

(15) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{bmatrix}1&-2&-3&4\\0&2&2&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$　(16) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\3&1&2&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$

(17) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ (18) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$

(19) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & a & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & 13 \\ 2 & -4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ (20) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$

(21) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -7 & 10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$

(22) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0,\ f'(1) = 0 \,\}$ (23) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0,\ f(-1) = 0 \,\}$

## 3.34 座標

**定義 3.129 (座標)** ベクトル空間 $V$ とその基底を $\Sigma = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とする．このとき $V$ の任意の元 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と表せる．線形結合の係数の組

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)_\Sigma$$

を基底 $\Sigma$ における**座標（coordinate）**という．また，誤解がないときは単に $(x_1, \cdots, x_n)$ と表記する．

**注意 3.130 (列行列の成分)** $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ における任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ の座標を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)_\Sigma$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

と書ける．列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分の組 $(x_1, \cdots, x_n)$ は標準基底における座標と見なされる．

**例 3.131 (座標の具体例)** $\mathbb{R}^2$ の点 $(x_1, x_2)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．$(x_1, x_2)$ は標準基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ における座標 $(x_1, x_2)_\Sigma$ とみなせるから，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$$

と表される．次に基底

$$\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

における座標を $(x'_1, x'_2)_{\Sigma'}$ とすると，

$$\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'_1 \\ x'_2\end{bmatrix} = U\boldsymbol{x}'$$

と書ける．このとき

$$\boldsymbol{x}' = U^{-1}\boldsymbol{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \qquad x'_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

が成り立つ．よって $\Sigma'$ における座標は $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1-x_2}{2}\right)_{\Sigma'}$ となる．例えば点 $(1,0)_\Sigma$, $(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$ は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\Sigma'}$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)_{\Sigma'}$, $(1,0)_{\Sigma'}$ となる．

**例 3.132 (座標の具体例)** $\mathbb{R}[x]_n$ のベクトルは多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

である．任意の $f$ の基底 $\Sigma = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ における座標は $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)_\Sigma$ である．

## 3.35 基底の変換

ベクトル空間の基底の取り方は一意ではないので，あるベクトル空間 $V$ に対して

$$V = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}'_1,\ \boldsymbol{u}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n \rangle$$

が成り立つ．ここで $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ とは異なる基底の組である．片方の組を基底とみなせば片方は 1 次従属なベクトルであるから，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &= p_{11}\boldsymbol{u}_1 + p_{11}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{u}_n, \\
\boldsymbol{u}'_2 &= p_{12}\boldsymbol{u}_1 + p_{12}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{u}_n, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{u}'_n &= p_{1n}\boldsymbol{u}_1 + p_{1n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{u}_n
\end{aligned}$$

と書ける．ここで $p_{ij}$ はある定数である．この関係式は

$$\left(\boldsymbol{u}'_1,\ \boldsymbol{u}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right) = \left(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\right)P, \qquad P = \begin{bmatrix}p_{ij}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

とも表される．

**定義 3.133 (基底の変換行列)** ベクトル空間 $V$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ に対して

$$\left(\boldsymbol{u}'_1,\ \boldsymbol{u}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right) = \left(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\right)P$$

をみたす行列 $P$ を**基底の変換行列**という．

**注意 3.134 (基底の変換行列)** 数ベクトル空間（$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$）における基底の変換は

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}'_1 & \boldsymbol{u}'_2 & \cdots & \boldsymbol{u}'_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}P, \qquad U' = UP$$

とも表される．

**注意 3.135 (基底の変換行列の正則性)** $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と $\{\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ は 1 次独立であるから，基底の変換行列 $P$ は正則である．

**例 3.136 (基底の変換行列の具体例)** $\mathbb{R}^2$ において標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ から基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

への変換行列 $P$ を求める．$P$ は

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\,P$$

をみたす.

**方法 1:** まず,

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = u_{11}\boldsymbol{e}_1 + u_{21}\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = u_{12}\boldsymbol{e}_1 + u_{22}\boldsymbol{e}_2$$

とおくと

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2) = (u_{11}\boldsymbol{e}_1 + u_{21}\boldsymbol{e}_2,\ u_{12}\boldsymbol{e}_1 + u_{22}\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}$$

となる．よって

$$P = U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

を得る.

**方法 2:** または，$P$ は

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} P, \qquad U = EP$$

をみたすので $P = U$ を得る.

**定理 3.137 (基底の変換行列)** ベクトル空間 $V$ において，基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ から基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ への変換行列を $P$ とし，基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ から基底 $\{\boldsymbol{u}''_1, \cdots, \boldsymbol{u}''_n\}$ への変換行列を $Q$ とする．このとき基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ から基底 $\{\boldsymbol{u}''_1, \cdots, \boldsymbol{u}''_n\}$ への変換行列 $R$ は

$$R = P^{-1}Q$$

である.

（証明） まず，定義より

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}'_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n) &= (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,P, \\ (\boldsymbol{u}''_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}''_n) &= (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,Q, \\ (\boldsymbol{u}''_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}''_n) &= (\boldsymbol{u}'_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n)\,R \end{aligned}$$

が成り立つ．これより

$$(\boldsymbol{u}''_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}''_n) = (\boldsymbol{u}'_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n)\,R = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,PR = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,Q$$

となるので $PR = Q$ を得る．よって $R = P^{-1}Q$ となる.

**例 3.138 (基底の変換行列の具体例)** $\mathbb{R}^2$ において基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

に対する基底

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

への変換行列 $R$ を求める．すなわち，

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2)\, R$$

をみたす行列 $R$ を求める．

**方法 1:** まず，標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に対する基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ と $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ の変換行列を $P$, $Q$ とおく．すなわち，

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2) &= (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\, P, \qquad & P = U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\, Q, \qquad & Q = V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成立する．このとき

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2)\, R = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\, PR = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\, Q$$

となるので $PR = Q$ より

$$R = P^{-1}Q = U^{-1}V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

を得る．

**方法 2:** または，$R$ は

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} R, \qquad V = UR$$

をみたすので $R = U^{-1}V$ より得られる．

## 3.36 座標変換

**定理 3.139 (座標変換)** ベクトル空間 $V$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ における座標が $(x_1, x_2, \cdots, x_n)_\Sigma$ であり，基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ における座標が $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)_{\Sigma'}$ であるとする．また，基底 $\Sigma$ に対する基底 $\Sigma'$ の変換行列が $P$ であるとする．すなわち $P$ は

$$(\boldsymbol{u}'_1,\ \boldsymbol{u}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\, P$$

をみたすとする．このとき，

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

が成立する．これを座標 $(x_1, \cdots, x_n)_\Sigma$ から座標 $(x'_1, \cdots, x'_n)_{\Sigma'}$ への**座標変換（coordinate transformation）**という．

（証明）　ベクトル空間 $V$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ を考える．基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ のときの座標が $(x_1, x_2, \cdots, x_n)_\Sigma$ であれば

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{x}$$

となる．基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ のときの座標が $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)_{\Sigma'}$ であれば

$$\boldsymbol{a} = x'_1\boldsymbol{u}'_1 + x'_2\boldsymbol{u}'_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{u}'_n = \left(\boldsymbol{u}'_1,\ \boldsymbol{u}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right) \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{u}'_1,\ \boldsymbol{u}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right)\boldsymbol{x}'$$

となる．これらのベクトルは等しいので，

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{u}'_1,\ \boldsymbol{u}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right)\boldsymbol{x}'$$

と表される．ここで，基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に対する基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ の変換行列を $P$ とおくとき，

$$\left(\boldsymbol{u}'_1,\ \boldsymbol{u}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right) = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,P$$

が成り立つので，

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,P\boldsymbol{x}'$$

を得る．これより，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ が成り立つ．

**例 3.140 (座標変換の具体例)** $\mathbb{R}^2$ の点 $(1,0), (0,1), (1,1)$ は，標準基底

$$\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$$

における座標で表すと，$(1,0)_\Sigma, (0,1)_\Sigma, (1,1)_\Sigma$ と表される．これらの点を基底

$$\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

における座標として表す．基底 $\Sigma$ から基底 $\Sigma'$ への座標変換を考える．基底 $\Sigma$ に対する基底 $\Sigma'$ の変換行列を $P$ とおくと，$U = EP$ より

$$P = U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となる．このとき座標変換は

$$(\text{☆}) \quad \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \end{cases}$$

$$(\bigstar) \quad \boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ x_2' = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

と表される．点 $(1,0)_\Sigma$, $(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$ より

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2$$

とおく．このとき座標変換より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}' = P^{-1}\boldsymbol{a} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2, \\ \boldsymbol{b}' = P^{-1}\boldsymbol{b} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2, \\ \boldsymbol{c}' = P^{-1}\boldsymbol{c} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_1 \end{aligned}$$

と表される．よって座標 $(1,0)_\Sigma, (0,1)_\Sigma, (1,1)_\Sigma$ はそれぞれ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\Sigma'}$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)_{\Sigma'}$, $(1,0)_{\Sigma'}$ となる．

また，座標 $(x_1, x_2)$ における直線

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

を座標 $(x_1', x_2')$ で表す．(☆) を代入すると

$$5x_1' - x_2' = 0$$

を得る．

**例 3.141 (座標変換の具体例)** $\mathbb{R}^2$ において 2 組の基底

$$\Sigma = \{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \Sigma' = \{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},$$

とあるベクトル $\boldsymbol{a}$ を考える．$\boldsymbol{a}$ の基底 $\Sigma$ における座標が $(x_1, x_2) = (2, -3)_\Sigma$ のとき，$\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - 3\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

となる．ベクトル $\boldsymbol{a}$ の基底 $\Sigma'$ における座標 $(x_1', x_2')$ を求める．ここで，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 = x_1'\boldsymbol{v}_1 + x_2'\boldsymbol{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}\\
&\quad \Leftrightarrow \quad U\boldsymbol{x} = V\boldsymbol{x}' \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = U^{-1}V\boldsymbol{x}'
\end{aligned}
$$

より，座標 $(x_1, x_2)_\Sigma$ から座標 $(x_1', x_2')_{\Sigma'}$ への座標変換 $\boldsymbol{x} = U^{-1}V\boldsymbol{x}'$ を得る．座標 $(x_1', x_2')_{\Sigma'}$ を得るためには $V^{-1}U$ を左から掛けて

$$
\boldsymbol{x}' = V^{-1}U\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}
$$

を用いる．これに数値を代入すると，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の基底 $\Sigma'$ における座標が $(x_1', x_2')_{\Sigma'} = \left(\frac{14}{5}, -\frac{11}{5}\right)_{\Sigma'}$ と得られる．

**例 3.142 (座標変換の具体例)** $\mathbb{R}[x]_2$ のベクトル $f$ の基底 $\Sigma = \{1,\ x,\ x^2\}$ における座標が $(1, -2, 3)_\Sigma$ のとき，基底 $\Sigma' = \{1,\ 1{+}x,\ 1{+}x{+}x^2\}$ における座標 $(a_0', a_1', a_2')_{\Sigma'}$ を求める．まず，$f$ は $f = 1{-}2x{+}3x^2$ であり，$f = a_0' + a_1'(1+x) + a_2'(1+x+x^2)$ と書ける．これらが等しいので，

$$
1 - 2x + 3x^2 = a_0' + a_1'(1+x) + a_2'(1+x+x^2) = (a_0' + a_1' + a_2') + (a_1' + a_2')x + a_2'x^2
$$

$$
\begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_0' + a_1' + a_2'\\a_1' + a_2'\\a_2'\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0'\\a_1'\\a_2'\end{bmatrix}
$$

が成り立つ．$\{1,\ x,\ x^2\}$ は 1 次独立であるから，方程式

$$
\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0'\\a_1'\\a_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}
$$

を得る．これを解くと $a_0' = 3,\ a_1' = -5,\ a_2' = 3$ となる．よって

$$
f = 3 - 5(1+x) + 3(1+x+x^2)
$$

と表され，基底 $\Sigma'$ における $f$ の座標は $(3, -5, 3)_{\Sigma'}$ となる．

## 3.37 演習問題 〜 座標

**問 3.143 (座標)** 基底 $\Sigma$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}$ の座標を求めよ．

(1) $\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \Sigma = \left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ (2) $\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \Sigma = \left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right\}$

(3) $\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \Sigma = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ (4) $\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \Sigma = \left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

**問 3.144 (基底の変換行列)** 基底 $\Sigma$ から基底 $\Sigma'$ への基底の変換行列を求めよ．

(1) $\mathbb{R}^2 \ni \Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \Sigma' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ (2) $\mathbb{R}^2 \ni \Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \Sigma' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

(3) $\mathbb{R}^3 \ni \Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \Sigma' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(4) $\mathbb{R}^3 \ni \Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \Sigma' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(5) $\mathbb{R}[x]_2 \ni \Sigma = \{1,\ x,\ x^2\}, \Sigma' = \{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}$

(6) $\mathbb{R}[x]_2 \ni \Sigma = \{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}, \Sigma' = \{1,\ 1+2x,\ 1+4x+4x^2\}$

**問 3.145 (座標変換)** 次の座標で与えられるベクトルを求めよ．また，このベクトルの基底 $\Sigma'$ に関する座標を求めよ．ただし，基底 $\Sigma, \Sigma'$ は前問の基底を用いる．

(1)–(2) $(2,-3)_\Sigma$ (3)–(4) $(1,-1,2)_\Sigma$ (5)–(6) $(2,1,-2)_\Sigma$

**問 3.146 (座標変換)** 前問の基底 $\Sigma, \Sigma'$ における座標をそれぞれ $(x_1,\cdots,x_n)_\Sigma, (x'_1,\cdots,x'_n)_{\Sigma'}$ とする．座標 $(x_1,\cdots,x_n)_\Sigma$ における直線または平面が次のように与えられるとき，これらを座標 $(x'_1,\cdots,x'_n)_{\Sigma'}$ で表せ．

(1)–(2) $3x_1 - 2x_2 = 0$ (3)–(4) $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

## 3.38 正規直交基底

**定義 3.147 (正規直交基底)** 内積空間の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に対して次の名称を定義する：

- **正規基底（normal basis）**：

$$\|\boldsymbol{u}_i\| = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

- **直交基底（orthogonal basis）**：

$$(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_i) \neq 0, \qquad (\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

- **正規直交基底（orthonormal basis）**：

$$(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

**例 3.148 (基本ベクトルの正規直交性)** $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は正規直交基底である．

（証明）

$$(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_i) = 0\cdot 0 + \cdots + 1\cdot 1 + \cdots + 0\cdot 0 = 1,$$
$$(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = 0\cdot 0 + \cdots + 1\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 1 + \cdots + 0\cdot 0 = 0.$$

**例 3.149 (正規直交基底の具体例)** $\mathbb{R}^2$ の基底

$$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$$

は

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = 1\,, \quad \|\boldsymbol{u}_2\| = 1\,, \quad (\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_2) = 0$$

をみたすので正規直交基底である.

**例 3.150 (正規直交基底の具体例)** $\mathbb{R}^2$ の基底

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

は

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = 1\,, \quad \|\boldsymbol{u}_2\| = 1\,, \quad (\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_2) = 0$$

をみたすので正規直交基底である.

**問 3.151 (正規直交基底)** $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底はすべて

$$\left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\}, \qquad \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \right\}$$

の形で表される.

## 3.39 正規直交基底における座標

**定理 3.152 (正規直交基底における 1 次結合)** 内積空間 $V$ において，基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ が正規直交基底であれば，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{u}_n$$

と表される.

（証明）　ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ と

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

の両辺との内積をとると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{u}_i) &= (c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_i\boldsymbol{u}_i + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n\,,\,\boldsymbol{u}_i) = (c_1\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_i) + \cdots + (c_i\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_i) + \cdots + (c_n\boldsymbol{u}_n\,,\,\boldsymbol{u}_i) \\ &= c_1\,(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_i) + \cdots + c_i\,(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_i) + \cdots + c_n\,(\boldsymbol{u}_n\,,\,\boldsymbol{u}_i) = c_1 \times 0 + \cdots + c_i \times 1 + \cdots + c_n \times 0 \\ &= c_i\end{aligned}$$

を得る.

**例 3.153 (正規直交基底における 1 次結合)** $\mathbb{R}^3$ の点 $(2,-1,3)$ は，標準基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3\}$ における座標であり，正確に書くと $(2,-1,3)_\Sigma$ である．この点の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

となる．正規直交基底

$$\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\}$$

における座標を求める．なすわち，$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3$ の係数 $c_1, c_2, c_3$ を求める．$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は正規直交基底であるから，

$$c_1 = (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{u}_1) = \frac{4}{\sqrt{3}}, \qquad c_2 = (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{u}_2) = \frac{3}{\sqrt{2}}, \qquad c_3 = (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{u}_3) = \frac{-5}{\sqrt{6}}$$

より

$$\boldsymbol{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_2 - \frac{5}{\sqrt{6}}\boldsymbol{u}_3$$

を得る．よって

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2 + (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{u}_3)\,\boldsymbol{u}_3 = \frac{4}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_2 - \frac{5}{\sqrt{6}}\boldsymbol{u}_3$$

と表される．基底 $\Sigma'$ における座標は $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{6}}\right)_{\Sigma'}$ である．

**定理 3.154 (正規直交基底における内積)** 内積空間 $V$ において，$\Sigma = \{\boldsymbol{u}_1,\, \cdots,\, \boldsymbol{u}_n\}$ を正規直交基底とする．ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ の座標をそれぞれ $(a_1, \cdots, a_n)_\Sigma$, $(b_1, \cdots, b_n)_\Sigma$ とする．このとき

$$(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

が成り立つ．

（証明） $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n, \qquad \boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$$

と表される．このとき $(\boldsymbol{u}_k\,,\,\boldsymbol{u}_l) = \delta_{kl}$ より

$$(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = \left(\sum_{k=1}^n a_k\boldsymbol{u}_k\,,\,\sum_{k=1}^n b_k\boldsymbol{u}_k\right) = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_kb_l\,(\boldsymbol{u}_k\,,\,\boldsymbol{u}_l) = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_kb_l\delta_{kl} = \sum_{k=1}^n a_kb_k$$

を得る．

## 3.40 グラム・シュミットの直交化法

**定義 3.155 (正規直交化)** 内積空間 $V$ において，基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n\}$ を基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\}$ に取り替える．このとき $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ が正規基底となるとき，この操作を**正規化（normalize）**という．直交基底となるとき，**直交化（orthogonalize）**という．正規直交基底となるとき，**正規直交化（orthonormalize）**という．

**定理 3.156 (正規化)** 内積空間 $V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ に対して次の式で定まる $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は正規基底となる：

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|},\qquad \boldsymbol{u}_2=\frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|},\qquad \cdots,\qquad \boldsymbol{u}_n=\frac{\boldsymbol{v}_n}{\|\boldsymbol{v}_n\|}.$$

**定理 3.157 (グラム・シュミットの直交化法)** 内積空間 $V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ に対して次の式で定まる $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ は $V$ の正規直交基底となる．この手法を**グラム・シュミットの直交化法（Gram-Schmidt orthogonalization）**という．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1&=\frac{\boldsymbol{v}_1'}{\|\boldsymbol{v}_1'\|}, & \boldsymbol{v}_1'&=\boldsymbol{v}_1,\\
\boldsymbol{u}_2&=\frac{\boldsymbol{v}_2'}{\|\boldsymbol{v}_2'\|}, & \boldsymbol{v}_2'&=\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1,\\
\boldsymbol{u}_3&=\frac{\boldsymbol{v}_3'}{\|\boldsymbol{v}_3'\|}, & \boldsymbol{v}_3'&=\boldsymbol{v}_3-(\boldsymbol{v}_3\,,\,\boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2-(\boldsymbol{v}_3\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1,\\
\boldsymbol{u}_4&=\frac{\boldsymbol{v}_4'}{\|\boldsymbol{v}_4'\|}, & \boldsymbol{v}_4'&=\boldsymbol{v}_4-(\boldsymbol{v}_4\,,\,\boldsymbol{u}_3)\,\boldsymbol{u}_3-(\boldsymbol{v}_4\,,\,\boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2-(\boldsymbol{v}_4\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1,\\
&\vdots & &\vdots\\
\boldsymbol{u}_n&=\frac{\boldsymbol{v}_n'}{\|\boldsymbol{v}_n'\|}, & \boldsymbol{v}_n'&=\boldsymbol{v}_n-\sum_{k=1}^{n-1}(\boldsymbol{v}_n\,,\,\boldsymbol{u}_k)\,\boldsymbol{u}_k.
\end{aligned}$$

（証明）

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_1)&=\left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\,,\,\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\right)=\frac{(\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}=\frac{(\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_1)}{(\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_1)}=1,\\
(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_2)&=\left(\boldsymbol{u}_1\,,\,\frac{\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{v}_2'\|}\right)=\frac{(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2)-(\boldsymbol{v}_2\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_1)}{\|\boldsymbol{v}_2'\|}=\frac{(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2)-(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2)}{\|\boldsymbol{v}_2'\|}=0.
\end{aligned}$$

以下同様.

**例 3.158 (グラム・シュミットの直交化法の具体例)** $\mathbb{R}^2$ の基底

$$\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

を正規直交化する．グラム・シュミットの直交化法より，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{v}_2' &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \frac{4}{5}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix} = \frac{3}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{u}_2 &= \frac{\boldsymbol{v}_2'}{\|\boldsymbol{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる．以上より

$$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

は $(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ をみたし，$\mathbb{R}^2$ の正規直交基底となる．

**例 3.159 (グラム・シュミットの直交化法の具体例)** $\mathbb{R}^3$ の基底

$$\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

を正規直交化する．グラム・シュミットの直交化法より，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{v}_2' &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{u}_2 &= \frac{\boldsymbol{v}_2'}{\|\boldsymbol{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_3' &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3\,,\,\boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{v}_3\,,\,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1\\
&= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{5}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{u}_3 &= \frac{\boldsymbol{v}_3'}{\|\boldsymbol{v}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる．以上より

$$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

は

$$(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$$

をみたし，$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となる．

**問 3.160 (グラム・シュミットの直交化法の具体例)** $\mathbb{R}[x]_n$ の基底 $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ \cdots,\ x^n\}$ をグラム・シュミットの直交化法で正規直交化せよ．ただし，内積は

$$(f\,,\,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

とする．

（答え） $f_0 = 1,\ f_1 = x,\ f_2 = x^2,\ f_3 = x^3,\ \cdots$ とおく．$f_0$ のノルムは

$$(f_0\,,\,f_0) = \int_0^1 1\cdot 1\,dx = 1, \qquad \|f_0\| = \sqrt{(f_0\,,\,f_0)} = 1$$

であるから，まず,

$$g_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|} = 1$$

とおく．次に $f_1$ と $g_0$ の内積は

$$(f_1\,,\,g_0) = \int_0^1 x\cdot 1\,dx = \frac{1}{2}$$

であるから，これらは直交しない．ここで

$$\tilde{f}_1 = f_1 - (f_1\,,\,g_0)\,g_0 = x - \frac{1}{2}$$

とおくと $g_0$ と $\tilde{f}_1$ は直交する．$\tilde{f}_1$ のノルムは

$$\left(\tilde{f}_1\,,\,\tilde{f}_1\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}, \qquad \|\tilde{f}_1\| = \sqrt{\left(\tilde{f}_1\,,\,\tilde{f}_1\right)} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

である．$\tilde{f}_1$ を正規化すると

$$g_1 = \frac{\tilde{f}_1}{\|\tilde{f}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

となる．$g_0$ と $g_1$ とは正規直交系である．以下 $g_2,\ g_3,\ \cdots$ は自習．

## 3.41 演習問題 〜 正規直交基底

**問 3.161 (正規直交基底)** 次の基底を正規直交化せよ.

(1) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$ (2) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$ (3) $\mathbb{C}^2 \ni \begin{bmatrix}1+i\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3i\\5+4i\end{bmatrix}$

(4) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ (5) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ (6) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

(7) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ (8) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ (9) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-4\\3\end{bmatrix}$

(10) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ (11) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}3\\5\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$ (12) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\3\\-1\end{bmatrix}$

(13) $\mathbb{C}^3 \ni \begin{bmatrix}i\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5+4i\\-2+3i\\1-2i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-2i\\0\end{bmatrix}$ (14) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

(15) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ (16) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$

(17) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ (18) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\-2\end{bmatrix}$

(19) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix}2\\-2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\4\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\\3\\-1\end{bmatrix}$ (20) $\mathbb{C}^4 \ni \begin{bmatrix}2i\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4i\\2\\-1+3i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-i\\2+i\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\0\\2\\5i\end{bmatrix}$

**問 3.162 (正規直交基底)** 前問で得た正規直交基底における次のベクトルの座標を求めよ.

(1)–(2) $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1-2i\\2+i\end{bmatrix}$ (4)–(12) $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ (13) $\begin{bmatrix}2i\\3-i\\-1\end{bmatrix}$ (14)–(19) $\begin{bmatrix}0\\2\\-1\\3\end{bmatrix}$

(20) $\begin{bmatrix}-1+i\\2i\\3\\2-2i\end{bmatrix}$

**問 3.163 (グラム・シュミットの直交化法)** $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 (1) $\{1,\ x,\ x^2\}$ (2) $\{1+x,\ x+x^2,\ 1\}$ を正

規直交化せよ．ただし，内積は

$$(f\,,\,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

とする．

**問 3.164 (グラム・シュミットの直交化法)** $\mathbb{R}[x]_n$ の基底 $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots, x^n\}$ を正規直交化せよ．ただし，内積は前問と同じとする．

## 3.42 ベクトル空間の和

**定義 3.165 (ベクトル空間の和)** ベクトル空間 $U, V$ に対して

$$U + V = \{\, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{v} \in V \,\}$$

を**ベクトル空間の和**という．特に，

$$U \cap V = \{\mathbf{0}\}$$

のとき

$$U + V = U \oplus V$$

と表記し，**直和**という．

**注意 3.166 (直和)** ベクトル空間 $U, V, W$ が

$$W = U \oplus V$$

であるとする．このとき，$W$ のあるベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して，

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{u} \in U, \quad \boldsymbol{v} \in V$$

をみたす $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ はただ一つ定まる．

**定理 3.167 (ベクトル空間の和の次元)** ベクトル空間 $U, V, W$ が

$$W = U + V$$

をみたすとき，

$$\dim W \leq \dim U + \dim V$$

である．

$$W = U \oplus V$$

をみたすとき，

$$\dim W = \dim U + \dim V$$

である．

**定理 3.168 (部分空間の共通部分)** ベクトル

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$$

が 1 次独立であるとき，これらのベクトルで生成される空間

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle, \qquad W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m \rangle$$

の共通部分は

$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$$

となる．

（証明） $W_1$ と $W_2$ の任意のベクトルは

$$W_1 \ni \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n, \qquad W_2 \ni \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ともに $W_1 \cap W_2$ のベクトルとする．すなわち， $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
&a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m \\
&a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n + (-b_1)\boldsymbol{v}_1 + (-b_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (-b_m)\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

を得る．これは $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次関係である．ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立なので係数は

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \cdots, \quad a_n = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad \cdots, \quad b_m = 0$$

と自明なものに限る．よって共通のベクトルは零ベクトル $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ に限る．

**定理 3.169 (部分空間の共通部分)** ベクトル

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_l$$

が 1 次独立であるとき，これらのベクトルで生成される空間

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n,\ \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m \rangle, \qquad W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m,\ \boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{w}_l \rangle$$

の共通部分は

$$W_1 \cap W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m \rangle$$

となる．

**定理 3.170 (ベクトル空間の和)** 部分空間

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle_K, \qquad W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m \rangle_K$$

に対して

$$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n,\ \boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m \rangle_K$$

が成り立つ．

（証明）

$$\begin{aligned}
&W_1 + W_2 = \{\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \in W_1,\ \boldsymbol{v} \in W_2\ \} \\
&= \{\ c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n + \tilde{c}_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \tilde{c}_m\boldsymbol{v}_m \mid c_1, \cdots, c_n, \tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_m \in K\ \} \\
&= \langle \boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n,\ \boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m \rangle_K .
\end{aligned}$$

**例 3.171 (ベクトル空間の和の具体例)** $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を 1 次独立とする．これらで生成される部分空間

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle, \quad W_3 = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle$$

を考える．

$$W_1 \cap W_2 = \langle \boldsymbol{u}_2 \rangle, \qquad W_1 \cap W_3 = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle, \qquad W_2 \cap W_3 = \{\boldsymbol{0}\}$$

より，これらの和は

$$\begin{aligned}
W_{12} &= W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle + \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = \mathbb{R}^3, \\
W_{13} &= W_1 + W_3 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle + \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle = W_1, \\
W_{23} &= W_2 + W_3 = \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle + \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = W_2 \oplus W_3 = \mathbb{R}^3, \\
W_{123} &= W_1 + W_2 + W_3 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle + \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle + \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

と表される．

**例 3.172 (ベクトル空間の和の具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分空間で，$A$ を原点を通る直線，$B$ を平面とする．直線 $A$ が原点以外で平面 $B$ と交わらないとき，$A \cap B = \{\boldsymbol{0}\}$ であり，

$$\mathbb{R}^3 = A + B = A \oplus B, \qquad 3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim A + \dim B = 1 + 2$$

が成り立つ．直線 $A$ が平面 $B$ 上にあるとき，$A \subset B$ であるので，

$$A + B = B$$

が成り立つ．

**例 3.173 (ベクトル空間の和の具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分空間で，$A$ を原点を通る平面，$B$ を平面とする．$A \neq B$ であるとき $A$ と $B$ とが交わる点の集合は直線 $C$ となる．$A \cap B = C \neq \{\boldsymbol{0}\}$ である．このとき，

$$\mathbb{R}^3 = A + B, \qquad 3 = \dim \mathbb{R}^3 \leq \dim A + \dim B = 2 + 2 = 4$$

が成り立つ．$A = B$ であるときは，

$$A + B = A = B$$

が成り立つ．

**例 3.174 (ベクトル空間の和の具体例)** $\mathbb{R}^2$ の部分空間で，$A, B$ を原点を通る直線とする．$A \neq B$ であるとき，$A \cap B = \{\boldsymbol{0}\}$ であるから，

$$\mathbb{R}^2 = A + B = A \oplus B, \qquad 2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim A + \dim B = 1 + 1$$

が成り立つ．

**例 3.175 (ベクトル空間の和の具体例)** $\mathbb{R}^2$ の部分空間で，$A, B$ を原点を通る直線，$C$ を平面とする．$A \subset C$, $B \subset C$ であり，$C = \mathbb{R}^2$ であるから，

$$\mathbb{R}^2 = A + B + C$$

が成り立つ．

## 3.43 直和分解

**定義 3.176 (直和分解)** ベクトル空間 $V$ とその部分空間 $W_1, W_2$ が

$$V = W_1 \oplus W_2$$

をみたすとき，$V$ を $W_1$ と $W_2$ に**直和分解**するという．

**例 3.177 (直和分解の具体例)** ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を 1 次独立とする．このとき

$$\begin{aligned}
W &= \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_2 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}_3 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_4 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle
\end{aligned}$$

が成り立ち，$W$ は直和分解される．

## 3.44 直交補空間

**定義 3.178 (ベクトルと部分空間の直交)** 内積空間 $V$ において，ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ と部分空間 $W$ に含まれるすべてのベクトル $\boldsymbol{u}$ とが直交するとき，すなわち

$$(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{u}) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in W$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{a}$ と $W$ とは**直交する**といい，

$$\boldsymbol{a} \perp W$$

と表記する．

**例 3.179 (ベクトルと部分空間とが直交する具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,\right\}$$

とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ とは直交 $\boldsymbol{a} \perp W$ する．なぜなら，方程式 $(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x}) = 0$ の解空間が $W$ であるからである．この例では $W$ は平面であり $\boldsymbol{a}$ は $W$ の法線ベクトルである．

また，ベクトル $\alpha\boldsymbol{a}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ も $(\alpha\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x}) = \alpha\,(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x}) = 0$ をみたすので，直線 $\alpha\boldsymbol{a}$ 上のすべてのベクトルに対して，$\alpha\boldsymbol{a} \perp W$ が成り立つ．$W$ に直交するベクトルは 1 通りではないことに注意する．

**定義 3.180 (直交補空間)** 内積空間 $V$ とその部分空間 $W$ に対して，部分空間

$$W^\perp = \{\, \boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \perp W \,\}$$

を $V$ における $W$ の**直交補空間**という．

**定理 3.181 (直交補空間は部分空間)** 直交補空間 $W^\perp$ は $V$ の部分空間である．

**問 3.182 (直交補空間は部分空間)** これを示せ．

**定理 3.183 (直交補空間による直和分解)** 内積空間 $V$ における部分空間 $W$ の直交補空間 $W^{\perp}$ は

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

をみたす．次元は

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$$

の関係が成り立つ．

**例 3.184 (直交補空間の具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

の直交補空間は

$$W^{\perp} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

である．このとき，

$$W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^3, \qquad \dim(W) + \dim(W^{\perp}) = 2 + 1 = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

が成り立つ．

**例 3.185 (直交補空間の具体例)** $\mathbb{R}^3$ における部分空間

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

の直交補空間 $W^{\perp}$ は

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

である．なぜなら，任意のベクトル $\boldsymbol{u} \in W$, $\boldsymbol{v} \in W^{\perp}$ に対して $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$ が成り立つからである．

## 3.45 解空間の直交補空間

**例 3.186 (直交補空間の具体例)** $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle$$

の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ にそれぞれ直交するベクトルのひとつは

$$\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_3) = 0, \quad (\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_3) = 0,$$

である．このベクトルにより生成される部分空間

$$W^{\perp} = \langle \boldsymbol{u}_3 \rangle$$

は $W$ の直交補空間 $W^{\perp}$ となる．なぜなら，任意のベクトル $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 \in W$, $\boldsymbol{v} = c_3\boldsymbol{u}_3 \in W^{\perp}$ に対して

$$(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = c_1c_3\,(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_3) + c_2c_3\,(\boldsymbol{u}_2\,,\,\boldsymbol{u}_3) = 0$$

が成り立つからである．また，

$$W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^3, \qquad \dim(W) + \dim(W^{\perp}) = 2 + 1 = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

が成り立つ．

**例 3.187 (直交補空間の具体例)** 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

の $\mathbb{R}^3$ における直交補空間 $W^{\perp}$ を求める．行列 $A$ を簡約化すると

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

となるから，解空間 $W$ は

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle$$

と表される．$W$ の任意のベクトル $\boldsymbol{u} = c\,\boldsymbol{u}_1$ $(c \in \mathbb{R})$ と直交するベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ を求める．$(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{u}) = 0$ より，$\boldsymbol{x}$ の成分は方程式 $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$ をみたさなければならない．よって，

$$W^{\perp} = \left\{ \,\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \,\right\}$$

となる．これは方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であるから，行列 $B$ を簡約化して

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

より，

$$W^{\perp} = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle$$

と得られる．また，

$$W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^3, \qquad \dim(W) + \dim(W^{\perp}) = 1 + 2 = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

が成り立ち，$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる．

## 3.46　ベクトルで生成される部分空間の直交補空間

**定理 3.188 (直交補空間の次元)** $\mathbb{R}^n$ の部分空間

$$W = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n \rangle$$

の次元は

$$\dim(W) = \operatorname{rank}(A), \qquad A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

である．一方，$W$ の直交補空間 $W^{\perp}$ は方程式 $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり，

$$W^{\perp} = \{\ \boldsymbol{x} \mid A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\ \}$$

となり，次元は

$$\dim(W^{\perp}) = n - \operatorname{rank}(A)$$

である．

（証明）　$W$ の任意のベクトルは

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n, \qquad \forall c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$$

と表される．$W^{\perp}$ の元 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} \perp W$ であり $(\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{x}) = 0$ をみたす．これより，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{x}) &= (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n\,,\,\boldsymbol{x}) \\ &= c_1(\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{x}) + c_2(\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{x}) + \cdots + c_n(\boldsymbol{a}_n\,,\,\boldsymbol{x}) = 0\end{aligned}$$

となる．$c_1, c_2, \cdots, c_n$ は任意の実数であるから，

$$(\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{x}) = 0, \quad (\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{x}) = 0, \quad \cdots, \quad (\boldsymbol{a}_n\,,\,\boldsymbol{x}) = 0$$

が成り立つ．これは

$${\boldsymbol{a}_1}^T\boldsymbol{x} = 0, \quad {\boldsymbol{a}_2}^T\boldsymbol{x} = 0, \quad \cdots, \quad {\boldsymbol{a}_n}^T\boldsymbol{x} = 0,$$

であり，

$$\begin{bmatrix} {\boldsymbol{a}_1}^T \\ {\boldsymbol{a}_2}^T \\ \vdots \\ {\boldsymbol{a}_n}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

と表される．よって $W^{\perp}$ は方程式 $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間である．

**例 3.189 (直交補空間の具体例)** $\mathbb{R}^3$ における部分空間

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2 \rangle = \{\ c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ \}$$

の直交補空間 $W^{\perp}$ を求める．$W^{\perp}$ の任意のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．$\boldsymbol{x}$ は $W$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ と直交するので $(\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{x}) = 0$ が成り立つ．こりより，

$$(\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{x}) = (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{x}) = c_1\,(\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{x}) + c_2\,(\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{x}) = 0$$

と表される．すべての $c_1$, $c_2$ について成り立つためには

$$(\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 = 0, \quad (\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{x}) = x_2 + x_3 = 0$$

をみたさなければならない．この連立方程式を書き直すと

$$\boldsymbol{a}_1{}^T\boldsymbol{x} = 0, \quad \boldsymbol{a}_2{}^T\boldsymbol{x} = 0$$

であり，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^T \\ \boldsymbol{a}_2{}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$$

となる．これを解く．係数行列を簡約化すると

$$A^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^T \\ \boldsymbol{a}_2{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので，解は

$$\boldsymbol{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\,\boldsymbol{a}_3, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

となる．よって，直交補空間は

$$W^{\perp} = \left\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\right\} = \{\, c\,\boldsymbol{a}_3 \mid c \in \mathbb{R} \,\} = \langle \boldsymbol{a}_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

と得られる．$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \neq 0$ より $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．よって $W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$ であるので，

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}, \qquad 3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(W) + \dim(W^{\perp}) = 2 + 1$$

が成り立つ．また $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となることに注意する．つまり

$$W = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2 \rangle, \quad W^{\perp} = \langle \boldsymbol{a}_3 \rangle, \quad \mathbb{R}^3 = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3 \rangle$$

である．

## 3.47　正規直交基底で生成される部分空間の直交補空間

**例 3.190 (直交補空間の具体例)** $\mathbb{R}^4$ において，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ を直交基底とする．このとき

$$\mathbb{R}^4 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle$$

が成り立つ．ここで

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle, \qquad W_{234} = \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle$$

とおくと，$W_{234}$ は $\mathbb{R}^4$ における $W_1$ の直交補空間となる．なぜなら任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in W_1$, $\boldsymbol{y} \in W_{234}$ に対して

$$(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}) = (c_1\boldsymbol{u}_1\,,\,c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 + c_4\boldsymbol{u}_4) = c_1c_2\,(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_2) + c_1c_3\,(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_3) + c_1c_4\,(\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_4) = 0$$

が成り立ち，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するからである．よって

$$\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_{234}, \qquad W_1 \perp W_{234}$$

であり，$\mathbb{R}^4$ は $W_1$ とその直交補空間 $W_{234}$ によって直和分解される．同様に

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^4 &= W_1 \oplus W_{234}, & W_1 &\perp W_{234}\\
&= W_2 \oplus W_{134}, & W_2 &\perp W_{134}\\
&= W_3 \oplus W_{124}, & W_3 &\perp W_{124}\\
&= W_{12} \oplus W_{34}, & W_{12} &\perp W_{34}\\
&= W_{13} \oplus W_{24}, & W_{13} &\perp W_{24}\\
&= W_{14} \oplus W_{23}, & W_{14} &\perp W_{23}
\end{aligned}$$

と部分空間とのその直交補空間とで直和分解される．ただし，

$$W_i = \langle \boldsymbol{u}_i \rangle, \quad W_{ij} = \langle \boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j \rangle, \quad W_{ijk} = \langle \boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j,\ \boldsymbol{u}_k \rangle$$

とおく．

**例 3.191 (直交補空間の具体例)** 直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ で生成されるベクトル空間

$$V = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_k,\ \boldsymbol{u}_{k+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle$$

を考える．このとき $V$ は直和分解されて

$$V = W_1 \oplus V_1, \qquad W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_k \rangle, \quad V_1 = \langle \boldsymbol{u}_{k+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle$$

と表される．$V_1$ は $V$ における $W_1$ の直交補空間である．さらに $V_1$ を直和分解して

$$V_1 = W_2 \oplus V_2, \qquad W_2 = \langle \boldsymbol{u}_{k+1},\ \boldsymbol{u}_{k+2},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_l \rangle, \quad V_2 = \langle \boldsymbol{u}_{l+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n \rangle, \qquad k < l$$

と表される．$V_2$ は $V_1$ における $W_2$ の直交補空間である．同様に繰り返して直交補空間で直和分解が可能である：

$$V = W_1 \oplus V_1 = W_1 \oplus (W_2 \oplus V_2) = W_1 \oplus (W_2 \oplus (W_3 \oplus V_3)) = \cdots.$$

### 3.48 演習問題 〜 ベクトル空間の和，直交補空間

**問 3.192 (ベクトル空間の和)** 次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W_1, W_2$ に対して $W_1 \cap W_2$ と $W_1 + W_2$ を求めよ.

(1) $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$ (2) $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$

**問 3.193 (ベクトル空間の和)** 次の部分空間 $W_1, W_2, W_3$ の和空間 $W_{12} = W_1 + W_2$, $W_{13} = W_1 + W_3$, $W_{23} = W_2 + W_3$, $W_{123} = W_1 + W_2 + W_3$ の基底と次元を求めよ.

$$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_3 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$$

**問 3.194 (ベクトル空間の和)** 次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W_1, W_2$ に対して $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ が成り立つか否か示せ.

(1) $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$ (2) $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$

(3) $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$ (4) $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$

(5) $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \right\rangle$

**問 3.195 (直交補空間)** 次のベクトル空間 $W$ の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ.

(1) $\mathbb{R}^2 \supset W = \left\langle \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} \right\rangle$ (2) $\mathbb{R}^3 \supset W = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$ (3) $\mathbb{C}^2 \supset W = \left\langle \begin{bmatrix}1+i\\-2-3i\end{bmatrix} \right\rangle$ (4) $\mathbb{R}[x]_1 \supset W = \langle 1+x \rangle$ (5) $\mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 3 & 0\end{bmatrix} \boldsymbol{x} = 0 \right\}$

**問 3.196 (直交補空間と直和分解)** $\mathbb{R}^3$ を $W$ とその直交補空間 $W^\perp$ とに直和分解せよ.

(1) $W = \left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$ (2) $W = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \right\rangle$ (3) $W = \left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \right\rangle$

# 4 線形写像

## 4.1 線形写像

**定義 4.1 (線形写像)** $K$ ($\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) 上のベクトル空間 $U$ から $K$ 上のベクトル空間 $V$ への写像

$$f : U \to V$$

が次の条件 (i), (ii) をみたすとき，$f$ を**線形写像（linear mapping）**または**1 次写像**という.

(i) $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ に対して，$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) \in V$.

(ii) $\forall \alpha \in K, \forall \boldsymbol{x} \in U$ に対して，$f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) \in V$.

$U = V$ のとき $f$ を**線形変換（linear transformation）**または**1 次変換**という.

**定理 4.2 (線形写像)** 線形写像であるための必要十分条件は，$\forall \alpha, \beta \in K, \forall \boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_2 \in U$ に対して，

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2) \in V$$

が成り立つことである.

**注意 4.3 (零ベクトル)** 線形写像 $f$ は零ベクトル $\mathbf{0}_U \in U$ を零ベクトル $\mathbf{0}_V \in V$ へ写す．なぜなら，条件 (ii) において $\alpha = 0$ とすると

$$f(0\boldsymbol{x}) = 0 f(\boldsymbol{x}) \qquad \Rightarrow \qquad f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$$

となるからである.

**例 4.4 (線形写像の具体例)** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = ax$ は線形写像である．なぜなら，

$$f(\alpha x_1 + x_2) = a(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(a x_1) + \beta(a x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

をみたすからである.

**例 4.5 (線形写像)** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = ax + b\,(b \neq 0)$ は線形写像ではない．なぜなら，条件 (i) は

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= a(x_1 + x_2) + b = (a x_1 + b) + (a x_2 + b) - b \\ &= f(x_1) + f(x_2) - b \neq f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

であり，条件 (ii) は

$$f(\alpha \boldsymbol{x}) = a(\alpha x) + b = \alpha(ax + b) - \alpha b = \alpha f(x) - \alpha b \neq \alpha f(x)$$

となるからである.

**例 4.6 (線形写像)** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = x^2$ は線形写像ではない．なぜなら，条件 (i) は

$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 2x_2 = f(x_1) + f(x_2) + 2x_1 x_2 \neq f(x_1) + f(x_2)$$

であり，条件 (ii) は

$$f(\alpha x) = (\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2 = \alpha^2 f(x) \neq \alpha f(x)$$

となるからである.

**例 4.7 (線形写像の具体例)** 写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$;

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

は線形写像である．なぜなら,

$$f(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = A(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = \alpha(A\boldsymbol{x}_1) + \beta(A\boldsymbol{x}_2) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2)$$

をみたすからである.

**問 4.8 (線形写像)** 次の写像は線形写像ではないことを示せ.

$$\begin{aligned} &(1) \quad f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \\ &(2) \quad f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

**問 4.9 (線形写像の具体例)** 写像 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; y = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ は線形写像であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ とする.

**問 4.10 (線形写像の具体例)** $\mathbb{R}^3$ において点 $\boldsymbol{x}$ から単位方向ベクトルが $\boldsymbol{a}$ の直線に垂直に下ろした点 $\boldsymbol{y}$ を**正射影**という．この写像 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}$$

と表され，**射影変換**という．$f$ は線形変換である．これを示せ.

**問 4.11 (線形写像の具体例)** $\mathbb{R}^3$ において点 $\boldsymbol{x}$ から平面 $x_1x_2$ に垂直に下ろした点 $\boldsymbol{y}$ を**正射影**という．この写像 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2,$$

または,

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{e}_3$$

と表され，**射影変換**という．$f$ は線形変換である．これを示せ.

**まとめ 4.12 (線形写像)**

- 線形写像は原点を原点へ写す.
- 平行移動をともなう写像は線形写像ではない.
- 線形写像は定数を含まない 1 次式である.
- 線形写像は平行四辺形を平行四辺形へ写す.

## 4.2 演習問題 〜 線形写像

**問 4.13 (線形写像)** 次の変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}$ が線形変換であるか否か示せ.

(1) 点 $\boldsymbol{x}$ と原点 $\mathbf{0}$ との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(2) 点 $\boldsymbol{x}$ と点 $\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}^T$ との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(3) 直線 $\ell$ を原点 $\mathbf{0}$ を通り方向ベクトル $\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}^T$ の直線とする．点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\ell$ へ正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(4) 直線 $\ell'$ を点 $\boldsymbol{q}$ を通り方向ベクトル $\boldsymbol{p}$ の直線とする．点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\ell'$ への正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(5) 点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\ell$ への正射影との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(6) 点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\ell'$ への正射影との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(7) 直線 $\tilde{\ell}$ を原点 $\mathbf{0}$ を通り方向ベクトル $\tilde{\boldsymbol{p}}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\end{bmatrix}^T$ の直線とする．点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\ell$ への正射影と点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\tilde{\ell}$ への正射影との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(8) 直線 $\tilde{\ell}'$ を点 $\boldsymbol{q}$ を通り方向ベクトル $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の直線とする．点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\ell'$ への正射影と点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\tilde{\ell}'$ への正射影との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(9) $x_2x_3$ 平面への正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.　(10) 平面 $x_1=2$ への正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(11) $x_1x_3$ 平面への正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.　(12) 平面 $x_2=-1$ への正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(13) $x_1x_2$ 平面への正射影との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(14) 平面 $x_3=3$ への正射影との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(15) 原点 $\mathbf{0}$ に関して点対称な点 $\boldsymbol{y}$ への変換.　(16) 原点 $\boldsymbol{q}$ に関して点対称な点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(17) $x_1x_2$ 平面に関して対称な点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(18) 平面 $x_3=3$ に関して対称な点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(19) 原点 $\mathbf{0}$ と点 $\boldsymbol{x}$ を通る直線上にあり，原点 $\mathbf{0}$ からの距離が 3 倍となる点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(20) 点 $\boldsymbol{q}$ と点 $\boldsymbol{x}$ を通る直線上にあり，点 $\boldsymbol{q}$ からの距離が 3 倍となる点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

**問 4.14 (線形写像)** 次の写像は線形写像か否か示せ.

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ y=f(x)=2x$　(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ y=f(x)=3x+1$

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ y=f(x)=x^2$　(4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ x_1-x_2\end{bmatrix}$

(5) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1+x_2+3\\ x_1-x_2-5\end{bmatrix}$　(6) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ x_2\end{bmatrix}$

(7) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}{x_1}^2+{x_2}^2\\ {x_1}^2-{x_2}^2\end{bmatrix}$　(8) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}|x_1|\\ 0\end{bmatrix}$

(9) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$　(10) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2x_1-x_2+2x_3\\ 2x_1-3x_2-x_3\end{bmatrix}$

(11) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1+1\\ 2x_2\\ x_1+x_2\end{bmatrix}$　(12) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ y=f(\boldsymbol{x})=x_1x_2$

(13) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ y=f(\boldsymbol{x})=|x_1-x_2|$　(14) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R};\ y=f(\boldsymbol{x})=2x_1-3x_2+4x_3$

(15) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=f(x)=\begin{bmatrix}2x\\ 3x\end{bmatrix}$　(16) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=3\boldsymbol{x}$

(17) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$, ただし $A:m\times n$.

(18) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m;\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$, ただし $A:m\times n$, $\boldsymbol{b}:m\times 1$.

(19) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};\ y=f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{e}_1\,,\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{e}_2\,,\boldsymbol{x})+\cdots+(\boldsymbol{e}_n\,,\boldsymbol{x})$

(20) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};\ y=f(\boldsymbol{x})={x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2$
(21) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};\ y=f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$, ただし $A:n\times n$.

**問 4.15 (線形写像)** 次の変換 $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2;\ f\mapsto g$ が線形変換であるか否か示せ.

(1) $g(x)=F(f)(x)=f'(x)+f(0)x^2+f(1)$　　(2) $g(x)=F(f)(x)=f'(x)+f(0)x^2+f(1)+1$
(3) $g(x)=F(f)(x)=f(1+2x)$　　(4) $g(x)=F(f)(x)=f(1+2x)+1$
(5) $g(x)=F(f)(x)=2f'(x)+3f(x)$

**注意 4.16 (汎関数)** 写像 $F$ は入力が関数 $f(x)$ で出力が関数 $g(x)$ の関数とみなせる．関数の関数のことを**汎関数（functional）**という.

$$F:f\mapsto g,\qquad g(x)=F[f(x)](x)=F(f(x))=F(f)(x)$$

などと表記する.

## 4.3　線形写像の行列表示

**定理 4.17 (線形写像の行列表示)** 任意の線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は

$$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x},\quad A\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

と**行列表示**が可能である．行列 $A$ を $f$ の**標準基底に関する表現行列**という.

**例 4.18 (線形写像の行列表示の具体例)** ある線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

をみたす写像である．このとき $f$ の行列表示 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を求める．$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルは

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$$

と表される．このとき

$$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=f(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)=x_1f(\boldsymbol{e}_1)+x_2f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{e}_1)&f(\boldsymbol{e}_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=A\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．よって $f$ の標準基底に関する表現行列 $A$ は

$$A=\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{e}_1)&f(\boldsymbol{e}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\end{bmatrix}$$

である．$f$ の行列表示 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ は

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

と得られる.

**例 4.19 (線形写像の行列表示)** $\mathbb{R}^3$ における $x_1x_2$ 平面への**射影変換** $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$;

$$y=f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$$

の行列表示を求める．$\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

を $f$ で写すと，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})&=f(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3)=x_1f(\boldsymbol{e}_1)+x_2f(\boldsymbol{e}_2)+x_3f(\boldsymbol{e}_3)\\&=\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{e}_1)&f(\boldsymbol{e}_2)&f(\boldsymbol{e}_3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

と表される．ここで，標準基底を $f$ で写すと

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{e}_1)&=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1,\\f(\boldsymbol{e}_2)&=(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2,\\f(\boldsymbol{e}_3)&=(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_3+(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

となる．これを用いると標準基底に関する $f$ の表現行列は

$$A=\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{e}_1)&f(\boldsymbol{e}_2)&f(\boldsymbol{e}_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

と求まる．あらためて行列表示を成分で表すと，

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

となる．また

$$y_1=x_1,\quad y_2=x_2,\quad y_3=0$$

とも書ける．

**例 4.20 (行列表示の具体例)** ある線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$$

をみたす写像である．このとき $f$ の行列表示 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を求める．$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ では

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$$

となり，基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

では

$$\boldsymbol{x} = x_1' \boldsymbol{u}_1 + x_2' \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = U\boldsymbol{x}'$$

と表される．これは基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ における座標 $(x_1, x_2)_\Sigma$ から基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ における座標 $(x_1', x_2')_{\Sigma'}$ への座標変換を表し，$U$ は基底の変換行列である．また，この逆変換は

$$\boldsymbol{x}' = U^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

となる．これを用いて，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $f$ で写すと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1'\boldsymbol{u}_1 + x_2'\boldsymbol{u}_2) = x_1' f(\boldsymbol{u}_1) + x_2' f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) \end{bmatrix} U^{-1}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

と，$f$ の行列表示が得られる．標準基底に関する表現行列 $A$ は

$$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) \end{bmatrix} U^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．よって線形写像 $f$ の行列表示を成分であらためて表すと

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

となる．

## 4.4　一般の基底に関する表現行列

**定理 4.21 (線形写像の表現行列)** $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ の基底をそれぞれ $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\Pi' = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ とする．また，$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ の座標をそれぞれ $(x_1', \cdots, x_n')_{\Sigma'}$, $(y_1', \cdots, y_m')_{\Pi'}$ とおく．このとき，任意の線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は

$$\boldsymbol{y}' = B\boldsymbol{x}' = (Q^{-1}AP)\boldsymbol{x}',$$

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{bmatrix}$$

と**行列表示**で書ける．ただし，$A$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\Sigma$ と $\mathbb{R}^m$ の標準基底 $\Pi$ に関する $f$ の表現行列とする．また，$P$ は $\Sigma$ に対する $\Sigma'$ の基底の変換行列であり，$Q$ は $\Pi$ に対する $\Pi'$ の基底の変換行列である．$B = Q^{-1}AP$ を $\mathbb{R}^n$ **の基底** $\Sigma'$ **と** $\mathbb{R}^m$ **の基底** $\Pi'$ **に関する表現行列**という．

**例 4.22 (基底を取り換えたときの表現行列の具体例)** 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$;

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

を考える．$\mathbb{R}^3$ の基底を

$$\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

とし，$\mathbb{R}^2$ の基底を

$$\Pi' = \{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

とする．基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ と基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ に関する $f$ の表現行列 $B$ を求める．まず，$\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ の任意のベクトルはそれぞれ

$$\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x_1'\boldsymbol{u}_1 + x_2'\boldsymbol{u}_2 + x_3'\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = U\boldsymbol{x}',$$

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + y_2\tilde{\boldsymbol{e}}_2 = y_1'\boldsymbol{v}_1 + y_2'\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = V\boldsymbol{y}'$$

と表される．$U$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ から基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ への基底の変換行列であり，$V$ は $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\Pi = \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ から基底 $\Pi' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ への基底の変換行列である．$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{x}'$ は座標 $(x_1, x_2, x_3)_\Sigma$ から座標 $(x_1', x_2', x_3')_{\Sigma'}$ への座標変換を表し，同様に，$\boldsymbol{y} = V\boldsymbol{y}'$ は座標 $(y_1, y_2)_\Pi$ から座標 $(y_1', y_2')_{\Pi'}$ への座標変換を表す．このとき，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1'\boldsymbol{u}_1 + x_2'\boldsymbol{u}_2 + x_3'\boldsymbol{u}_3) = x_1'f(\boldsymbol{u}_1) + x_2'f(\boldsymbol{u}_2) + x_3'f(\boldsymbol{u}_3) \\ &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2 & A\boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = AU\boldsymbol{x}' \end{aligned}$$

となるので，$V\boldsymbol{y}' = AU\boldsymbol{x}'$ より

$$\boldsymbol{y}' = (V^{-1}AU)\boldsymbol{x}' = B\boldsymbol{x}'$$

が成り立つ．よって $B$ は

$$B = V^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 7 \\ -5 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

により定まる．あらためて行列表示すると

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 7 \\ -5 & -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

と表される．

## 4.5　線形変換

**定義 4.23 (線形変換)** ベクトル空間 $U$ から自分自身への線形写像 $f: U \to U$ を**線形変換（linear transformation）**という．

**定理 4.24 (線形写像の表現行列)** $\mathbb{R}^n$ の基底を $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とし，座標を $(x'_1, \cdots, x'_n)_{\Sigma'}$ とおく．このとき，任意の線形変換 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は

$$\boldsymbol{y}' = B\boldsymbol{x}' = (P^{-1}AP)\boldsymbol{x}', \qquad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

と**行列表示**で書ける．ただし，$A$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\Sigma$ に関する $f$ の表現行列とする．また， $P$ は $\Sigma$ に対する $\Sigma'$ の基底の変換行列であり，$B = P^{-1}AP$ を $\mathbb{R}^n$ **の基底** $\Sigma'$ **に関する表現行列**という．

**例 4.25 (線形変換の表現行列の基底の取り替えの具体例)** 線形変換 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$$

の基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

における表現行列 $B$ を求める．$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = U\boldsymbol{x}'$$

と表される．$U$ は $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に対する基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ の基底の変換行列であり，$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{x}'$ は座標 $(x_0, x_1)_\Sigma$ から座標 $(x'_0, x'_1)_{\Sigma'}$ への座標変換を表す．$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ であるから，同様に $\boldsymbol{y} = U\boldsymbol{y}'$ が成り立つ．これより，

$$\begin{aligned} U\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2) = x'_1 f(\boldsymbol{u}_1) + x'_2 f(\boldsymbol{u}_2) &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = AU\boldsymbol{x}' \end{aligned}$$

となるので，

$$\boldsymbol{y}' = (U^{-1}AU)\boldsymbol{x}' = B\boldsymbol{x}'$$

が成立する．よって基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に関する $f$ の表現行列 $B$ は

$$B = U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

により定まる．また，基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に関する行列表示は

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

であり，

$$y_1' = x_1', \qquad y_2' = 4x_2'$$

とも書ける．座標系 $\Sigma'$ において線形写像 $f$ は，$x_1'$ 軸方向は変化せず，$x_2'$ 軸方向は 4 倍となる変換である．

### 4.6 一般の線形写像の表現行列

$n$ 次元のベクトル空間 $U$ と $m$ 次元のベクトル空間 $V$ において，基底をそれぞれ $\Sigma = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\Pi = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ とすると，$U$, $V$ の任意のベクトルはそれぞれ

$$(\triangle) \quad U \ni \boldsymbol{x} = \tilde{x}_1\boldsymbol{u}_1 + \tilde{x}_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \tilde{x}_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n) \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,\tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$(\blacktriangle) \quad V \ni \boldsymbol{y} = \tilde{y}_1\boldsymbol{v}_1 + \tilde{y}_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \tilde{y}_m\boldsymbol{v}_m = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m) \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix} = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m)\,\tilde{\boldsymbol{y}}$$

と表される．このとき，線形写像 $f : U \to V;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ は

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(\tilde{x}_1\boldsymbol{u}_1 + \tilde{x}_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \tilde{x}_n\boldsymbol{u}_n) = (f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)) \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}$$

$$(\star) \qquad = (f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n))\,\tilde{\boldsymbol{x}}$$

となる．ベクトル $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $\cdots$, $f(\boldsymbol{u}_n)$ は $V$ のベクトルであるから，基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ を用いて

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_1) &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{v}_m, \\ f(\boldsymbol{u}_2) &= a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{v}_m, \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{u}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{v}_1 + a_{2n}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{v}_m \end{aligned}$$

と表されるので

$$(\bigstar) \qquad (f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m)\,A, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

と書ける．以上より ($\blacktriangle$), ($\star$), ($\bigstar$) より

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m)\,\tilde{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m)\,A\tilde{\boldsymbol{x}}$$

を得る．$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ は 1 次独立であるから

$$(\,\flat\,) \qquad \tilde{\boldsymbol{y}} = A\tilde{\boldsymbol{x}}$$

が成り立つ．線形写像 $\tilde{\boldsymbol{y}} = \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}) = A\tilde{\boldsymbol{x}}$ により線形写像 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ が定まる．

**注意 4.26 (一般のベクトル空間における線形写像)** 一般のベクトル空間における線形写像 $f$ と数ベクトル空間における線形写像 $\varphi$ とを次のように同一視する：

$$\begin{aligned}
U &\quad\Leftrightarrow\quad \mathbb{R}^n\\
V &\quad\Leftrightarrow\quad \mathbb{R}^m\\
\boldsymbol{x}\in U &\quad\Leftrightarrow\quad \tilde{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^n\\
\boldsymbol{y}\in V &\quad\Leftrightarrow\quad \tilde{\boldsymbol{y}}\in\mathbb{R}^m\\
f:U\to V &\quad\Leftrightarrow\quad \varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\\
\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x}) &\quad\Leftrightarrow\quad \tilde{\boldsymbol{y}}=A\tilde{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}$$

**定義 4.27 (線形写像の表現行列)** ベクトル空間 $U$ の基底を $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ とし，ベクトル空間 $V$ の基底を $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ とする．このとき，線形写像 $f:U\to V$ が

$$(f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n))=(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m)\,A,\qquad A:m\times n$$

をみたすとき，行列 $A$ を $U$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ と $V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ に関する**表現行列**という．

**定理 4.28 (線形写像の行列表示)** 線形写像 $f:U\to V$ において，ベクトル空間 $U$ の基底が $\Sigma=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ であり，その基底における座標を $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)_\Sigma$ とし，ベクトル空間 $V$ の基底が $\Pi=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ であり，その基底における座標を $(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_m)_\Pi$ とする．このとき，行列 $A$ が $f$ の表現行列であることと，

$$\tilde{\boldsymbol{y}}=A\tilde{\boldsymbol{x}},\qquad \tilde{x}=\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \vdots\\ \tilde{x}_n\end{bmatrix},\quad \tilde{y}=\begin{bmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\\ \vdots\\ \tilde{y}_m\end{bmatrix}$$

が成り立つこととは，必要十分条件である．

**注意 4.29 (表現行列)** $U=\mathbb{R}^n$, $V=\mathbb{R}^m$ とし，$\mathbb{R}^n$ の基底を標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ とし，$\mathbb{R}^m$ の基底を標準基底 $\{\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\cdots,\boldsymbol{e}'_m\}$ とする．このとき $\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{y}=\tilde{\boldsymbol{y}}$ となるから，$(\flat)$ は $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ となる．よって，本節の表現行列の定義により定まる $A$ と前節の表現行列の定義により定まる $A$ とは，この条件のもとで一致する．

**注意 4.30 (表現行列)** 線形写像 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ の標準基底における表現行列は $A$ である．

**定理 4.31 (基底を取り換えたときの表現行列)** 線形写像 $f:U\to V$ において $U$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{u}_n\}$ と $V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{v}_m\}$ に関する表現行列を $A$ とする．すなわち，

$$(f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n))=(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m)\,A$$

とする．$U$ の基底 $\{\boldsymbol{u}'_1,\,\boldsymbol{u}'_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{u}'_n\}$ と $V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}'_1,\,\boldsymbol{v}'_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{v}'_m\}$ に関する表現行列を $B$ とする．すなわち，

$$\big(f(\boldsymbol{u}'_1),\ f(\boldsymbol{u}'_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}'_n)\big)=\big(\boldsymbol{v}'_1,\ \boldsymbol{v}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}'_m\big)\,B$$

とする．このとき

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ．ここで $P, Q$ は基底の変換行列であり，

$$\left(\boldsymbol{u}'_1,\ \boldsymbol{u}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right) = \left(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\right) P, \qquad \left(\boldsymbol{v}'_1,\ \boldsymbol{v}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}'_m\right) = \left(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m\right) Q$$

である．

（証明）　まず，

$$\begin{aligned}
&\left(f(\boldsymbol{u}'_1),\ f(\boldsymbol{u}'_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}'_n)\right) \\
&= \left(f\left(\sum_k p_{k1}\boldsymbol{u}'_k\right),\ f\left(\sum_k p_{k2}\boldsymbol{u}'_k\right),\ \cdots,\ f\left(\sum_k p_{kn}\boldsymbol{u}'_k\right)\right) \\
&= \left(\sum_k p_{k1}f(\boldsymbol{u}'_k),\ \sum_k p_{k2}f(\boldsymbol{u}'_k),\ \cdots,\ \sum_k p_{kn}f(\boldsymbol{u}'_k)\right) \\
&= \left(f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)\right) P \\
&= \left(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m\right) AP
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，

$$\left(f(\boldsymbol{u}'_1),\ f(\boldsymbol{u}'_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}'_n)\right) = \left(\boldsymbol{v}'_1,\ \boldsymbol{v}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}'_m\right) B = \left(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m\right) QB$$

となる．よって，$AP = QB$ であり

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ．

**定理 4.32 (線形変換の表現行列の基底の取り替え)** ベクトル空間 $U$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ における線形変換 $f$ の表現行列を $A$ とし，基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ における $f$ の表現行列を $B$ とする．また，基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ から基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ への基底の変換行列を $P$ とする．このとき

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つ．

（証明）　まず，表現行列 $A, B$ は定義より

$$\left(f(\boldsymbol{u}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)\right) = \left(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\right) A, \qquad \left(f(\boldsymbol{u}'_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}'_n)\right) = \left(\boldsymbol{u}'_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right) B$$

をみたす．基底の変換行列 $P$ は

$$\left(\boldsymbol{u}'_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right) = \left(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\right) P$$

をみたす．このとき

$$\begin{aligned}
\left(f(\boldsymbol{u}'_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}'_n)\right) &= \left(f(\boldsymbol{u}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)\right) P = \left(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\right) AP, \\
\left(f(\boldsymbol{u}'_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}'_n)\right) &= \left(\boldsymbol{u}'_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}'_n\right) B = \left(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\right) PB
\end{aligned}$$

が成り立つので $AP = PB$ となる．よって $B = P^{-1}AP$ を得る．

**例 4.33 (表現行列の基底の取り替えの具体例)** 線形変換 $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$;

$$(\text{☆})\qquad g(x)=F(f(x))=f'(x)x+f(0)x^2+f(1)$$

の表現行列を求める．$\mathbb{R}[x]_2$ の基底を $\{1,\ x,\ x^2\}$ とし，多項式 $f(x), g(x)$ を表すと

$$(\triangle)\qquad f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2=\left(1,\ x,\ x^2\right)\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\left(1,\ x,\ x^2\right)\boldsymbol{a},$$

$$(\blacktriangle)\qquad g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2=\left(1,\ x,\ x^2\right)\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{bmatrix}=\left(1,\ x,\ x^2\right)\boldsymbol{b}$$

となる．このとき (☆) より

$$\begin{aligned}g(x)&=F(f(x))=F(a_0+a_1x+a_2x^2)=a_0F(1)+a_1F(x)+a_2F(x^2)\\&=\left(F(1),\ F(x),\ F(x^2)\right)\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\left(F(1),\ F(x),\ F(x^2)\right)\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

となる．ここで，$f=1, f=x, f=x^2$ を (☆) に代入するとそれぞれ $g=1+x^2, g=1+x, 1+2x^2$ となるので，

$$\left(F(1),\ F(x),\ F(x^2)\right)=\left(1+x^2,\ 1+x,\ 1+2x^2\right)=\left(1,\ x,\ x^2\right)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}=\left(1,\ x,\ x^2\right)A$$

を得る．$A$ は基底 $\{1,\ x,\ x^2\}$ に関する $F$ の表現行列である．これを代入すると

$$(\flat)\qquad g(x)=\left(1,\ x,\ x^2\right)A\boldsymbol{a}$$

となる．($\blacktriangle$) と比較すると $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{a}$ が成立する．よって，線形変換 $F$ は

$$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\qquad \boldsymbol{b}=\varphi(\boldsymbol{a})=A\boldsymbol{a},\qquad \begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}$$

と行列表示で書かれた線形変換 $\varphi$ と等価である．

次に基底 $\{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}$ に関する表現行列 $B$ を求める．すなわち，$B$ は

$$\left(F(1+x),\ F(x+x^2),\ F(x^2)\right)=\left(1+x,\ x+x^2,\ x^2\right)B$$

をみたす．基底 $\{1,\ x,\ x^2\}$ から $\{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}$ への変換行列 $P$ は

$$\left(1+x,\ x+x^2,\ x^2\right)=\left(1,\ x,\ x^2\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\left(1,\ x,\ x^2\right)P$$

により与えられる．このとき，多項式 $f(x), g(x)$ は

$$
\begin{aligned}
(\square)\quad f(x) &= \tilde{a}_0(1+x)+\tilde{a}_1(x+x^2)+\tilde{a}_2x^2 \\
&= \left(1+x,\ x+x^2,\ x^2\right)\begin{bmatrix}\tilde{a}_0\\ \tilde{a}_1\\ \tilde{a}_2\end{bmatrix} = \left(1+x,\ x+x^2,\ x^2\right)\tilde{\boldsymbol{a}} = \left(1,\ x,\ x^2\right)P\tilde{\boldsymbol{a}}, \\
(\blacksquare)\quad g(x) &= \tilde{b}_0(1+x)+\tilde{b}_1(x+x^2)+\tilde{b}_2x^2 \\
&= \left(1+x,\ x+x^2,\ x^2\right)\begin{bmatrix}\tilde{b}_0\\ \tilde{b}_1\\ \tilde{b}_2\end{bmatrix} = \left(1+x,\ x+x^2,\ x^2\right)\tilde{\boldsymbol{b}} = \left(1,\ x,\ x^2\right)P\tilde{\boldsymbol{b}}
\end{aligned}
$$

となる．$(\triangle)$, $(\blacktriangle)$ と $(\square)$, $(\blacksquare)$ とを比較すると

$$
\boldsymbol{a} = P\tilde{\boldsymbol{a}}, \qquad \boldsymbol{b} = P\tilde{\boldsymbol{b}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{\boldsymbol{a}} = P^{-1}\boldsymbol{a}, \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = P^{-1}\boldsymbol{b}
$$

を得る．これは基底 $\Sigma = \{1,\ x,\ x^2\}$ における座標 $(a_0, a_1, a_2)_\Sigma$ と基底 $\Sigma' = \{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}$ における座標 $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2)_{\Sigma'}$ との座標変換を表す．$(\flat)$, $(\square)$, $(\blacksquare)$ より

$$
g(x) = \left(1,\ x,\ x^2\right)P\tilde{\boldsymbol{b}} = \left(1,\ x,\ x^2\right)A\boldsymbol{a} = \left(1,\ x,\ ,x^2\right)AP\tilde{\boldsymbol{a}}
$$

となるので，$P\tilde{\boldsymbol{b}} = AP\tilde{\boldsymbol{a}}$ となり，

$$
\tilde{\boldsymbol{b}} = (P^{-1}AP)\tilde{\boldsymbol{a}} = B\tilde{\boldsymbol{a}}
$$

を得る．以上より基底 $\Sigma' = \{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}$ に関する $F$ の表現行列 $B$ は

$$
B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&3&3\end{bmatrix}
$$

と得られる．よって，基底 $\Sigma'$ に関する線形変換 $F$ の行列表示は

$$
\tilde{\varphi}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = \tilde{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{a}}) = B\tilde{\boldsymbol{a}}, \qquad \begin{bmatrix}\tilde{b}_0\\ \tilde{b}_1\\ \tilde{b}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{a}_0\\ \tilde{a}_1\\ \tilde{a}_2\end{bmatrix}
$$

となる．

## 4.7 演習問題 〜 線形写像の表現行列

**問 4.34 (線形変換の行列表示)** 次の線形変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}$ を行列表示にせよ．

(1) 点 $\boldsymbol{x}$ と原点 $\boldsymbol{0}$ との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(2) 直線 $\ell$ を原点 $\boldsymbol{0}$ を通り方向ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix}1&-2&1\end{bmatrix}^T$ の直線とする．点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\ell$ へ正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(3) 点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\ell$ への正射影との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(4) 直線 $\tilde{\ell}$ を原点 $\boldsymbol{0}$ を通り方向ベクトル $\tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix}-2&0&3\end{bmatrix}^T$ の直線とする．点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\ell$ への正射影と点 $\boldsymbol{x}$ から直線 $\tilde{\ell}$ への正射影との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

(5) $x_2x_3$ 平面への正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.　(6) $x_1x_3$ 平面への正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.
(7) $x_1x_2$ 平面への正射影 $\boldsymbol{y}$ への変換.　(8) 原点 $\boldsymbol{0}$ に関して点対称な点 $\boldsymbol{y}$ への変換.
(9) $x_1x_2$ 平面に関して対称な点 $\boldsymbol{y}$ への変換.
(10) 原点 $\boldsymbol{0}$ と点 $\boldsymbol{x}$ を通る直線上にあり，原点 $\boldsymbol{0}$ からの距離が 3 倍となる点 $\boldsymbol{y}$ への変換.

**問 4.35 (線形写像の行列表示)** 次の条件をみたす線形写像を行列表示にせよ.

(1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$

(2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$

(3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-6\\-13\end{bmatrix}$

(4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=3$, $f\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=-2$

(5) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$

(6) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=3$, $f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}\right)=1$, $f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=-2$

**問 4.36 (線形写像の表現行列)** 次の線形写像 $f$ の標準基底における表現行列を求めよ.

(1) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$; $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$
(2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_2+(\boldsymbol{c}\,,\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_3$
(3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x}$
(4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_2$
(5) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{c}\,,\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_2$
(6) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. $f$ は $f(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{b}$ をみたす.
(7) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. $f$ は $f(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{c}$ をみたす.
(8) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. $f$ は $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$, $f(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$ をみたす.
(9) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. $f$ は $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}$, $f(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$ をみたす．ただし

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

**問 4.37 (線形写像の表現行列)** 前問の線形写像 $f$ に関する次の基底における表現行列を求めよ.

(1) $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$, $\mathbb{R}^m$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$

(2) $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$　(3)–(9) $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right\}$

**問 4.38 (線形写像の表現行列)** 次の線形写像 $f$ の表現行列を与えられた基底に関して求めよ.

(1) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

(2) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&4&1\\1&5&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}$.

(3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\\-2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$.

(4) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\0&2&0&1\\-2&1&1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^4$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$.

(5) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&4&3&1\\0&-3&1&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^4$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$.

(6) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&3&-1\\-1&0&3\\1&-2&4\\3&1&5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^4$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$.

(7) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1-x_2\\x_2+x_3\\x_1-x_3\\x_1+x_2+x_3\end{bmatrix}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^4$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

(8) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1+2x_2-x_3\\2x_1-5x_2\\7x_1-3x_4\end{bmatrix}$, $\mathbb{R}^4$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

(9) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&4&5\\-1&2&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\4\\-2\end{bmatrix}\right\}$.

(10) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&3&-1\\1&0&-3\\5&2&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}0\\-2\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$.

(11) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&-3&1\\2&5&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$.

(12) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&-2&1\\-2&4&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$.

**問 4.39 (線形写像の表現行列)** 次の線形写像 $F$ の表現行列を与えられた基底に関して求めよ.

(1) $F:\mathbb{R}[x]_n\to\mathbb{R}[x]_n$; $F(f(x))=f'(x)$, $\mathbb{R}[x]_n$ の基底 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$.
(2) $F:\mathbb{R}[x]_n\to\mathbb{R}[x]_n$; $F(f(x))=f''(x)$, $\mathbb{R}[x]_n$ の基底 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$.
(3) $F:\mathbb{R}[x]_n\to\mathbb{R}[x]_n$; $F(f(x))=f'''(x)$, $\mathbb{R}[x]_n$ の基底 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$.
(4) $F:\mathbb{R}[x]_n\to\mathbb{R}[x]_n$; $F(f(x))=\displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$, $\mathbb{R}[x]_n$ の基底 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$.
(5) $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$; $F(f(x))=f(0)+f(1)x+f(2)x^2$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1,x,x^2\}$.
(6) $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$; $F(f(x))=f(0)+f(1)x+f(2)x^2$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1+x,x+x^2,1-x^2\}$.
(7) $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$; $F(f(x))=f(x)+xf'(x)+x^2f''(x)$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1,x,x^2\}$.
(8) $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$; $F(f(x))=f(x)+xf'(x)+x^2f''(x)$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1+x,x+x^2,1-x^2\}$.
(9) $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$; $F(f(x))=f(0)-2f'(x)+(1-x^2)f''(x)$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1,x,x^2\}$.
(10) $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$; $F(f(x))=f(0)-2f'(x)+(1-x^2)f''(x)$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1+x,x+x^2,1-x^2\}$.
(11) $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$; $F(f(x))=2f'(x)+3f(x)$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1,x,x^2\}$.
(12) $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$; $F(f(x))=2f'(x)+3f(x)$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1+x,x+x^2,1-2x^2\}$.

## 4.8 線形写像の像と核

**定義 4.40 (像)** 線形写像 $f:U\to V$ に対して集合

$$\mathrm{Im}\,(f)=f(U)=\{\,\boldsymbol{v}\in V\mid \boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{u}),\forall u\in U\,\}$$

を $f$ の**像（image）**という.

**定義 4.41 (核)** 線形写像 $f:U\to V$ に対して集合

$$\mathrm{Ker}\,(f)=\{\,\boldsymbol{u}\in U\mid f(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}_V\,\}$$

を $f$ の**核（kernel）**という.

**定理 4.42 (像と部分空間)** 線形写像 $f:U\to V$ の像 $\mathrm{Im}\,(f)$ は $V$ の部分空間である.

（証明） 像 $\mathrm{Im}\,(f)\subset V$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ に対して $\boldsymbol{v}_1=f(\boldsymbol{u}_1)$, $\boldsymbol{v}_2=f(\boldsymbol{u}_2)$ をみたすベクトル $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$ をおく. このとき,

$$f(\alpha\boldsymbol{u}_1+\beta\boldsymbol{u}_1)=\alpha f(\boldsymbol{u}_1)+\beta f(\boldsymbol{u}_1)=\alpha\boldsymbol{v}_1+\beta\boldsymbol{v}_2$$

が成り立つ．つまり，$\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Im}\,(f)$ である．任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Im}\,(f)$ と任意のスカラー $\alpha, \beta \in K$ に対して，$\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Im}\,(f)$ が成り立つので，$\mathrm{Im}\,(f)$ は $V$ の部分空間である．

**定理 4.43 (核と部分空間)** 線形写像 $f: U \to V$ の核 $\mathrm{Ker}\,(f)$ は $U$ の部分空間である．

（証明）　核 $\mathrm{Ker}\,(f) \subset U$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{0}_U$, $f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{0}_U$ をみたす．このとき，

$$f(\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2) = \alpha f(\boldsymbol{u}_1) + \beta f(\boldsymbol{u}_2) = \alpha\boldsymbol{0}_U + \beta\boldsymbol{0}_U = \boldsymbol{0}_U$$

となる．つまり，$\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ である．任意のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ と任意のスカラー $\alpha, \beta \in K$ に対して，$\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ が成り立つので，$\mathrm{Ker}\,(f)$ は $U$ の部分空間である．

## 4.9　線形写像の階数と退化次数

**定義 4.44 (階数，退化次数)** 線形写像 $f$ の像 $\mathrm{Im}\,(f)$ の次元を**階数（rank）**といい，

$$\mathrm{rank}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$$

と表記する．また，核 $\mathrm{Ker}\,(f)$ の次元を**退化次数（nullity）**といい，

$$\mathrm{null}(f) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$$

と表記する．

**定理 4.45 (退化次数，階数)** 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の階数は

$$\mathrm{rank}\,(f) = \mathrm{rank}\,(A)$$

である．また，$f$ の退化次数は

$$\mathrm{null}(f) = n - \mathrm{rank}\,(A)$$

である．

（証明）　まず $f$ の核は定義より

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

である．これは方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間である．方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解の任意定数の個数 $n - \mathrm{rank}\,(A)$ が解空間の次元と等しいので，

$$\mathrm{null}(f) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = n - \mathrm{rank}\,(A)$$

が成り立つ．次に $f$ の像は定義より

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{\, \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \mid \forall\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$$

である．$\mathrm{Im}\,(f)$ の任意の元は

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

と表される．つまり $\boldsymbol{y}$ の集合はベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ で張られる部分空間

$$\mathrm{Im}\,(f) = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

となる．部分空間の基底の個数は 1 次独立なベクトルの最大個数となるから，

$$\mathrm{rank}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rank}\,(A)$$

が成り立つ．

**注意 4.46 (退化次数，階数)** 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ に対して

$$\mathrm{null}(f) + \mathrm{rank}\,(f) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つことに注意する．

**定理 4.47 (退化次数，階数)** 線形写像 $f : U \to V$ に関して

$$\mathrm{null}(f) + \mathrm{rank}\,(f) = \dim(U)$$

が成立する．

（証明） $\mathrm{Ker}\,(f) \subset U$ の基底を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ とし，$\mathrm{Im}\,(f) \subset V$ の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s\}$ とする．また，$U$ のベクトル $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{r+s}$ が

$$f(\boldsymbol{u}_{r+1}) = \boldsymbol{v}_1, \quad \cdots, \quad f(\boldsymbol{u}_{r+s}) = \boldsymbol{v}_s$$

をみたすとする．このとき 1 次関係

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r + b_1\boldsymbol{u}_{r+1} + b_s\boldsymbol{u}_{r+s} = \boldsymbol{0}_U$$

に対して $f$ を作用させると

$$\begin{aligned} f(a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r + b_1\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + b_s\boldsymbol{u}_{r+s}) &= f(\boldsymbol{0}_U) \\ a_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + a_r f(\boldsymbol{u}_r) + b_1 f(\boldsymbol{u}_{r+1}) + \cdots + b_s f(\boldsymbol{u}_{r+s}) &= \boldsymbol{0}_V \\ a_1\boldsymbol{0}_V + \cdots + a_r\boldsymbol{0}_V + b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s &= \boldsymbol{0}_V \\ b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s &= \boldsymbol{0}_V \end{aligned}$$

となる．$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s$ は 1 次独立なので $b_1 = \cdots = b_s = 0$ となる．このとき

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}_U$$

であり，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ は 1 次独立であるか $a_1 = \cdots = a_r = 0$ となる．よって $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{r+s}$ は 1 次独立である．次に，$U$ の任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ を $f$ で写されたベクトル $f(\boldsymbol{u})$ は $V$ のベクトルであるから，

$$f(\boldsymbol{u}) = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s$$

と書ける．これより

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{u} - b_1\boldsymbol{u}_{r+1} - \cdots - b_s\boldsymbol{u}_{r+s}) = f(\boldsymbol{u}) - b_1 f(\boldsymbol{u}_{r+1}) - \cdots - b_s f(\boldsymbol{u}_{r+s}) \\ &\quad = (b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s) - (b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{v}_s) = \boldsymbol{0}_V \end{aligned}$$

が成り立つ．ベクトル $\boldsymbol{u}-b_1\boldsymbol{u}_{r+1}-\cdots-b_s\boldsymbol{u}_{r+s}$ は $\mathrm{Ker}\,(f)$ に含まれる．よって

$$\boldsymbol{u}-b_1\boldsymbol{u}_{r+1}-\cdots-b_s\boldsymbol{u}_{r+s}=a_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{u}_r$$

と書けるので，

$$\boldsymbol{u}=a_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{u}_r+b_1\boldsymbol{u}_{r+1}+\cdots+b_s\boldsymbol{u}_{r+s}$$

を得る．$a_1,\cdots,a_r,\,b_1,\cdots,b_s$ は任意であるから，

$$W=\langle \boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_{r+s}\rangle$$

となる．以上より，$r+s$ 個のベクトル $\{\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{u}_{r+s}\}$ が $U$ の基底となる，よって $\dim(U)=r+s$, $\mathrm{null}(f)=\dim(\mathrm{Ker}\,(f))=r$, $\mathrm{rank}\,(f)=\dim(\mathrm{Im}\,(f))=s$ を得る．

**例 4.48 (線形写像の像と核の具体例)** 線形写像

$$f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3;\qquad \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$$
$$A=\begin{bmatrix}2&-1&1&5&0\\1&3&4&-1&7\\1&0&1&2&1\end{bmatrix}$$

の像 $\mathrm{Im}\,(f)$，核 $\mathrm{Ker}\,(f)$ とそれらの次元である階数 $\mathrm{rank}\,(f)$, 退化次数 $\mathrm{null}(f)$ を求める．

まず $A$ を簡約化すると

$$A\quad\to\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1&2&1\\0&1&1&-1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1&\boldsymbol{b}_2&\boldsymbol{b}_3&\boldsymbol{b}_4&\boldsymbol{b}_5\end{bmatrix}$$

となる．このとき $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{e}_2$ は 1 次独立であり，その他のベクトルは

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2,\quad \boldsymbol{b}_4=2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2,\quad \boldsymbol{b}_5=\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2$$

と表される．同じ 1 次関係が $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_5$ に対しても成り立つので，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立であり，その他のベクトルは

$$(☆)\qquad \boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{a}_4=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$$

となる．また，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は

$$(\bigstar)\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_3-2x_4-x_5\\-x_3+x_4-2x_5\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}=c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+c_3\boldsymbol{u}_3$$

と表される．

$f$ の核 $\mathrm{Ker}\,(f)$ は方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解 $(\bigstar)$ の集合であるから，

$$\mathrm{Ker}\,(f)=\left\{\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\ \middle|\ A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ \right\}=\{\ c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+c_3\boldsymbol{u}_3\ |\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\ \}=\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\rangle_{\mathbb{R}}$$

となる．$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ は 1 次独立であり，$\mathrm{Ker}\,(f)$ の基底となる．よって退化次数は

$$\mathrm{null}(f) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 5 - \mathrm{rank}\,(A) = 5 - 2 = 3$$

と得られる．

$f$ の像 $\mathrm{Im}\,(f)$ の元 $\boldsymbol{y}$ は任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ に対して，

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_5\boldsymbol{a}_5$$

により定まる．(☆) を用いると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + x_4(2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2) + x_5(\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2) \\ &= (x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5)\boldsymbol{a}_1 + (x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5)\boldsymbol{a}_2 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \end{aligned}$$

と表される．ここで $c_1 = x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5$, $c_2 = x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5$ は任意の実数であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(f) &= \left\{\, \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,\right\} = \{\, x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_5\boldsymbol{a}_5 \mid x_1, \cdots, x_5 \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2 \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

が成り立つ．$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2\}$ は 1 次独立であり，$\mathrm{Im}\,(f)$ の基底となる．よって

$$\mathrm{rank}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rank}\,(A) = 2$$

を得る．

## 4.10　線形写像の合成写像

**定義 4.49 (合成写像)** 線形写像 $f : U \to V;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ と $g : V \to W;\ \boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y})$ より定まる写像

$$h : U \to W; \qquad \boldsymbol{z} = g(f(\boldsymbol{x}))$$

を $f$ と $g$ の**合成写像（composite）**といい，

$$h = g \circ f$$

と表記する．

**定理 4.50 (線形写像の合成写像)** 線形写像の合成写像もまた線形写像となる．

**定理 4.51 (合成写像の表現行列)** 線形写像 $f, g$ の表現行列をそれぞれ $A, B$ とする．このとき，合成写像 $h = g \circ f$ の表現行列は $C = BA$ となる．

**例 4.52 (合成写像の表現行列の具体例)** 2 つの写像

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \qquad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad A : m \times n \\ &g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l; \qquad \boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y}) = B\boldsymbol{y}, \quad B : l \times m \end{aligned}$$

を考える．このとき

$$
\begin{aligned}
&h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l;\\
&\boldsymbol{z} = g \circ f(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = B(A\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}, \quad C : l \times n
\end{aligned}
$$

である．表現行列は

$$C = BA$$

となる．

### 4.11 恒等変換の表現行列

**定理 4.53 (恒等変換の表現行列)** 恒等変換 $f : V \to V$ の表現行列は単位行列である．

（証明） $V$ の基底を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とする．このとき $f$ は恒等変換であるから，

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1, \quad \cdots, \quad f(\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{u}_n$$

をみたす．よって

$$(f(\boldsymbol{u}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n) = E\,(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)$$

となるので，表現行列は単位行列 $E$ となる．

### 4.12 正則変換と逆変換

**定義 4.54 (正則変換)** 線形変換 $f : V \to V$ が**上への 1 対 1 写像**であるとき，$f$ を**正則変換（regular mappping）**という．

**注意 4.55 (逆変換)** 上への 1 対 1 写像であれば**逆変換** $f^{-1}$ が存在する．正則変換は逆変換が存在する線形変換である，と読み替えてもよい．

**定理 4.56 (正則変換と正則行列)** 線形写像 $f$ が正則変換であることと，$f$ の表現行列が正則行列であることとは必用十分な条件である．

（証明） (⇒) 写像 $f$, $g$, $h$ の表現行列を $A$, $B$, $C$ とする．このとき

$$g \circ f = h \quad \Leftrightarrow \quad BA = C$$

が成り立つ．恒等変換の表現行列は単位行列 $E$ であるから，$g = f^{-1}$ のとき

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id} \quad \Leftrightarrow \quad BA = E$$

が成り立つ．よって $B = A^{-1}$ を得る．

**注意 4.57 (逆変換と逆行列)** $f^{-1}$ が存在することと，$f$ の表現行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ が存在することは等価である．

**例 4.58 (正則変換の具体例)** 線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$;

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},\qquad f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$$

の表現行列とその行列式は

$$A=\begin{bmatrix}-1&3\\3&1\end{bmatrix},\qquad \det(A)=\begin{vmatrix}-1&3\\3&1\end{vmatrix}=-10\neq 0$$

である．$A$ は正則行列であるから，$f$ は正則変換である．

**例 4.59 (正則変換ではない具体例)** 射影変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$; $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3$ の表現行列とその行列式は

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad \det(A)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

である．よって $A$ は正則でないので $f$ もまた正則ではない．

例えば点 $(x_1,x_2,1)$ と点 $(x_1,x_2,2)$ を射影変換 $f$ で写すとどちらも点 $(x_1,x_2,0)$ に写される．他にも点 $(x_1,x_2,0)$ を通り軸 $x_3$ に平行な直線上の点は全て $f$ により点 $(x_1,x_2,0)$ に写される．逆変換 $f^{-1}$ を考えるとき点 $(x_1,x_2,0)$ から戻され点は直線上に無限に存在することになる．よって $f$ は 1 対 1 写像ではない．また，$\mathbb{R}^3$ の任意の点は $f$ により全て $x_1x_2$ 平面上に写される．$x_1x_2$ 平面は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるので，$f$ は上への写像でもない．

**注意 4.60 (核と正則変換)** 線形変換 $f:V\to V$ が $\mathrm{null}(f)>0$ のとき，$f$ は正則変換ではない．なぜなら，$\mathrm{Ker}\,(f)$ のすべての元は $\mathbf{0}_V$ に写されるので，$\mathbf{0}_V$ の逆元は存在しない．よって，$f$ は 1 対 1 の写像ではなく，正則変換はない．

## 4.13 演習問題 〜 像，核，正則変換

**問 4.61 (像，核，階数，退化次数)** 次の写像の核と像の基底の組をそれぞれ求め，退化次数と階数を求めよ．また，$f$ が正則であるか否か述べよ．

(1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$　　(2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}4&-6\\2&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&1\\6&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$　　(4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(5) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$　　(6) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}-2&3\\4&-6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(7) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}-2&6\\-3&9\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$　　(8) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&-1\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(9) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0&0\\2&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$　　(10) $f:\mathbb{R}^2\to\in\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\\-1&5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(11) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&2&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ (12) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\5&7&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(13) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&1&-1\\-1&2&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ (14) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&-1&-2\\1&-5&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(15) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&-1&-3\\-6&3&9\\-4&2&6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ (16) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&1&-6\\-3&1&2\\1&-1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(17) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-2&3\\-1&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ (18) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\2&3&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(19) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}-1&0&2&-1\\2&6&4&8\\1&2&-2&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ (20) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&4&3&1\\0&0&1&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(21) $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&-2&1&0&0\\1&-2&1&0&1\\-2&4&-2&0&2\\1&-1&2&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(22) $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0&1&1&1&3\\-1&-2&-5&-1&-4\\1&1&4&0&1\\1&-1&2&-2&-5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(23) $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4; f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&0&-1&-3&2\\1&2&-2&-8&7\\-1&2&0&-2&3\\0&2&-1&-5&5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

**問 4.62 (線形変換の像，核，階数，退化次数)** 「演習問題 〜 線形写像の表現行列」の線形写像の像，核，階数，退化次数をそれぞれ求めよ．また，写像が正則であるか否か述べよ．

**問 4.63 (合成写像)** 線形写像 $f$ の表現行列を $A$ とし，線形写像 $g$ の表現行列を $B$ とする．合成写像 $g\circ f$ の表現行列を求めよ．

(1) $A=\begin{bmatrix}1&a\\a&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&b\\b&1\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\-3&-2&3\\0&1&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&4&-3\\2&0&1\\-3&-2&0\end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix}3&-3&2\\2&1&-1\\-3&0&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&-1&3\end{bmatrix}$

## 4.14 直交行列

**定義 4.64 (直交行列)** 行列 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ が

$$AA^T=A^TA=E$$

をみたすとき $A$ を**直交行列（orthogonal matrix）**という．

**定理 4.65 (直交行列の行列式)** 直交行列の行列式は

$$\det(A) = \pm 1$$

である．

（証明） $AA^T = E$ より，両辺の行列式をとると

$$\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2 = \det(E) = 1$$

となるので $\det(A) = \pm 1$ を得る．

**定理 4.66 (直交行列の正則性)** 直交行列は正則である．

（証明） $\det(A) = \pm 1 \neq 0$ であるから．

**定理 4.67 (直交行列の逆行列)** 直交行列の逆行列は

$$A^{-1} = A^T$$

であり，$A^{-1}$ もまた直交行列である．

（証明） $A$ は正則であるか $A^{-1}$ を $AA^T = E$ に左から掛けると

$$A^{-1}AA^T = A^{-1}E \quad \Rightarrow \quad A^T = A^{-1}$$

を得る．

**定理 4.68 (直交行列の積)** 直交行列の積もまた直交行列である．

（証明） $A, B$ を直交行列として，

$$AB(AB)^T = A(BB^T)A^T = AEAA^T = AA^T = E.$$

## 4.15 直交行列と正規直交系

**定理 4.69 (直交行列と正規直交系)** 行列 $A$ が直交行列であることと，行列 $A$ の列ベクトルまたは行ベクトルが正規直交系であることとは，必要十分条件である．

（証明） 直交行列 $A$ を列ベクトルに分割し

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

とおく．$A^TA=E$ より，

$$A^TA=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1{}^T\\ \boldsymbol{a}_2{}^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{a}_n{}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1{}^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1{}^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1{}^T\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{a}_2{}^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2{}^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2{}^T\boldsymbol{a}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{a}_n{}^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n{}^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n{}^T\boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1\,,\,\boldsymbol{a}_n)\\ (\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2\,,\,\boldsymbol{a}_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\boldsymbol{a}_n\,,\,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n\,,\,\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n\,,\,\boldsymbol{a}_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=E$$

となるので，

$$(\boldsymbol{a}_i\,,\,\boldsymbol{a}_j)=\delta_{ij}$$

を得る．行ベトクルに対しても同様の操作で $AA^T=E$ より示される．

**定理 4.70 (直交行列と正規直交基底)** 内積空間 $V$ において，$\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ と $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ を正規直交基底とする．このとき，基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ への変換行列 $P$ は直交行列となる．

（証明） $P$ は基底の変換行列なので，

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n)=(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,P,\qquad P=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{bmatrix}$$

と書ける．これより，

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{k=1}^{n}p_{ki}\boldsymbol{u}_k$$

である．この式と $(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j)=\delta_{ij}$ より

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_i\,,\,\boldsymbol{v}_j)&=\left(\sum_{k=1}^{n}p_{ki}\boldsymbol{u}_k\,,\,\sum_{k=1}^{n}p_{kj}\boldsymbol{u}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ki}p_{lj}\,(\boldsymbol{u}_k\,,\,\boldsymbol{u}_l)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ki}p_{lj}\delta_{kl}=\sum_{k=1}^{n}p_{ki}p_{kj}\\ &=\left(\boldsymbol{p}_i\,,\,\boldsymbol{p}_j\right)\end{aligned}$$

を得る．$(\boldsymbol{v}_i\,,\,\boldsymbol{v}_j)=\delta_{ij}$ より $\left(\boldsymbol{p}_i\,,\,\boldsymbol{p}_j\right)=\delta_{ij}$ が成り立つ．$P$ の列ベクトルが正規直交系となるので，$P$ は直交行列である．

**問 4.71 (直交行列の具体例)** 次の行列は直交行列であることを示せ．

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$$

**問 4.72 (直交行列の具体例)** 直交行列 $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ はすべて

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

の形で表される．これを示せ.

**例 4.73 (直交行列の具体例)** グラム・シュミットの直交化法で正規直交化されたベクトル

$$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

を列ベクトルとして並べた行列

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

は直交行列となる.

## 4.16 直交変換

**定義 4.74 (直交変換)** 内積空間 $V$ において，線形変換 $f : V \to V;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ が

$$\big(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}'\big) = \big(f(\boldsymbol{x})\,,\,f(\boldsymbol{x}')\big), \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$$

をみたすとき，$f$ を**直交変換（orthogonal transformation）**という.

**定理 4.75 (直交変換)** 内積空間 $V$ において，$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を正規直交基底とする．線形変換 $f : V \to V;$ $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ が直交変換となるための必用十分条件は，$\{f(\boldsymbol{u}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)\}$ が正規直交基底となることである.

（証明） (必用条件) $f$ が直交変換であれば $(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}') = (f(\boldsymbol{x})\,,\,f(\boldsymbol{x}'))$ となるで，

$$(f(\boldsymbol{u}_i)\,,\,f(\boldsymbol{u}_j)) = (\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}.$$

(十分条件) $\{f(\boldsymbol{u}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)\}$ を正規直交基底とする．なすわち，$(f(\boldsymbol{u}_i)\,,\,f(\boldsymbol{u}_j)) = \delta_{ij}$ とする．任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n, \qquad \boldsymbol{x}' = x_1'\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n'\boldsymbol{u}_n$$

と表される．このとき

$$\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}'\big) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{u}_i\,,\,\sum_{i=1}^n x_i'\boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j'\,(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j'\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_ix_i', \\
\big(f(\boldsymbol{x})\,,\,f(\boldsymbol{x}')\big) &= \left(f\left(\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{u}_i\right),\,f\left(\sum_{i=1}^n x_i'\boldsymbol{u}_i\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_if(\boldsymbol{u}_i)\,,\,\sum_{i=1}^n x_i'f(\boldsymbol{u}_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j'\,(f(\boldsymbol{u}_i)\,,\,f(\boldsymbol{u}_j)) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j'\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_ix_i'
\end{aligned}$$

となる．よって $(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}') = (f(\boldsymbol{x})\,,\,f(\boldsymbol{x}'))$ を得る.

**定理 4.76 (直交変換の内積の不変性)** 線形変換 $f$ が直交変換であるための必用十分条件は

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|f(\boldsymbol{x})\|$$

である．

（証明） (必用条件) $f$ が直交変換であれば $(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{y}\,,\,\boldsymbol{y}')$ であるから，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ とおくと， $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$ となり，$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{y}\|^2$ を得る．(十分条件) $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を正規直交基底とする．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$$

と表す．このとき

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|^2 &= (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{u}_i\,,\,\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\,(\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \\
&= {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2, \\
\|f(\boldsymbol{x})\|^2 &= (f(\boldsymbol{x})\,,\,f(\boldsymbol{x})) = \left(f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{u}_i\right), f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{u}_i\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{u}_i)\,,\,\sum_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{u}_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\,(f(\boldsymbol{u}_i)\,,\,f(\boldsymbol{u}_j)) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\|f(\boldsymbol{x}_i)\|^2 + \sum_{i\neq j} x_i x_j\,(f(\boldsymbol{u}_i)\,,\,f(\boldsymbol{u}_j))
\end{aligned}$$

となる．$x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ は任意であり，恒等式 $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|f(\boldsymbol{x})\|^2$ が成り立つためには

$$(f(\boldsymbol{u}_i)\,,\,f(\boldsymbol{u}_j)) = \delta_{ij}$$

をみたす必要がある．よって，$\{f(\boldsymbol{u}_1), \cdots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ は正規直交基底であり，$f$ は直交変換となる．

**注意 4.77 (直交変換のノルムの不変性)** 直交変換 $f$ において，長さは不変である．

**定理 4.78 (直交変換の角の不変性)** 直交変換 $f$ において，角度は不変である．

（証明） $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}')$ とおく．$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \|\boldsymbol{x}'\| = \|\boldsymbol{y}'\|, (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{y}\,,\,\boldsymbol{y}')$ より，

$$\frac{(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}'\|} = \frac{(\boldsymbol{y}\,,\,\boldsymbol{y}')}{\|\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{y}'\|}$$

を得る．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ のなす角と $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ のなす角とは等しい．

**注意 4.79 (合同変換)** 直交変換は合同変換のひとつである．**合同変換（congruent transformation）**とは，長さと角を不変に保つ変換のことをいう．合同変換で写される図形は，変換前の図形と後の図形とは合同となる．また，角を不変に保ち，長さはある定数倍になる変換のことを**相似変換（similarity transformation）**という．角を不変に保つ変換を**等角変換（isometric transformation）**という．

**注意 4.80 (合同変換)** **回転変換**と**鏡映変換**は合同変換である．

## 4.17　直交変換と直交行列

**定理 4.81 (直交変換と直交行列)** 線形変換 $f : V \to V$ が直交変換であることと，$f$ の表現行列が直交行列であることとは，必要十分条件である．

（証明）　（必要条件）$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $V$ の正規直交基底とする．$f$ が直交変換であるとき，$\{f(\boldsymbol{u}_1), \cdots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ も正規直交基底となる．また，正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ から正規直交基底 $\{f(\boldsymbol{u}_1), \cdots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ への基底の変換行列 $A$ は直交行列であり，

$$(f(\boldsymbol{u}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,A$$

をみたす．この式より $A$ は $f$ の表現行列ともみなせる．よって直交変換 $f$ の表現行列 $A$ は直交行列である.（十分条件）$A$ を直交行列とする．

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{x}$$

とおく．このとき

$$\big(f(\boldsymbol{x})\,,\, f(\boldsymbol{x}')\big) = \big(A\boldsymbol{x}\,,\, A\boldsymbol{x}'\big) = (A\boldsymbol{x})^T A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^T (A^T A)\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^T E\boldsymbol{x} = \big(\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{x}'\big)$$

をみたす．よって $f$ は直交変換である．

## 4.18　鏡映変換

**例 4.82 (直交変換の具体例)** 線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を考える．$AA^T = E$ となるので $A$ は直交行列である．2 つのベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

を $f$ で写すと

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_2' \\ x_1' \end{bmatrix}$$

となる．このとき

$$\big(\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{x}'\big) = x_1x_1' + x_2x_2' = x_2x_2' + x_1x_1' = \big(\boldsymbol{y}\,,\, \boldsymbol{y}'\big)$$

となるから，$(\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{y}\,,\, \boldsymbol{y}')$ を得る．よって $f$ は直交変換である．またこのとき，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \quad \|\boldsymbol{x}'\| = \|\boldsymbol{y}'\|, \quad \frac{(\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}'\|} = \frac{(\boldsymbol{y}\,,\, \boldsymbol{y}')}{\|\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{y}'\|}$$

が成り立つ．

$f$ は直線 $x_1 = x_2$ に対する鏡映変換である．

**例 4.83 (直交変換の具体例)** 直交変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

は $x_1$ 軸に対する鏡映変換である．

## 4.19　$\mathbb{R}^2$ における回転

$\mathbb{R}^2$ 内での原点を中心とする角 $\theta$ の回転移動を考える．点 $(x_1, x_2)$ から点 $(y_1, y_2)$ への変換を $f$ とする．このとき，標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は

$$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\}$$

へ写されるので，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{u}_1, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{u}_2$$

が成り立つ．よって

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = R_\theta \boldsymbol{x}$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

とおく．以上より，原点を中心として角 $\theta$ の**回転変換**は

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

と表される．この逆変換は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

と表される．$R_\theta$ を**回転行列**とよぶ.

**問 4.84 (回転行列)** 次の関係式が成り立つことを示せ.

(1)　$R_\theta {R_\theta}^T = E$　　　(2)　${R_\theta}^{-1} = {R_\theta}^T = R_{-\theta}$　　　(3)　$R_{\theta_2} R_{\theta_1} = R_{\theta_2+\theta_1}$

**注意 4.85 (回転行列と鏡映変換)** $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ のすべての直交行列 $AA^T = E$ は回転変換行列 $R_\theta$ と $x_1$ 軸に対する鏡映変換行列 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ の積の組合わせで表される.

## 4.20　$\mathbb{R}^3$ における回転

**例 4.86 ($\mathbb{R}^3$ の回転)** 直交変換

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;$$
$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = R\boldsymbol{x}$$

を考える．この写像は $x_3$ 軸を中心に $\theta$ 回転を表す．$RR^T = E$ より $R$ は直交行列である.

**例 4.87 ($\mathbb{R}^3$ の回転)** $x_1$ 軸まわりの回転は

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

と表され，$x_2$ 軸まわりの回転は

$$R_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

と表され，$x_3$ 軸まわりの回転は

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と表される．$R_1, R_2, R_3$ は直交行列である．

**注意 4.88 ($\mathbb{R}^3$ の回転)** $x_1$ 軸まわりに回転し，その後 $x_2$ 軸まわりに回転させるとき，表現行列は $R_2R_1$ である．これもまた直交行列である．同様に $R_1R_2, R_1R_3, \cdots$ もまた回転を表す．ただし，$R_iR_j \neq R_jR_i$ であることに注意．回転させる順番が異なれば違う回転を表す．

**問 4.89 ($\mathbb{R}^3$ の回転)** 原点を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ の直線を軸とする回転を考える．この回転変換の表現行列を求めよ．

## 4.21 演習問題 〜 直交変換

**問 4.90 (直交行列)** 次の行列は直交行列であることを示せ．

(1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$

**問 4.91 (直交行列)** 次の行列がが直交行列となるように $a, b, c$ を定めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & c & -b \\ a & b & c \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} b & a & c \\ a & 1 & a \\ c & a & -b \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} c & -b & a \\ b & c & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} a & -b & -c \\ a & b & -c \\ a & 0 & 2c \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} a & 2a & a \\ b & 0 & -b \\ c & -c & c \end{bmatrix}$

**問 4.92 (直交行列)** 次のベクトルを正規直交化し，列ベクトルにならべて直交行列を作れ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**問 4.93 (回転変換)** $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ を原点を中心に反時計回りに $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$ 回転させたベクトル $\boldsymbol{y}$ をそれぞれ求めよ．また，変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ の表現行列をそれぞれ求めよ．

**問 4.94 (鏡映変換)** $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ を直線 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 = x_2, x_1 + x_2 = 0, 2x_1 - x_2 = 0$ に対して鏡映変換したベクトル $\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直線に対して線対称）をそれぞれ求めよ．また，変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ の表現行列をそれぞれ求めよ．

**問 4.95 (回転行列と鏡映変換)** $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ を原点を中心に反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ 回転したベクトルを $\boldsymbol{y}$ とする．$\boldsymbol{y}$ を $x_1$ 軸に対して鏡映変換したベクトルを $\boldsymbol{z}$ とする．$\boldsymbol{z}$ を $-\frac{\pi}{6}$ 回転したベクトルを $\boldsymbol{w}$ とする．$\boldsymbol{w}$ を直線 $x_1 = x_2$ に対して鏡映変換したベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする．$\boldsymbol{u}$ を $\frac{2\pi}{3}$ 回転したベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を求めよ．また，変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \mapsto \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{v}$ の標準基底に関する表現行列をそれぞれ求めよ．さらに，この表現行列が直交行列であることを示せ．

**問 4.96 (回転行列と鏡映変換)** 回転変換行列と $x_1$ 軸に対する鏡映変換行列はそれぞれ

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

である．次の関係式をみたす $\theta$ を定めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = R(2\theta)M = R(\theta)MR(-\theta)$ (2) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = R(2\theta)M = R(\theta)MR(-\theta)$

## 4.22 点の平面への射影変換

**例 4.97 (点の平面への射影)** $\mathbb{R}^3$ において，任意の点 $(x_1, x_2, x_3)$ から平面

$$(\text{☆}) \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

への**射影変換** $f$ を求める．方程式 (☆) の一般解を求めると $x_1 = -x_2 - x_3$ より

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \boldsymbol{p}_1 + c_2 \boldsymbol{p}_2$$

となる．平面 (☆) は

$$H = \langle \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2 \rangle$$

と表せる．$H$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ をグラム・シュミットの直交化法で正規直交基底化する．

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2' = \boldsymbol{p}_2 - (\boldsymbol{p}_1\,,\,\boldsymbol{q}_1)\,\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2'}{\|\boldsymbol{p}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

とおくと $\left(\boldsymbol{q}_i\,,\,\boldsymbol{q}_j\right) = \delta_{ij}$ となる．

$$\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

は $H$ の正規直交基底となる．ここで点 $(x_1, x_2, x_3)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とし，平面へ射影した点の位置ベクトルを $\boldsymbol{y}$ とおく．射影点 $\boldsymbol{y}$ は平面 $H$ 上にあるので，基底 $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\}$ を用いて，

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2$$

と表せる．このとき $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{q}_2$ であり，$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\,,\, \boldsymbol{q}_1) = 0, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\,,\, \boldsymbol{q}_2) = 0$ が成り立つ．これより

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\,,\, \boldsymbol{q}_1) &= (\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{q}_1) - (\boldsymbol{y}\,,\, \boldsymbol{q}_1) = (\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{q}_1) - (c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2\,,\, \boldsymbol{q}_1) \\ &= (\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{q}_1) - c_1\,(\boldsymbol{q}_1\,,\, \boldsymbol{q}_1) + c_2\,(\boldsymbol{q}_2\,,\, \boldsymbol{q}_1) = (\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{q}_1) - c_1 = 0\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{q}_1$ 方向の座標は $c_1 = (\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{q}_1)$ と得られる．$\boldsymbol{q}_2$ 方向の座標も同様にして $c_2 = (\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{q}_2)$ と得られる．よって射影点は

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{q}_1)\,\boldsymbol{q}_1 + (\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{q}_2)\,\boldsymbol{q}_2$$

となる．射影変換 $f$ が $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ と得られた．

$f$ を行列表示する．$\mathbb{R}^3$ の任意の点 $\boldsymbol{x}$ を標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ で表すと，

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

であり，これを $f$ で写すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + x_3 f(\boldsymbol{e}_3) \\ &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \boldsymbol{x}\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_1\,,\, \boldsymbol{q}_1)\,\boldsymbol{q}_1 + (\boldsymbol{e}_1\,,\, \boldsymbol{q}_2)\,\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

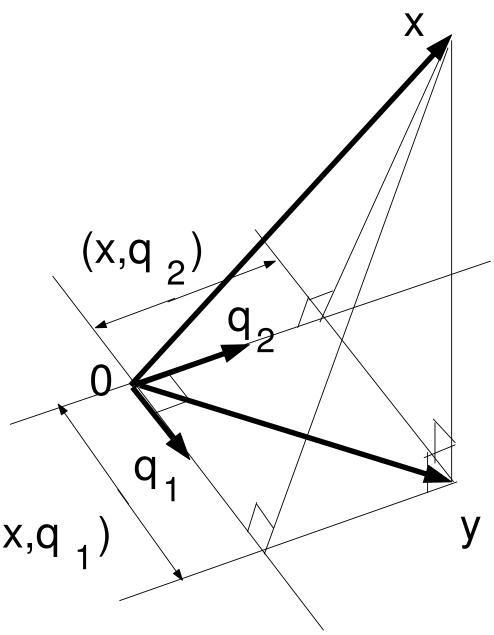
より，

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$$

と行列表示を得る．$f$ の標準基底における表現行列は

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる．




**問 4.98 (射影変換の像と階数)** $\mathrm{Im}\,(f) = H$, $\mathrm{rank}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2$ となることを示せ.

**問 4.99 (射影変換の格と退化次数)** 平面 (☆) の法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ である．$N = \langle \boldsymbol{n} \rangle$ とおく．$\mathrm{Ker}\,(f) = N$, $\mathrm{null}(f) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$ となることを示せ.

**注意 4.100 (射影変換の正則性)** $\det(A) = 0$ であり $A^{-1}$ は存在しない．よって射影変換 $f$ は正則変換ではない．例えば $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{n}$ $(\forall c \in \mathbb{R})$ に対して $f : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となる．直線上のすべての点が原点 $\boldsymbol{0}$ に写されるので，逆元 $f^{-1}(\boldsymbol{0})$ は存在しない.

**問 4.101 (射影変換の表現行列とべき等行列)** $A^2 = A$ が成り立つことを示せ.

**注意 4.102 (射影変換の表現行列とべき等行列)** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して射影変換 $f$ を作用させると，$f : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となる．$\boldsymbol{y}$ は平面 $H$ 上にあり $\boldsymbol{y} \in H$ である．$\boldsymbol{y}$ に対してさらに $f$ を作用させると $f : \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y} = A(A\boldsymbol{x}) = A^2\boldsymbol{x}$ となる．$\boldsymbol{y}$ は既に平面 $H$ 上にあるので $f$ により動かない．よって $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ であるから，$A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ となる．任意の $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つので，$A^2 = A$ を得る．$A^2 = A$ をみたす行列を**べき等行列**という．一般にべき等行列を表現行列にもつ線形変換は射影変換となる.

**注意 4.103 (射影変換における直交補空間)** $\dim(H) = 2, \dim(N) = 1$ であることと，$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ が 1 次独立であり $H \cap N = \{\boldsymbol{0}\}$ となることから，

$$\mathbb{R}^3 = H \oplus N$$

を得る．さらに，$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{q}_2$ であるから，$H$ と $N$ は互いに $\mathbb{R}^3$ における直交補空間となる.

$$H = N^{\perp}, \qquad N = H^{\perp}$$

である.

**注意 4.104 (射影変換の固有値空間)** $\boldsymbol{x} \in H$ のとき，$\boldsymbol{x}$ は既に平面 $H$ 上にあるので，射影変換 $f$ により動くことはない．すなわち，

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

が成り立つ．これは固有値 $\lambda = 1$ の固有方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ とみなせる．または，変換 $f$ によりベクトル $\boldsymbol{x}$ のスカラー $\lambda = 1$ 倍に写されるともみなせる．すべての $\boldsymbol{x} \in H$ に対して成り立つので，$H$ は固有空間 $W(1; f)$ と等しい．また，$\mathbb{R}^3 = H \oplus N$ より $\mathbb{R}^3$ は $H$ と $N$ に直和分解される．$H = W(1; f)$ であるから，$N$ も固有空間 $W(\lambda'; f)$ となる（はずである）．$\boldsymbol{x} \in N$ のとき，平面 $H$ の原点 $\mathbf{0}$ を通る法線上に $\boldsymbol{x}$ があるので，$\boldsymbol{x}$ は射影変換 $f$ により原点 $\mathbf{0}$ に写される．これは，変換 $f$ によりベクトル $\boldsymbol{x}$ のスカラー $\lambda' = 0$ 倍に写されるともみなせる．よって，$N = W(0; \lambda)$ となる（はずである）．

**問 4.105 (射影変換の固有値空間)** $f$ の固有空間を具体的に求めて，$H = W(1; f)$, $N = W(0; f)$ が成り立つことを示せ．

## 4.23 直線の線形変換

**問 4.106 (直線の線形変換)** 直線 $y = 2x - 1$ を線形変換

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

で写してできる直線を求めよ．また，$f$ で動かない点を求めよ．

**問 4.107 (直線の線形変換)** 線形変換

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

は直線 $y = \alpha x + \beta$ をある 1 点に写すとする．このとき $a, b, c, d$ の条件を求めよ．また，その点を求めよ．

**注意 4.108 (直線の線形変換)** 線形変換 $f : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ により，直線を直線へ写すときは

$$\mathrm{rank}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$$

である．直線を 1 点へ写すときは

$$\mathrm{rank}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$$

である．

## 4.24 演習問題 〜 射影変換

**問 4.109 (点の平面への射影)** 次の平面への射影変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の表現行列を求めよ．

$$(1) \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \qquad (2) \quad -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0$$

# 5　固有値問題

## 5.1　線形変換で向きが変わらないベクトル

線形変換 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ を考える．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}^T$ のとき

$$\boldsymbol{y}=f\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

となり，元のベクトルから向きを変えず 3 倍のベクトルに写させる．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}^T$ のときでは

$$\boldsymbol{y}=f\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

となり，元のベクトルから向きを変えず 2 倍のベクトルに写させる．その他のベクトルでは写されたベクトルとの向きが変わる．例えば $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}^T$ のときでは

$$\boldsymbol{y}=f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

となり，元のベクトルと向きが変わる．

同様に他の線形変換 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&2\\2&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ の場合を考える．このとき

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}=f\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{y}=f\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\\
&\boldsymbol{y}=f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\\
&\boldsymbol{y}=f\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{y}=f\left(\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる．ベクトル $\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}^T$ は向きを変えず元のベクトルの 2 倍のベクトルに写される．ベクトル $\begin{bmatrix}1&-2\end{bmatrix}^T$ は向きを変えず元のベクトルの $-3$ 倍のベクトルに写される．その他のベクトルは元のベクトルに対して向きを変える．

線形変換には向きを変えないベクトルが存在する．そのベクトルは線形変換それぞれに対して**固有**に定まる．このベクトルのことを**固有ベクトル**という．また，定数倍の定数のことを**固有値**という．

## 5.2　固有値と固有ベクトル

**定義 5.1 (固有値問題)** $K\ (=\mathbb{R},\mathbb{C})$ 上のベクトル空間 $V$ における線形変換 $f:V\to V$ が方程式

$$(\text{☆})\qquad f(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}\neq 0,\quad \lambda\in K$$

をみたすとする．このとき $\lambda$ を $f$ の**固有値（eigenvalue）**といい，$\boldsymbol{x}$ を固有値 $\lambda$ に属する $f$ の**固有ベクトル（eigenvector）**という．また，方程式 (☆) を**固有方程式（eigen-equation）**といい，この方程式の固有値と固有ベクトルを求める問題を**固有値問題（eigen-problem）**という．

**注意 5.2 (固有値問題)** 線形変換 $f$ は必ず $f(\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ をみたすので，零ベクトル $\mathbf{0}$ は線形変換 $f$ によって自分自身のスカラー $\lambda$ 倍に写される．このとき $\lambda$ は任意である．よって $\mathbf{0}$ は固有ベクトルと定義しない．

**例 5.3 (固有値，固有ベクトルの具体例)** 線形変換 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える．ただし，

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

とする．このとき $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2$ を代入すると

$$f(\boldsymbol{e}_1) = A\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{e}_1, \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = A\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}_2$$

が成り立つ．よって線形変換 $f$ の固有値は 3 と 2 である．固有値 3 に属する $f$ の固有ベクトルは $\boldsymbol{e}_1$ であり，固有値 2 に属する $f$ の固有ベクトルは $\boldsymbol{e}_2$ である．

**例 5.4 (固有値，固有ベクトルの具体例)** 線形変換 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える．ただし，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

とする．このとき $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を代入すると

$$f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{p}_1$$

が成り立つ．よって 4 は線形変換 $f$ の固有値である．$\boldsymbol{p}_1$ は固有値 2 に属する $f$ の固有ベクトルである．次に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を代入すると

$$f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -3\boldsymbol{p}_2$$

が成り立つ．よって $-3$ は線形変換 $f$ の固有値である．$\boldsymbol{p}_2$ は固有値 $-3$ に属する $f$ の固有ベクトルである．

## 5.3 固有空間

**注意 5.5 (固有ベクトルの定数倍の任意性)** 線形変換 $f$ の固有値を $\lambda$ とし，固有値 $\lambda$ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_0$ とする．つまり $f(\boldsymbol{u}_0) = \lambda\boldsymbol{u}_0$ が成り立つ．このとき，$\boldsymbol{u}_0$ の定数 $c\,(\neq 0)$ 倍のベクトル $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{u}_0$ を考える．ベクトル $\boldsymbol{u}$ もまた $\lambda$ に属する $f$ の固有ベクトルとなる．なぜなら，

$$f(\boldsymbol{u}) = f(c\boldsymbol{u}_0) = c\,f(\boldsymbol{u}_0) = c\,(\lambda\boldsymbol{u}_0) = \lambda\,(c\boldsymbol{u}_0) = \lambda\boldsymbol{u}$$

が成り立つからである．これより固有ベクトルには定数倍に任意性がある．

**定義 5.6 (固有空間)** ベクトル空間 $V$ における線形変換 $f : V \to V$ の固有値を $\lambda$ とする．このとき

$$W(\lambda; f) = \{\, \boldsymbol{u} \in V \mid f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u} \,\}$$

を $f$ の固有値 $\lambda$ の**固有空間（eigenspace）**という．

**注意 5.7 (固有空間)** 固有ベクトルは $\mathbf{0}$ を除外しているが，固有空間では $\mathbf{0}$ を含むことに注意する．

**定理 5.8 (固有空間は部分空間)** 固有空間 $W(\lambda; f)$ は $V$ の部分空間である．

（証明） (i) $f(\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0} \in W(\lambda; f)$ となる．(ii) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W(\lambda; f)$ のとき $f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$, $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ が成り立つ．このとき $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対して

$$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$$

が成り立つので $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W(\lambda; f)$ となる．(iii) $\boldsymbol{u} \in W(\lambda; f)$ のとき $f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ が成り立つ．このとき $c \in K$ に対して

$$f(c\boldsymbol{u}) = cf(\boldsymbol{u}) = c(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda(c\boldsymbol{u})$$

が成り立つので $c\boldsymbol{u} \in W(\lambda; f)$ となる．以上より (i), (ii), (iii) が成り立つので $W(\lambda; f)$ は $V$ の部分空間である．

## 5.4　行列の固有値

線形変換 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ に関する固有値 $\lambda$ を定める．固有方程式は $f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ より

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

となる．これを変形して

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0$$

となる．同次系であるから自明な解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を必ずもつが，零ベクトルは固有ベクトルとはならない．よって同次方程式は非自明な解をもたなければならない．つまり任意定数を含む解をもてばよいので，

$$\operatorname{rank}(\lambda E - A) < n$$

であればよい．これと必要十分な条件は

$$(☆) \qquad \det(\lambda E - A) = 0$$

である．方程式 (☆) により固有値 $\lambda$ が定まる．(☆) を**固有方程式（eigen-equation）**または**特性方程式（characteristic equation）**という．

**定義 5.9 (固有多項式)** 正方行列 $A$ に対して

$$g_A(t) = \det(tE - A)$$

を行列 $A$ の**固有多項式（eigen-polynomial）**または**特性多項式（characteristic polynomial）**という．

**定義 5.10 (行列の固有値)** 行列 $A$ に対する固有多項式 $g_A(t)$ の根を（複素数も含めて）**行列 $A$ の固有値**という．

**注意 5.11 (行列の固有値の個数)** 正方行列 $A : n \times n$ の固有値の個数は重複を別のもととして数えると $n$ 個である．

**定理 5.12 (線形変換の固有値と行列の固有値)** $\lambda$ が線形変換 $f$ の固有値であることと，$g_A(\lambda) = 0$ が成り立つこととは，必要十分条件である．

**例 5.13 (行列の固有値の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

の固有多項式は

$$\begin{aligned} g_A(t) &= \det(tE - A) = \det\left(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} t-7 & 6 \\ -3 & t+2 \end{vmatrix} \\ &= t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4) \end{aligned}$$

である．よって $A$ の固有値は $g_A(\lambda) = 0$ より $\lambda = 1$ と $\lambda = 4$ である．

線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の固有値は $\lambda = 1$ と $\lambda = 4$ である．

**例 5.14 (行列の固有値の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \det\left(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

である．よって $A$ の固有値は $g_A(\lambda) = 0$ より $\lambda = i$ と $\lambda = -i$ である．

線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の固有値は存在しない．しかし，線形変換 $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の固有値は $\lambda = i$ と $\lambda = -i$ である．

## 5.5 $\mathbb{R}^2$ における線形変換の固有空間

**例 5.15 (線形変換の固有空間の具体例)** 線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の固有空間を求める．ただし，

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

とする．まず，固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-8 & 10 \\ -5 & t+10 \end{vmatrix} = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$$

である．よって $g_A(\lambda)=0$ より固有値は $\lambda=-2,3$ である．

固有ベクトルをそれぞれ求める．$\lambda=-2$ のとき $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=0$ より方程式 $(-2E-A)\boldsymbol{x}=0$ をみたす $\boldsymbol{x}$ を求める．行列 $-2E-A$ を簡約化すると

$$-2E-A=\begin{bmatrix}-10 & 10\\ -5 & 5\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

となる．これより $x_1-x_2=0$ であるから解は

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=c\,\boldsymbol{u}_1$$

となる．ただし $c$ は任意定数である．よって $\lambda=-2$ に属する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{u}_1$ $(c\neq 0)$ である．また，固有空間は固有ベクトル全体の集合に $\mathbf{0}$ を加えたものであるから，

$$W(-2;f)=\{\, c\boldsymbol{u}_1 \mid c\in\mathbb{R}\,\}=\langle \boldsymbol{u}_1\rangle$$

となる．

$\lambda=3$ のとき $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=0$ より方程式 $(3E-A)\boldsymbol{x}=0$ をみたす $\boldsymbol{x}$ を求める．行列 $3E-A$ を簡約化すると

$$3E-A=\begin{bmatrix}-5 & 10\\ -5 & 5\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

となる．これより $x_1-2x_2=0$ であるから解は

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_2\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c\\ c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=c\,\boldsymbol{u}_2$$

となる．ただし $c$ は任意定数である．よって $\lambda=3$ に属する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{u}_2$ $(c\neq 0)$ である．また，固有空間は固有ベクトル全体の集合に $\mathbf{0}$ を加えたものであるから，

$$W(3;f)=\{\, c\boldsymbol{u}_2 \mid c\in\mathbb{R}\,\}=\langle \boldsymbol{u}_2\rangle$$

となる．

固有空間 $W(-2;f)$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_1\}$ であり $\dim(W(-2;f))=1$ となる．固有空間 $W(3;f)$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_2\}$ であり $\dim(W(3;f))=1$ となる．また，

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

より $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ は 1 次独立であるから，

$$W(-2;f)\cap W(3;f)=\langle \boldsymbol{u}_1\rangle\cap\langle \boldsymbol{u}_2\rangle=\{\mathbf{0}\}$$

となる．よって，

$$\begin{gathered}W(-2;f)\oplus W(3;f)=\langle \boldsymbol{u}_1\rangle\oplus\langle \boldsymbol{u}_2\rangle=\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\rangle=\mathbb{R}^2,\\ \dim(W(-2;f))+\dim(W(3;f))=\dim(\mathbb{R}^2)\end{gathered}$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^2$ は $W(-2;f)$ と $W(3;f)$ に直和分解される．$\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底となる．

標準基底 $\Sigma=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ に関する $f$ の表現行列は $A$ である．基底 $\Sigma'=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ に関する $f$ の表現行列を求める．$\Sigma,\Sigma'$ の座標を $(x_1,x_2)_\Sigma$, $(x_1',x_2')_{\Sigma'}$ とすると，

$$x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2=x_1'\boldsymbol{u}_1+x_2'\boldsymbol{u}_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}=P\boldsymbol{x}',\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

と座標変換が得られる．これを用いて，線形変換 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ を座標変換すると

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}\quad\Rightarrow\quad P\boldsymbol{y}'=AP\boldsymbol{x}'\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{y}'=P^{-1}AP\boldsymbol{x}'\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{y}'=D\boldsymbol{x}',\quad D=P^{-1}AP$$

と表される．よって，基底 $\Sigma'=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ に関する $f$ の表現行列は

$$D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}8&-10\\5&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

となる．また，あらたな座標 $(x_1',x_2')_{\Sigma'}$ のもとでの $f$ は $\boldsymbol{y}'=D\boldsymbol{x}'$ より

$$f:\,(x_1',x_2')\mapsto(y_1',y_2');\quad y_1'=-2x_1',\quad y_2'=x_2'$$

と表される．

## 5.6 $\mathbb{R}^3$ における線形変換の固有空間

**例 5.16 (線形変換の固有空間の具体例)** 線形変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$; $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ の固有空間を求める．ただし，

$$A=\begin{bmatrix}5&6&0\\-1&0&0\\1&2&2\end{bmatrix}$$

とする．まず，固有多項式は

$$g_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t-5&-6&0\\1&t&0\\-1&-2&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-3)$$

である．よって $g_A(\lambda)=0$ より固有値は $\lambda=3$, $\lambda=2$ (2 個) である．$\lambda=3$ のとき

$$\lambda E-A=3E-A=\begin{bmatrix}-2&-6&0\\1&3&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

より，固有空間は

$$W(3;f)=\{\,c\boldsymbol{u}_1\mid c\in\mathbb{R}\,\}=\langle\boldsymbol{u}_1\rangle,\qquad \boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$$

となる．$\lambda = 2$ のとき

$$\lambda E - A = 2E - A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，固有空間は

$$W(2; f) = \{\, c_1\boldsymbol{u}_2 + c_2\boldsymbol{u}_3 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,\} = \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる．

$W(3; f)$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_1\}$ であり $\dim(W(3; f)) = 1$ となる．$W(2; f)$ の基底は $\{\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ であり $\dim(W(2; f)) = 2$ となる．また,

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

より $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は 1 次独立であり,

$$W(3; f) \cap W(2; f) = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle \cap \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = \{\boldsymbol{0}\}$$

であるので,

$$\begin{aligned} &W(3; f) \oplus W(2; f) = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle = \mathbb{R}^3, \\ &\dim(W(3; f)) + \dim(W(2; f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^3$ は $W(3; f)$ と $W(2; f)$ に直和分解される．$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる．

標準基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関する $f$ の表現行列は $A$ である．基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ に関する $f$ の表現行列を求める．$\Sigma$, $\Sigma'$ の座標を $(x_1, x_2, x_3)_\Sigma$, $(x_1', x_2', x_3')_{\Sigma'}$ とすると,

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x_1'\boldsymbol{u}_1 + x_2'\boldsymbol{u}_2 + x_3'\boldsymbol{u}_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と座標変換が得られる．これを用いて，線形変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を座標変換すると

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad P\boldsymbol{y}' = AP\boldsymbol{x}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}' = P^{-1}AP\boldsymbol{x}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}' = D\boldsymbol{x}', \quad D = P^{-1}AP$$

と表される．よって，基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ に関する $f$ の表現行列は

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

となる．また，あらたな座標 $(x_1', x_2', x_3')_{\Sigma'}$ のもとでの $f$ は $\boldsymbol{y}' = D\boldsymbol{x}'$ より

$$f : (x_1', x_2', x_3') \mapsto (y_1', y_2', y_3'); \quad y_1' = 3x_1', \quad y_2' = 2x_1', \quad y_3' = 2x_3'$$

と表される．

### 5.7　一般の線形変換の固有値と固有空間

**定義 5.17 (一般の線形変換の固有多項式)** ベクトル空間 $V$ の基底を $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ とする．この基底における線形変換 $f:V\to V$ の表現行列を $A$ とする．すなわち，

$$(f(\boldsymbol{u}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,A$$

とする．このとき行列 $A$ の固有多項式 $g_A(t)$ を**線形変換 $f$ の固有多項式**といい，$g_f(t)$ と表記する．

**定理 5.18 (一般の線形変換の固有多項式)** 線形変換 $f$ の固有多項式 $g_f(t)$ は基底の取り方に依存しない．

（証明）　基底を取り換えて表現行列が $A$ か $B$ にかわるととする．このとき基底の変換行列を $P$ とすると

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つ．これを用いて

$$\begin{aligned} g_B(t) &= \det(tE-B) = \det(tE-P^{-1}AP) = \det(tP^{-1}EP-P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(tE-A)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(tE-A)\det(P) = \det(P^{-1})\det(P)\det(tE-A) \\ &= \frac{1}{\det(P)}\det(P)\det(tE-A) = \det(tE-A) = g_A(t) \end{aligned}$$

を得る．

**定理 5.19 (一般の線形変換の固有値)**

$$\lambda \text{ は線形変換 } f \text{ の固有値} \qquad \Leftrightarrow \qquad g_f(\lambda)=0$$

（証明）　基底を $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ とし，固有値を $\lambda$，固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする．このとき

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u} \quad &\Leftrightarrow \quad f(c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{u}_n) = \lambda(c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{u}_n) \\ &\Leftrightarrow \quad c_1f(\boldsymbol{u}_1)+\cdots+c_nf(\boldsymbol{u}_n) = \lambda\,(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad (f(\boldsymbol{u}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n))\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \lambda\,(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{c} \\ &\Leftrightarrow \quad (f(\boldsymbol{u}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{u}_n))\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,(\lambda\boldsymbol{c}) \\ &\Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\ )\,A\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n)\,(\lambda\boldsymbol{c}) \quad \Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

となる．よって $f$ の固有値と行列 $A$ の固有値は等しい．

## 5.8 $\mathbb{R}[x]_2$ における線形変換の固有空間

**例 5.20 (多項式の空間における固有値問題の具体例)** 線形変換 $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$;

$$g(x) = F(f(x)) = f(1+2x)$$

の固有値，固有空間を求める．

まず，線形変換 $F$ の表現行列 $A$ を求める．基底 $\Sigma = \{1,\ x,\ x^2\}$ のもとで多項式 $f(x)$, $g(x)$ の座標を $(a_0, a_1, a_2)_\Sigma$, $(b_0, b_1, b_2)_\Sigma$ として表すと，

$$(\triangle) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} \boldsymbol{a},$$

$$(\blacktriangle) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} \boldsymbol{b}$$

と書ける．このとき，$f$ を $F$ で写すと

$$\begin{aligned} g(x) &= F(f(x)) = F(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 F(1) + a_1 F(x) + a_2 F(x^2) \\ &= \begin{pmatrix}F(1), & F(x), & F(x^2)\end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix}F(1), & F(x), & F(x^2)\end{pmatrix} \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}F(1), & F(x), & F(x^2)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1, & 1+2x, & (1+2x)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1+2x, & 1+4x+4x^2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} A \end{aligned}$$

であるから，代入すると

$$(☆) \qquad g(x) = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} A\boldsymbol{a}$$

が得られる．$A$ が $F$ の基底 $\Sigma$ に関する表現行列である．また，この結果は

$$\begin{aligned} g(x) &= F(f(x)) = f(1+2x) = a_0 + a_1(1+2x) + a_2(1+2x)^2 \\ &= (a_0 + a_1 + a_2) + (2a_1 + 4a_2)x + 4a_2 x^2 \\ &= \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 \\ 2a_1 + 4a_2 \\ 4a_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix} A\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

としても得られる．($\blacktriangle$) と (☆) より，線形変換 $F$ は

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \qquad \boldsymbol{b} = \varphi(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$$

により定義される線形変換 $\varphi$ と等価である．

次に $F$ の固有値を求める．$F$ に関する固有方程式は $F(f)=\lambda f$ である．(☆) と (△) を用いると

$$g(x)=F(f(x))=\begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix}A\boldsymbol{a}, \qquad \lambda f(x)=\begin{pmatrix}1, & x, & x^2\end{pmatrix}(\lambda\boldsymbol{a})$$

と表されるので，固有方程式は

$$(◎) \qquad A\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$$

と等価である．つまり行列 $A$ に関する固有値問題を解けばよい．$F$ の固有多項式 $g_F(t)$ と $A$ の固有多項式 $g_A(t)$ は等しく，

$$g_F(t)=g_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t-1 & -1 & -1\\ 0 & t-2 & -4\\ 0 & 0 & t-4\end{vmatrix}=(t-1)(t-2)(t-4)$$

となる．$g_F(\lambda)=0$ より固有値は $\lambda=1,2,4$ である．

$F$ の固有空間を求める．固有方程式 (◎) より $\varphi$ の固有ベクトル $\boldsymbol{a}$ を定め，その後 (△) に代入し $F$ の固有ベクトル $f(x)$ を定めればよい．$\lambda=4$ のとき，

$$4E-A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

となるので，$a_1-a_3=0,\ a_2-2a_3=0$ より，$A$ の $\lambda=4$ に関する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_3\\ 2a_3\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ 2c\\ c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix} \qquad (c\neq 0)$$

と得られる．よって $F$ の $\lambda=4$ に関する固有空間は

$$W(4;F)=\left\{\, c(1+2x+x^2) \;\middle|\; c\in\mathbb{R}\,\right\}=\left\langle 1+2x+x^2\right\rangle=\langle f_1\rangle$$

となる．$\lambda=2$ のとき，

$$2E-A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

となるので，$a_1-a_2=0,\ a_3=0$ より，$A$ の $\lambda=2$ に関する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2\\ a_2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ c\\ 0\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \qquad (c\neq 0)$$

と得られる．よって $F$ の $\lambda=2$ に関する固有空間は

$$W(2;F)=\{\, c(1+x) \mid c\in\mathbb{R}\,\}=\langle 1+x\rangle=\langle f_2\rangle$$

となる．$\lambda=1$ のとき，

$$E-A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

となるので，$a_2=0,\ a_3=0$ より，$A$ の $\lambda=1$ に関する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\0\\0\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\qquad (c\neq 0)$$

と得られる．よって $F$ の $\lambda=1$ に関する固有空間は

$$W(1;F)=\{\ c\mid\ c\in\mathbb{R}\ \}=\langle 1\rangle=\langle f_3\rangle$$

となる．

固有空間 $W(4),\ W(2),\ W(1)$ のそれぞれの基底は $\{f_1\},\ \{f_2\},\ \{f_3\}$ である．これらは

$$(\ast)\qquad (f_1,\ f_2,\ f_3)=\big(1+2x+x^2,\ 1+x,\ 1\big)=\big(1,\ x,\ x^2\big)\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\big(1,\ x,\ x^2\big)\,P$$

と表される．$\det(P)=1\neq 0$ より $\{f_1,f_2,f_3\}$ は 1 次独立となる．よって，

$$\begin{aligned}&W(4)\cap W(2)=\langle f_1\rangle\cap\langle f_2\rangle=\{\mathbf{0}\},\quad W(4)\cap W(1)=\langle f_1\rangle\cap\langle f_3\rangle=\{\mathbf{0}\},\\&W(2)\cap W(1)=\langle f_2\rangle\cap\langle f_3\rangle=\{\mathbf{0}\}\end{aligned}$$

となり，

$$W(4)\oplus W(2)\oplus W(1)=\langle f_1\rangle\oplus\langle f_2\rangle\oplus\langle f_3\rangle=\langle f_1,\ f_2,\ f_3\rangle=\mathbb{R}[x]_2$$

が成り立つ．$\mathbb{R}[x]_2$ は $W(4),\ W(2),\ W(1)$ に直和分解される．$\{f_1,f_2,f_3\}$ は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底となる．

線形変換 $F$ の基底 $\Sigma=\{1,\ x,\ x^2\}$ における表現行列は $A$ である．基底 $\Sigma'=\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ における $F$ の表現行列を求める．基底 $\Sigma'$ における $f$ の座標を $(\tilde{a}_0,\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)_{\Sigma'}$ とすると，基底変換 $(\ast)$ を用いて，

$$\begin{aligned}&f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2=\tilde{a}_1\,f_1(x)+\tilde{a}_2\,f_2(x)+\tilde{a}_3\,f_3(x)\\&\Rightarrow\quad \big(1,\ x,\ x^2\big)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=(f_1,\ f_2,\ f_3)\begin{bmatrix}\tilde{a}_1\\\tilde{a}_2\\\tilde{a}_3\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \big(1,\ x,\ x^2\big)\,\boldsymbol{a}=(f_1,\ f_2,\ f_3)\,\tilde{\boldsymbol{a}}\\&\Rightarrow\quad \big(1,\ x,\ x^2\big)\,\boldsymbol{a}=\big(1,\ x,\ x^2\big)\,P\tilde{\boldsymbol{a}}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=P\tilde{\boldsymbol{a}}\end{aligned}$$

と表される．$\boldsymbol{a}=P\tilde{\boldsymbol{a}}$ は $\Sigma$ から $\Sigma'$ への座標変換である．$g$ の $\Sigma'$ における座標を $(\tilde{b}_0,\tilde{b}_1,\tilde{b}_2)_{\Sigma'}$ とすると，同様にして $\boldsymbol{b}=P\tilde{\boldsymbol{b}}$ が成り立つ．線形変換 $F$ は線形変換 $\varphi:\ \boldsymbol{b}=A\boldsymbol{a}$ と等価であるから，$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{a}$ に座標変換 $\boldsymbol{a}=P\tilde{\boldsymbol{a}},\ \boldsymbol{b}=P\tilde{\boldsymbol{b}}$ を代入して

$$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{a}\quad\Rightarrow\quad P\tilde{\boldsymbol{b}}=AP\tilde{\boldsymbol{a}}\quad\Rightarrow\quad \tilde{\boldsymbol{b}}=P^{-1}AP\tilde{\boldsymbol{a}}\quad\Rightarrow\quad \tilde{\boldsymbol{b}}=D\tilde{\boldsymbol{a}},\quad D=P^{-1}AP$$

を得る．基底 $\Sigma'=\{f_1,\ f_2,\ f_3\}=\{1+2x+x^2,\ 1+x,\ 1\}$ に関する $F$ の表現行列は

$$D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

となる．

**注意 5.21 (一般のベクトル空間の固有値問題)** 一般のベクトル空間における固有値問題は数ベクトル空間 ($\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$) における固有値問題に還元して議論すればよい．上の例題では次のように同一視を行った：

$$
\begin{array}{rcl}
\text{線形変換 } F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2 & \Leftrightarrow & \text{線形変換 } \varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \\
\text{線形変換 } g=F(f) & \Leftrightarrow & \text{線形変換 } \boldsymbol{b}=\varphi(\boldsymbol{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{線形変換 } \boldsymbol{b}=A\boldsymbol{a} \\
f(x) & \Leftrightarrow & \boldsymbol{a} \\
g(x) & \Leftrightarrow & \boldsymbol{b} \\
F \text{ の表現行列 } A & = & \varphi \text{ の表現行列 } A \\
\text{固有方程式 } F(f)=\lambda f & \Leftrightarrow & \text{固有方程式 } \varphi(\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad \text{固有方程式 } A\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a} \\
F \text{ の固有多項式 } g_F(t) & = & \varphi \text{ の固有多項式 } g_\varphi(t) \quad = \quad A \text{ の固有多項式 } g_A(t) \\
F \text{ の固有値 } \lambda & = & \varphi \text{ の固有値 } \lambda \quad = \quad A \text{ の固有値 } \lambda \\
\text{固有空間 } W(\lambda;F) & \Leftrightarrow & \text{固有空間 } W(\lambda;\varphi)
\end{array}
$$

**注意 5.22 (一般のベクトル空間における線形変換)** どのようなベクトル空間における線形変換であっても行列 $A$ と同一視すればよい．

## 5.9 固有多項式とトレース

**定義 5.23 (トレース)** 行列 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ に対して

$$\mathrm{tr}\,(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

を $A$ の**トレース（trace）**という．

**定理 5.24 (固有多項式とトレース)** 行列 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ の固有値が $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ であるとする．このとき，

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}\,(A),\qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det(A)$$

が成り立つ．

（証明） 固有値は $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ であるから，

$$
\begin{aligned}
g_A(\lambda)&=\det(\lambda E-A)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\
&=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一方，

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, (\lambda\delta_{1k_1} - a_{1k_1})(\lambda\delta_{2k_1} - a_{2k_2}) \cdots (\lambda\delta_{nk_1} - a_{nk_n}) \\
&= \lambda^n \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \left(\gamma^{1,2,\cdots,n}_{k_1 k_2 \cdots k_n}\right) \\
&\qquad - \lambda^{n-1} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \left(a_{1k_1}\gamma^{2,3,\cdots,n}_{k_2 k_3 \cdots k_n} + a_{2k_2}\gamma^{1,3,\cdots,n}_{k_1 k_3 \cdots k_n} + \cdots + a_{nk_n}\gamma^{1,2,\cdots,n-1}_{k_2 k_3 \cdots k_{n-1}}\right) \\
&\qquad\qquad \cdots + (-1)^n \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma (a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}) \\
&= \lambda^n - \lambda^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + \cdots + (-1)^n \det(A)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，

$$\gamma^{i,k,m,\cdots}_{j,l,n\cdots} = \delta_{i,j}\delta_{k,l}\delta_{m,n}\cdots$$

とおいた．以上より $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ を得る．

**注意 5.25 (固有多項式)** $A$ の固有多項式は

$$g_A(t) = t^n - \operatorname{tr}(A)\, t^{n-1} + \bigcirc\, t^{n-2} + \cdots + \triangle\, t^2 + \square\, t + \det(A)$$

と表される．

## 5.10　ケイリー・ハミルトンの定理

**定義 5.26 (行列の多項式)** $f(t)$ を多項式

$$f(t) = a_m\, t^m + a_{m-1}\, t^{m-1} + \cdots + a_1\, t + a_0$$

とする．このとき正方行列 $A$ に対して $f(A)$ を

$$f(A) = a_m\, A^m + a_{m-1}\, A^{m-1} + \cdots + a_1\, A + a_0\, E$$

と定義する．

**定理 5.27 (ケイリー・ハミルトンの定理)** 正方行列 $A$ の固有多項式を $g_A(t)$ とする．このとき

$$g_A(A) = O$$

が成り立つ．これを**ケイリー・ハミルトン（Caley-Hamilton）の定理**という．

**例 5.28 (ケイリー・ハミルトンの定理の使用例)** 正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

の固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ 3 & t+4 \end{vmatrix} = t^2 + 3t + 2$$

である．このときケイリー・ハミルトンの定理より

$$(\star) \qquad g_A(A) = A^2 + 3A + 2E = O$$

が成り立つ．これを用いて $A^{-1}$, $A^2$, $A^3$, $A^4$ を求める．$(\star)$ の両辺に $A^{-1}$ を左から掛けると

$$A + 3E + 2A^{-1} = O$$

となる．これを変形して

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}E = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

を得る．次に $(\star)$ を変形して

$$(\flat) \qquad A^2 = -3A - 2E = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

を得る．さらに $(\flat)$ を用いて

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 = A(-3A-2E) = -3A^2 - 2A = -3(-3A-2E) - 2A = 7A + 6E = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ -21 & -22 \end{bmatrix}, \\ A^4 &= AA^3 = A(7A+6E) = 7A^2 + 6A = 7(-3A-2E) + 6A = -15A - 14E = \begin{bmatrix} -29 & -30 \\ 45 & 46 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る．

**問 5.29 (ケイリー・ハミルトンの定理の使用例)** この例題において $A^n$ を求めよ．

（答え）　まず

$$A^n = \alpha_n\, A + \beta_n\, E$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = A(\alpha_n A + \beta_n E) = \alpha_n\, A^2 + \beta_n\, A = \alpha_n\,(-3A - 2E) + \beta_n\, A \\ &= (-3\alpha_n + \beta_n)A - 2\alpha_n\, E = \alpha_{n+1}\, A + \beta_{n+1}\, E \end{aligned}$$

となる．よって漸化式

$$\alpha_2 = -3, \qquad \beta_2 = -2, \qquad \alpha_{n+1} = -3\alpha_n + \beta_n, \qquad \beta_{n+1} = -2\alpha_n \qquad n = 2, 3, 4, \cdots$$

を得る．これは漸化式

$$\alpha_2 = -3, \qquad \alpha_3 = 7, \qquad \alpha_{n+1} + 3\alpha_n + 2\alpha_{n-1} = 0, \qquad n = 3, 4, \cdots$$

とも表される．この一般項は

$$\alpha_n = (-1)^n - (-2)^n$$

となる．よって

$$\begin{aligned} A^n = \alpha_n A - 2\alpha_{n-1}E &= \begin{bmatrix} \alpha_n - 2\alpha_{n-1} & 2\alpha_n \\ -3\alpha_n & -4\alpha_n - 2\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3(-1)^{n-1} + 4(-2)^{n-1} & 2(-1)^n - 2(-2)^n \\ -3(-1)^n + 3(-2)^n & 2(-1)^{n-1} - 6(-2)^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る．

## 5.11　対角行列の固有値

**定理 5.30 (固有値)** 上三角行列

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{\huge 0} & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

下三角行列

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \text{\huge 0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

対角行列

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \text{\huge 0} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

の固有値はいずれも $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ である．

（証明）　$D$ の固有多項式は

$$g_D(t) = \det(tE - D) = \begin{vmatrix} t - a_{11} & & & \text{\huge 0} \\ & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & t - a_{nn} \end{vmatrix} = (t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn})$$

であり，$g_D(\lambda) = 0$ より固有値 $\lambda = a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ を得る．$L, U$ についても同様である．

## 5.12 演習問題 〜 固有値

**問 5.31 (固有値)** 次の行列の固有値とその固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(10) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ (11) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (13) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

**問 5.32 (固有空間)** 次の線形変換の固有値とその固有空間を求めよ．また，固有ベクトルを基底として選べるとき，この基底に関する線形変換の表現行列を求めよ．さらには，ベクトル空間が固有空間で直和分解されることを示せ．

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; 点 $\boldsymbol{x}$ と原点 $\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{x}$ との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$. (2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; 点 $\boldsymbol{x}$ から原点 $\boldsymbol{0}$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の直線への正射影と $\boldsymbol{x}$ との中点 $\boldsymbol{y}$ への変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$.

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; 点 $\boldsymbol{x}$ から平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ への正射影 $\boldsymbol{y}$ への射影変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$.

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ (5) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2;\ f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(6) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ (7) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(8) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4;\ f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ (9) $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2;\ F(f)(x) = \int_0^x f(y)\, dy$

(10) $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2;\ F(f)(x) = f'(x)$ (11) $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2;\ F(f)(x) = f''(x)$

(12) $F : \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}[x]_1;\ F(f)(x) = f(1-x)$ (13) $F : \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}[x]_1;\ F(f)(x) = f(2) + f(1)x$

(14) $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2;\ F(f)(x) = f(0) + xf'(x) + x^2 f''(x)$

(15) $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2;\ F(f)(x) = f(1-x) + f'(2-x) + f''(3-x)$

(16) $F : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3;\ F(f)(x) = f(x) + f'(1)(1+x) + f''(x) + f'''(2)(x+x^3)$

## 5.13 相似変換

**定理 5.33 (相似変換)** 行列 $A$ と行列 $B = P^{-1}AP$ との固有値は等しい．ただし $P$ はある正則行列とする．

（証明）

$$
\begin{aligned}
g_B(t) &= \det(tE-B) = \det(tE-P^{-1}AP) = \det(tP^{-1}EP-P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(tE-A)P) \\
&= \det(P^{-1})\det(tE-A)\det(P) = \det(P^{-1})\det(P)\det(tE-A) \\
&= \frac{1}{\det(P)}\det(P)\det(tE-A) = \det(tE-A) = g_A(t)
\end{aligned}
$$

となるので $B$ と $A$ の固有値は等しい．

**定義 5.34 (相似)** 正方行列 $A, B$ に対して $B = P^{-1}AP$ をみたすある正則行列 $P$ が存在するとき，$A$ と $B$ とは**相似（similar）**または**同値（equivalent）**であるという．

**定義 5.35 (相似変換)** 正方行列 $A$ がある正則行列 $P$ を用いて，正方行列

$$
B = P^{-1}AP
$$

へ変換されるとき，この変換 $A \mapsto B$ を**相似変換（similarity transformation）**または**同値変換（equivalent transformation）**という．

## 5.14 行列の対角化

**定義 5.36 (対角化)** 正方行列 $A$ を相似変換により対角行列 $D$ に変換することを**対角化**という．すなわち，

$$
D = P^{-1}AP
$$

をみたす対角行列 $D$ と正則行列 $P$ を定めることを対角化いう．

$D, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在するとき，$A$ は実数体上で対角化されるという．$D, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ が存在するとき，$A$ は複素数体上で対角化されるという．

**注意 5.37 (対角化)** 正方行列 $A$ は常に対角化可能とは限らない．

**注意 5.38 (対角化と固有値)** $D$ は $A$ の相似変換により定まるので両者の固有値は等しく，対角行列 $D = \begin{bmatrix} d_{ij}\delta_{ij} \end{bmatrix}$ の対角成分 $d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn}$ が固有値となる．なぜなら，

$$
g_A(t) = g_D(t) = \det(tE-D) = \begin{vmatrix} t-d_{11} & & & \text{\huge 0} \\ & t-d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & t-d_{nn} \end{vmatrix} = (t-d_{11})(t-d_{22})\cdots(t-d_{nn})
$$

となるからである．よって行列 $A$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると $D$ は

$$
D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}
$$

と表される．

**定義 5.39 (対角行列)** 対角行列

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

を省略記号として

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

と表す.

行列 $A$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする．ただし，重複する固有値は別のものとして考える．$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ とする．このとき固有方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より

$$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_2 = \lambda_2\boldsymbol{p}_2, \quad \cdots, \quad A\boldsymbol{p}_n = \lambda_n\boldsymbol{p}_n$$

が成り立つ．これを列ベクトルとして並べると

$$\begin{bmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = AP,$$

$$\begin{bmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{p}_1 & \lambda_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

となる．これより $AP = PD$ が成り立つ．$P$ が正則行列であれば左から $P^{-1}$ を掛けて

$$D = P^{-1}AP$$

が成り立つ．$P$ が正則行列となるための必要十分条件は $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が 1 次独立であることである．

**定理 5.40 (対角化)** 正方行列 $A$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とし，その固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ とする．$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が 1 次独立であるとき，$A$ は

$$D = P^{-1}AP, \qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \quad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

により対角化される．

**定理 5.41 (固有ベクトルの 1 次独立性)** 固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が互いに異なるとき，固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は 1 次独立である．

（証明）　$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ の 1 次独立なベクトルの最大個数を $r$ とする．$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r$ を 1 次独立とし，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{p}_{r+1}$ を 1 次従属とする．このとき

$$\boldsymbol{p}_{r+1} = c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{p}_r$$

と書ける．両辺に $A$ を掛けると

$$A\boldsymbol{p}_{r+1} = c_1A\boldsymbol{p}_1 + c_2A\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_rA\boldsymbol{p}_r$$
$$\lambda_{r+1}\boldsymbol{p}_{r+1} = c_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_r\lambda_r\boldsymbol{p}_r$$

となる．また，$\lambda_{r+1}$ を掛けると

$$\lambda_{r+1}\boldsymbol{p}_{r+1} = c_1\lambda_{r+1}\boldsymbol{p}_1 + c_2\lambda_{r+1}\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_r\lambda_{r+1}\boldsymbol{p}_r$$

となる．これらを差引すると

$$\begin{aligned}(\lambda_{r+1} - \lambda_{r+1})\boldsymbol{p}_{r+1} &= c_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1)\boldsymbol{p}_1 + c_2(\lambda_{r+1} - \lambda_2)\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_r(\lambda_{r+1} - \lambda_n)\boldsymbol{p}_r \\ \boldsymbol{0} &= c_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1)\boldsymbol{p}_1 + c_2(\lambda_{r+1} - \lambda_2)\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_r(\lambda_{r+1} - \lambda_r)\boldsymbol{p}_r\end{aligned}$$

を得る．これは $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r$ の 1 次関係である．$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r$ は 1 次独立であり，固有値は互いに異なる $\lambda_1 \neq \lambda_{r+1}$, $\lambda_2 \neq \lambda_{r+1}$, $\cdots$, $\lambda_r \neq \lambda_{r+1}$ ので，$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ となる．このとき $\boldsymbol{p}_{r+1} = \boldsymbol{0}$ である．固有値は零ベクトルとはならないので，条件は矛盾する．よって，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{p}_{r+1}$ は 1 次独立である．すべての $r = 1, 2, \cdots$ 対して成り立つので $r = n$ を得る．

## 5.15　2 次正方行列の対角化

**例 5.42 (対角化の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

を対角化する．

まず，行列 $A$ の固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-8 & 10 \\ -5 & t+7 \end{vmatrix} = (t+2)(t-3)$$

となるので，$g_A(\lambda) = 0$ より $A$ の固有値は $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ である．$\lambda = \lambda_1 = -2$ のとき

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$(-2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\,\boldsymbol{p}_1 \qquad (c \neq 0)$$

である．$\lambda = \lambda_2 = 3$ のとき

$$3E - A = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$(3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = c\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c\,\boldsymbol{p}_2 \qquad (c \neq 0)$$

である．

行列 $A$ を対角化する．$\lambda_1$ の固有ベクトルのひとつとして $\boldsymbol{p}_1$ を選び，$\lambda_2$ の固有ベクトルのひとつとして $\boldsymbol{p}_2$ を選ぶ．このとき

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく．$\det(P) = -1 \neq 0$ であるから，$P$ は正則である．よって，$A$ は

$$D = P^{-1}AP \tag{1}$$

と対角化される．

**問 5.43 (対角化の確認)** $D = P^{-1}AP$ が成立することを数値を代入して確認せよ．

**注意 5.44 (対角化と固有空間)** 線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の固有空間は

$$W(-2; f) = \{\, c\boldsymbol{p}_1 \mid c \in \mathbb{R} \,\} = \langle \boldsymbol{p}_1 \rangle, \qquad W(3; f) = \{\, c\boldsymbol{p}_2 \mid c \in \mathbb{R} \,\} = \langle \boldsymbol{p}_2 \rangle$$

である．$\dim(W(-2; f)) = 1$, $\dim(W(3; f)) = 1$, $W(-2; f) \cap W(3; f) = \{\boldsymbol{0}\}$ となるので，

$$W(-2; f) \oplus W(3; f) = \mathbb{R}^2, \qquad \dim(W(-2; f)) + \dim(W(3; f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^2$ は固有空間に直和分解される．$W(-2; f)$ の基底は $\{\boldsymbol{p}_1\}$，$W(3; f)$ の基底は $\{\boldsymbol{p}_2\}$，$\mathbb{R}^2$ の基底は $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ となる．

**問 5.45 (固有空間)** 固有空間 $W(-2; f)$ は原点を通り方向ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ の直線であり，$W(3; f)$ は原点を通り方向ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ の直線である．二つの直線のなす角度を求めよ．

## 5.16 対角化によるべき行列の計算

**例 5.46 (対角化の応用例)** 行列 $A$ が

$$D = P^{-1}AP$$

と対角化可能であるとする．このとき，左から $P$ を掛けて，右から $P^{-1}$ を掛けると

$$PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} \quad \Rightarrow \quad PDP^{-1} = EAE \quad \Rightarrow \quad PDP^{-1} = A \quad \Rightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

となる．これを用いるとべき行列 $A^k$ は

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \cdots (P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PDEDE \cdots EDP^{-1} \\ &= PDD \cdots DP^{-1} \\ &= PD^kP^{-1} \end{aligned}$$

と得られる．ここで $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ おくと，$D^k$ は

$$D^k = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & & & \text{\huge 0} \\ & {\lambda_2}^k & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & {\lambda_n}^k \end{bmatrix}$$

と表される．よって

$$A^k = P \begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & & & \text{\Large 0} \\ & {\lambda_2}^k & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & {\lambda_n}^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

となる．

**例 5.47 (べき行列の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

は

$$D = P^{-1}AP, \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

と対角化される．これより

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1}2^k + 2 \cdot 3^k & (-1)^k 2^{k+1} - 2 \cdot 3^k \\ (-1)^{k+1}2^k + 3^k & (-1)^k 2^{k+1} - 3^k \end{bmatrix}$$

を得る．

## 5.17　3 次正方行列の対角化

**例 5.48 (対角化の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

を対角化する．

　まず，行列 $A$ の固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-5 & -6 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ -1 & -2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-3)$$

であるから，固有値は $g_A(\lambda) = 0$ より $\lambda = 2$ (2 重)，3 となる．$\lambda = 2$ のとき，

$$2E - A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，$(2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 \qquad (c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0)$$

と得られる．$\lambda=3$ のとき，

$$3E-A=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

となるので，$(3E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を解いて固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3x_2\\ -x_2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3c\\ -c\\ c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=c\boldsymbol{p}_3 \qquad (c\neq 0)$$

と得られる．

行列 $A$ を対角化する．重複する固有値は別のものとして考えて，三つの固有値を $\lambda_1=2$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ とおく．それぞれの固有値に属する固有ベクトルを

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

と選ぶ．このとき，同じ固有値 $\lambda=2$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を選ぶときは，1 次独立となるよう選ぶ．以上より，

$$D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, \qquad P=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

とおくと，行列 $A$ は

$$D=P^{-1}AP$$

と対角化される．

**注意 5.49 (対角化の任意性)** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の取り方の順には自由度がある．固有値の取り方にもスカラー倍の自由度がある．よって $D, P$ は一通りに定まるわけではない．

**注意 5.50 (固有空間による直和分解)** 線形変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; \boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ の固有空間は

$$W(2;f)=\{\, c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{p}_2 \mid c_1,c_2\in\mathbb{R}\,\}=\langle \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2\rangle, \qquad W(3;f)=\{\, c\boldsymbol{p}_3 \mid c\in\mathbb{R}\,\}=\langle \boldsymbol{p}_3\rangle$$

である．$\dim(W(2;f))=2$, $\dim(W(3;f))=1$, $W(2;f)\cap W(3;f)=\{\mathbf{0}\}$ となるので，

$$W(2;f)\oplus W(3;f)=\mathbb{R}^3, \qquad \dim(W(2;f))+\dim(W(3;f))=\dim(\mathbb{R}^3)$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^3$ は固有空間に直和分解される．$W(2;f)$ の基底は $\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\}$，$W(3;f)$ の基底は $\{\boldsymbol{p}_3\}$，$\mathbb{R}^3$ の基底は $\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3\}$ となる．

**問 5.51 (固有空間)** 固有空間 $W(2;f)$ は原点を通り法線ベクトル $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2$ の平面であり，固有空間 $W(3;f)$ は原点を通り方向ベクトル $\boldsymbol{p}_3$ の直線である．直線と平面のなす角度の最小値を求めよ．

## 5.18 対角化可能ではいない行列

**例 5.52 (対角化できない場合の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

を対角化する．

まず，行列 $A$ の固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ 0 & t+1 & 0 \\ -1 & -2 & t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2)$$

であるから，$g_A(\lambda) = 0$ より固有値は $\lambda = 2,\ -1\,(2\text{ 重})$ となる．$\lambda = 2$ のとき，

$$2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，$(2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_1 \qquad (c \neq 0)$$

と得られる．$\lambda = -1$ のとき，

$$-E - A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，$(-E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_2 \qquad (c \neq 0)$$

と得られる．

行列 $A$ を対角化する．重複する固有値は別のものとして考えて，三つの固有値を $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ とおく．それぞれの固有値に属する固有ベクトルを

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_3 = \alpha\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

と選ぶ．このとき同じ固有値 $\lambda = -1$ に属する固有ベクトルは 1 次独立となるように選びたい．しかしながら，固有空間 $W(-1; f)$ は 1 次元であり，1 次独立な 2 本のベクトルを選ぶことはできない．そのため行列

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}$$

は正則とはならない．なぜなら

$$\det(P) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \alpha\boldsymbol{p}_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_2 \end{vmatrix} = 0$$

となるらかである．以上より行列 $A$ は対角化できない．

**注意 5.53 (固有空間による直和分解)** 線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の固有空間は

$$W(2; f) = \{\, c\boldsymbol{p} \mid c \in \mathbb{R} \,\} = \langle \boldsymbol{p}_1 \rangle, \qquad W(-1; f) = \{\, c\boldsymbol{p}_2 \mid c \in \mathbb{R} \,\} = \langle \boldsymbol{p}_2 \rangle$$

である．$\dim(W(2;f)) = 1$, $\dim(W(-1;f)) = 1$, $W(2;f) \cap W(-1;f) = \{\boldsymbol{0}\}$ となるので，

$$W(2;f) \oplus W(-1;f) = \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3, \qquad \dim(W(2;f)) + \dim(W(-1;f)) = 2 < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

が成り立つ．固有空間の和は $\mathbb{R}^2$ とはなるが，$\mathbb{R}^3$ とはならない．このとき行列 $A$ は対角化できない．

## 5.19 ちょっとまとめ

**注意 5.54 (複素体上の対角化)** 複素数体上の場合でも対角化の手順は同じである．行列 $A$ の固有値が $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ であり，固有ベクトルが $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{C}^n$ のとき，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が 1 次独立であれば，

$$D = P^{-1}AP, \qquad D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

と対角化可能である．

**まとめ 5.55 (対角化)** $n$ 次正方行列 $A$ の固有値を重複は別のものとして $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする．この固有値に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ とする．また，重複する固有値を同じものとして $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \cdots, \tilde{\lambda}_r$ $(r \leq n)$ とする．$f$ は線形変換 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ とする．

(1) $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が 1 次独立のとき．すなわち，$\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\tilde{\lambda}_i; f)) = n$ のとき．

- (i) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ のとき．
  - (a) **実数体上で対角化**可能である．
- (ii) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ のとき．
  - (b) **複素数体上で対角化**可能である．
  - (c) 実数体上では対角化不可能である．しかし，**実標準形**には分解可能である．

(2) $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が 1 次従属のとき．すなわち，$\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\tilde{\lambda}_i; f)) < n$ のとき．

- (d) 行列 $A$ は対角化不可能である．しかし，**ジョルダン標準形**には分解可能である．

## 5.20　対角化と座標変換

線形変換 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

$$(\text{☆}) \qquad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

において，行列 $A$ は対角化可能であるとすると，

$$D = P^{-1}AP$$

と書ける．両辺に左から $P$ を掛け，右からから $P^{-1}$ を掛けると

$$A = PDP^{-1}$$

となる．これを (☆) へ代入すると

$$\boldsymbol{y} = PDP^{-1}\boldsymbol{x} \qquad \Rightarrow \qquad P^{-1}\boldsymbol{y} = DP^{-1}\boldsymbol{x}$$

となる．ここで

$$(\,\flat\,) \qquad \boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y}' = P^{-1}\boldsymbol{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{y}'$$

とおくと，

$$(\bigstar) \qquad \boldsymbol{y}' = D\boldsymbol{x}'$$

を得る．$(\,\flat\,)$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = P\boldsymbol{x}'$$

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = x_1'\boldsymbol{p}_1 + x_2'\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_n'\boldsymbol{p}_n$$

と表されるので，$(\,\flat\,)$ は標準基底 $\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ における座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)_\Sigma$ と基底 $\Sigma' = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$ における座標 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')_{\Sigma'}$ との座標変換とみなせる．$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}'$ についても同様である．よって $(\bigstar)$ は固有ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ を基底とするあらたな座標系における線形変換 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \boldsymbol{x}' \mapsto \boldsymbol{y}'$ であり，あらためて成分で書くと

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1' \\ \lambda_2 x_2' \\ \vdots \\ \lambda_n x_n' \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_j' = \lambda_j x_j'$$

となる．各座標 $x_j$ が独立して，スカラー倍される単純な変換 $x_j' \mapsto \lambda_j x_j'$ とみなされる．

## 5.21 演習問題 〜 対角化

**問 5.56 (対角化)** 次の行列 $A$ を対角化せよ．また $A^k$ を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}2&0\\0&-5\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}2&1\\3&-5\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}1&-3\\1&1\end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}$ (9) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ (10) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

(11) $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ (12) $\begin{bmatrix}1&i\\-i&1\end{bmatrix}$ (13) $\begin{bmatrix}3&2\\2&6\end{bmatrix}$ (14) $\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}$ (15) $\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}$

(16) $\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}$ (17) $\begin{bmatrix}1&i\\0&i\end{bmatrix}$ (18) $\begin{bmatrix}3&-1\\13&-3\end{bmatrix}$ (19) $\begin{bmatrix}5&3\\-4&-2\end{bmatrix}$ (20) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(21) $\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$ (22) $\begin{bmatrix}1&1&-2\\-1&2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$ (23) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{bmatrix}$ (24) $\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$

(25) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$ (26) $\begin{bmatrix}-3&-9&-12\\1&3&4\\0&0&1\end{bmatrix}$ (27) $\begin{bmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (28) $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$

(29) $\begin{bmatrix}0&i&1\\-i&0&i\\1&-i&0\end{bmatrix}$ (30) $\begin{bmatrix}1&i&1\\-i&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ (31) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ (32) $\begin{bmatrix}7&2&0\\2&6&2\\0&2&5\end{bmatrix}$

(33) $\begin{bmatrix}8&-3&-3\\-3&8&-3\\-3&-3&8\end{bmatrix}$ (34) $\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}10&2i&2\\-2i&7&-i\\2&i&7\end{bmatrix}$ (35) $\begin{bmatrix}2&1+i&-3+3i\\1-i&-3&-i\\-3-3i&i&5\end{bmatrix}$

(36) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$ (37) $\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-2&-1\\3&-1&1\end{bmatrix}$ (38) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&3&2\\1&1&2\end{bmatrix}$ (39) $\begin{bmatrix}1&4&1\\0&2&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$

(40) $\begin{bmatrix}3&2&2&-4\\2&3&2&-1\\1&1&2&-1\\2&2&2&-1\end{bmatrix}$ (41) $\begin{bmatrix}-1&-1&-6&3\\1&-2&-3&0\\-1&1&0&1\\-1&-1&-5&3\end{bmatrix}$ (42) $\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-1&5&4\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$

## 5.22 正規行列

**定義 5.57 (正規行列)** 正方行列 $A$ が

$$AA^* = A^*A$$

をみたすとき $A$ を**正規行列（normal matrix）**という．

**例 5.58 (正規行列)** 正規行列には次のものがある：

- **対称行列** $\Leftrightarrow$ $A^T = A$
- **歪対称行列** $\Leftrightarrow$ $-A^T = A$
- **エルミート行列** $\Leftrightarrow$ $A^* = A$

- **歪エルミート行列** $\Leftrightarrow$ $-A^* = A$
- **直交行列** $\Leftrightarrow$ $A^T A = AA^T = E$
- **ユニタリー行列** $\Leftrightarrow$ $A^* A = AA^* = E$

**定理 5.59 (正規行列の固有値)** $\lambda$, $\boldsymbol{p}$ が正規行列 $A$ の固有値とその固有ベクトルであるとき，$\overline{\lambda}$, $\boldsymbol{p}$ は $A^*$ の固有値とその固有ベクトルとなる．

（証明）

$$
\begin{aligned}
&\|A^*\boldsymbol{p} - \overline{\lambda}\boldsymbol{p}\|^2 = \left(A^*\boldsymbol{p} - \overline{\lambda}\boldsymbol{p}\,,\, A^*\boldsymbol{p} - \overline{\lambda}\boldsymbol{p}\right) = (A^*\boldsymbol{p}\,,\, A^*\boldsymbol{p}) - \left(A^*\boldsymbol{p}\,,\, \overline{\lambda}\boldsymbol{p}\right) - \left(\overline{\lambda}\boldsymbol{p}\,,\, A^*\boldsymbol{p}\right) + \left(\overline{\lambda}\boldsymbol{p}\,,\, \overline{\lambda}\boldsymbol{p}\right) \\
&= (\boldsymbol{p}\,,\, AA^*\boldsymbol{p}) - \lambda\,(\boldsymbol{p}\,,\, A\boldsymbol{p}) - \overline{\lambda}\,(A\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) + \lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) \\
&= (\boldsymbol{p}\,,\, A^*A\boldsymbol{p}) - \lambda\,(\boldsymbol{p}\,,\, \lambda\boldsymbol{p}) - \overline{\lambda}\,(\lambda\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) + \lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) \\
&= (A\boldsymbol{p}\,,\, A\boldsymbol{p}) - \lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) - \lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) + \lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) \\
&= (\lambda\boldsymbol{p}\,,\, \lambda\boldsymbol{p}) - \lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) = \lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) - \lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{p}\,,\, \boldsymbol{p}) = 0
\end{aligned}
$$

より $A^*\boldsymbol{p} = \overline{\lambda}\boldsymbol{p}$ を得る．

**定理 5.60 (正規行列の固有ベクトル)** 正規行列の相異なる固有ベクトルは直交する．

（証明） 固有値 $\lambda$, $\mu$ $(\lambda \neq \mu)$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ とする．このとき $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$ である．これと $A\boldsymbol{v} = \overline{\mu}\boldsymbol{v}$ より

$$
\lambda\,(\boldsymbol{u}\,,\, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{u}\,,\, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u}\,,\, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\,,\, A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\,,\, \overline{\mu}\boldsymbol{v}) = \mu\,(\boldsymbol{u}\,,\, \boldsymbol{v})
$$

が成り立つ．よって $(\lambda - \mu)\,(\boldsymbol{u}\,,\, \boldsymbol{v}) = 0$ であり，$\lambda \neq \mu$ であるから，$(\boldsymbol{u}\,,\, \boldsymbol{v}) = 0$ を得る．

## 5.23 対称行列の対角化

**定義 5.61 (対称行列)** 行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が $A^T = A$ をみたすとき，$A$ を**対称行列（symmetric matrix）**という．

**注意 5.62 (対称行列)** 対称行列は

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

の形で表される．

**例 5.63 (対称行列の具体例)** 次に行列は対称行列である．

$$
E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

**定義 5.64 (共役行列)** 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ に対して $\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{ij}} \end{bmatrix}$ と定義する．

**定義 5.65 (共役転置行列)** 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ に対して**共役転置行列**を $A^* = (\overline{A})^T = \overline{A^T}$ と定義する．

**定理 5.66 (対称行列の固有値)** 対称行列の固有値はすべて実数である．

（証明）　$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ において，$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて

$$
\begin{aligned}
(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) &= \lambda\,(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 \\
(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) &= \overline{(\boldsymbol{x}\,,\,\lambda\boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{x})} = \overline{(A^*\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{(A^T\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{(A\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{\lambda\,(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} \\
&= \overline{\lambda\|\boldsymbol{x}\|^2} = \overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，

$$
(\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y}) = (A^*\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y})
$$

が成り立つことを用いた．$\lambda = \overline{\lambda}$ となるので，$\lambda$ は実数である．

**注意 5.67 (対称行列の固有値)** 実対称行列の固有値は実数なので，固有ベクトルも実数である．

**注意 5.68 (対称行列と正規行列)** 対称行列は正規行列である．

**定理 5.69 (対称行列の固有値)** 対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．

（証明）　対称行列は正規行列であるから固有ベクトルは直交する．または，次のように示す．$A^T = A$, $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$, $\lambda \neq \mu$ とする．このとき，

$$
\lambda\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = \left(\boldsymbol{u}\,,\,A^T\boldsymbol{v}\right) = (\boldsymbol{u}\,,\,A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\,,\,\mu\boldsymbol{v}) = \mu\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})
$$

となる．

$$
(\lambda - \mu)\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0
$$

であるから，$\lambda \neq \mu$ より $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$ を得る．

**定理 5.70 (対称行列の対角化)** 対称行列 $A$ は対角行列 $D$ と直交行列 $Q$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&D = Q^{-1}AQ = Q^TAQ, \\
&D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \\
&Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \cdots & \boldsymbol{q}_n \end{bmatrix}, \quad \left(\boldsymbol{q}_i\,,\,\boldsymbol{q}_j\right) = \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

と対角化される．

### 5.24　2 次対称行列の対角化

**例 5.71 (対称行列の対角化の具体例)** 対称行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

を直交行列で対角化する．$A$ の固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 4 = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$$

であるから，固有値は $g_A(\lambda) = 0$ より $\lambda = 3, -1$ となる．

$$3E - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad -E - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$\lambda = 3$ と $\lambda = -1$ に属する固有ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_1, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_2$$

となる．$\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ は 1 次独立であるから，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}$ は正則となる．しかし $P$ は直交行列ではないので，直交行列となるように固有ベクトルを選び直す．$(\boldsymbol{p}_1\,,\, \boldsymbol{p}_2) = 0$ であるから，$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ は直交する．よってこれらを正規化すればよい．

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと，$\left(\boldsymbol{q}_i\,,\, \boldsymbol{q}_j\right) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ が成り立ち正規直交系となる．以上より行列 $A$ は

$$D = Q^{-1}AQ = Q^T AQ, \qquad D = \mathrm{diag}\,(3, -1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

と直交行列 $Q$ で対角化される．

**注意 5.72 (対称行列の固有空間)** 線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の固有空間は

$$W(3; f) = \langle \boldsymbol{p}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{q}_1 \rangle, \qquad W(-1; f) = \langle \boldsymbol{p}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{q}_2 \rangle$$

である．$\dim(W(3; f)) = 1$, $\dim(W(-1; f)) = 1$, $W(3; f) \cap W(-1; f) = \{\boldsymbol{0}\}$ より

$$(\text{☆}) \qquad W(3; f) \oplus W(-1; f) = \mathbb{R}^2, \qquad \dim(W(3; f)) + \dim(W(-1; f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$$

を得る．固有空間 $W(3; f)$, $W(-1; f)$ は $\mathbb{R}^2$ の直和分解である．また，異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するので，固有空間も直交し $W(3; f) \perp W(-1; f)$ を得る．$W(3; f) \perp W(-1; f)$ と (☆) より，$W(3; f)$ は $\mathbb{R}^2$ における $W(-1; f)$ の直交補空間となる．また逆に $W(-1; f)$ は $\mathbb{R}^2$ における $W(3; f)$ の直交補空間となる．

### 5.25 3 次対称行列の対角化

**例 5.73 (対称行列の対角化の具体例)** 対称行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

を直交行列で対角化する．$A$ の固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -2 & t+2 & -2 \\ 1 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+4)$$

であるから，固有値は $g_A(\lambda) = 0$ より $\lambda = 2$ (2 重), $-4$ となる．

$$2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-4E - A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$\lambda = 2$ と $\lambda = -4$ に属する固有ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2,$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -2c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_3$$

となる．$\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ は 1 次独立であるから，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}$ は正則となる．しかし $P$ は直交行列ではないので，直交行列となるように固有ベクトルを選び直す．

$$(\boldsymbol{p}_1\,,\boldsymbol{p}_2) = -2 \neq 0, \quad (\boldsymbol{p}_1\,,\boldsymbol{p}_3) = 0, \quad (\boldsymbol{p}_2\,,\boldsymbol{p}_3) = 0$$

であるから，$\boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_2 \perp \boldsymbol{p}_3$ となる．$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ をグラム・シュミットの直交化法で正規直交化し，$\boldsymbol{p}_3$ は正規化すればよい．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_1 &= \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{p}_2' &= \boldsymbol{p}_2 - (\boldsymbol{p}_1\,,\,\boldsymbol{q}_1)\,\boldsymbol{q}_1\\
&= \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{-2}{\sqrt{5}\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{q}_2 &= \frac{\boldsymbol{p}_2'}{\|\boldsymbol{p}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{q}_3 &= \frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

とおくと，$\left(\boldsymbol{q}_i\,,\,\boldsymbol{q}_j\right) = \delta_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3)$ が成り立ち正規直交系となる．以上より行列 $A$ は

$$
\begin{aligned}
D &= Q^{-1}AQ = Q^TAQ,\\
D &= \mathrm{diag}\,(2, 2, -4) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -4\end{bmatrix},\\
Q &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と直交行列 $Q$ で対角化される．

**注意 5.74 (対称行列の固有空間)** 線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の固有空間は

$$
W(2; f) = \langle \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2 \rangle, \qquad W(-4; f) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{q}_3 \rangle
$$

である．$\dim(W(2; f)) = 2$, $\dim(W(-4; f)) = 1$, $W(2; f) \cap W(-4; f) = \{\mathbf{0}\}$ より

$$
(\text{☆}) \qquad W(2; f) \oplus W(-4; f) = \mathbb{R}^3, \qquad \dim(W(2; f)) + \dim(W(-4; f)) = \dim(\mathbb{R}^3)
$$

を得る．固有空間 $W(2; f), W(-4; f)$ は $\mathbb{R}^3$ の直和分解である．また，異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するので，固有空間も直交し $W(2; f) \perp W(-4; f)$ を得る．$W(2; f) \perp W(-4; f)$ と (☆) より，$W(2; f)$ は $\mathbb{R}^3$ における $W(-4; f)$ の直交補空間となる．また逆に $W(-4; f)$ は $\mathbb{R}^3$ における $W(2; f)$ の直交補空間となる．

### 5.26 実標準形

実行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が複素固有値 $\lambda$ をもつとき，その複素共役 $\overline{\lambda}$ も固有値となる．なぜなら，固有多項式 $g_A(t)$ は実係数であるから，$g_A(\lambda) = 0$ のとき $g_A(\overline{\lambda}) = 0$ が成り立つからである．固有値 $\lambda$ に属す

る固有ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とすると $A\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}$ である．複素共役をとると $A\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{p}}$ となるので，$\overline{\lambda}$ に属する固有値ベクトルは $\overline{\boldsymbol{p}}$ となる．よって

$$A\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}, \qquad A\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{p}}$$

である．これより

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\boldsymbol{p}+\overline{\boldsymbol{p}}}{2}\right) &= \frac{\lambda\boldsymbol{p}+\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{p}}}{2} = \left(\frac{\lambda+\overline{\lambda}}{2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}+\overline{\boldsymbol{p}}}{2}\right) - \left(\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{2i}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}-\overline{\boldsymbol{p}}}{2i}\right), \\ A\left(\frac{\boldsymbol{p}-\overline{\boldsymbol{p}}}{2i}\right) &= \frac{\lambda\boldsymbol{p}-\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{p}}}{2i} = \left(\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{2i}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}+\overline{\boldsymbol{p}}}{2}\right) + \left(\frac{\lambda+\overline{\lambda}}{2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}-\overline{\boldsymbol{p}}}{2i}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．複素数 $z$ の実部を $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, 虚部を $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ とおき，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の各要素の実部，虚部をとる操作を $\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}) = [\mathrm{Re}(v_i)]_{n\times 1}$, $\mathrm{Im}(\boldsymbol{v}) = [\mathrm{Re}(v_i)]_{n\times 1}$ とおく．このとき

$$A\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Re}(\boldsymbol{p}) - \mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{Im}(\boldsymbol{p}), \quad A\mathrm{Im}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{Re}(\boldsymbol{p}) + \mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Im}(\boldsymbol{p})$$

を得る．$2 \times 2$ の場合では,

$$AP = A\begin{bmatrix}\mathrm{Im}(\boldsymbol{p}) & \mathrm{Re}(\boldsymbol{p})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{Im}(\boldsymbol{p}) & \mathrm{Re}(\boldsymbol{p})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\lambda) & -\mathrm{Im}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(\lambda) & \mathrm{Re}(\lambda)\end{bmatrix} = PD$$

が成り立つ．$\boldsymbol{p}, \overline{\boldsymbol{p}}$ が 1 次独立のとき $P$ は正則となるから，$D = P^{-1}AP$ と表される．

**定理 5.75 (実標準形)** 実行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は複素数体上で対角化可能であるとする．固有値を

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \ni &\quad \lambda_1,\ \lambda_2 = \overline{\lambda_1},\ \lambda_3,\ \lambda_4 = \overline{\lambda_3},\ \cdots,\ \lambda_{2k-1},\ \lambda_{2k} = \overline{\lambda_{2k-1}}, \\ \mathbb{R} \ni &\quad \lambda_{2k+1}, \cdots, \lambda_n \end{aligned}$$

とし，それに属する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ とする．このとき，行列 $A$ は

$$D = P^{-1}AP,$$

$$D = \begin{bmatrix} R(\lambda_1) & & & & & & \\ & R(\lambda_2) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & R(\lambda_{2k-1}) & & & \\ & & & & \lambda_{2k+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad R(\lambda) = \begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\lambda) & -\mathrm{Im}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(\lambda) & \mathrm{Re}(\lambda)\end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix}\mathrm{Im}(\boldsymbol{p}_1)\ \mathrm{Re}(\boldsymbol{p}_1) & \mathrm{Im}(\boldsymbol{p}_2)\ \mathrm{Re}(\boldsymbol{p}_2) & \cdots & \mathrm{Im}(\boldsymbol{p}_{2k-1})\ \mathrm{Re}(\boldsymbol{p}_{2k-1}) & \boldsymbol{p}_{2k+1} & \cdots & \boldsymbol{p}_{2k+1}\end{bmatrix}$$

と実数体上でブロック対角化される．$D$ を**実標準形（real canonical form???）**という．

**例 5.76 (実標準形の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

の固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 5$$

であるから，固有値は $g_A(\lambda) = 0$ より，

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_1 = 2 - i$$

と複素数になる．それぞれの固有ベクトルは

$$(2+i)E - A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (2-i)E - A = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，

$$\boldsymbol{x} = c \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_1, \qquad \boldsymbol{x} = c \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_2$$

となる．よって $A$ を複素数体上で対角化すると

$$\begin{aligned} &D = P^{-1}AP, \\ &D = \operatorname{diag}(2+i, 2-i) = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}, \\ &P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る．次に $A$ を実数体上で実標準形に分解する．$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, $\boldsymbol{p}_2 = \overline{\boldsymbol{v}_1}$ となることに注意すると

$$\begin{aligned} &D = P^{-1}AP, \\ &D = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\lambda_1) & -\mathrm{Im}(\lambda_1) \\ \mathrm{Im}(\lambda_1) & \mathrm{Re}(\lambda_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ &P = \begin{bmatrix} \mathrm{Im}(\boldsymbol{p}_1) & \mathrm{Re}(\boldsymbol{p}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る．行列 $A = D$, $E = P$ となることから，$A$ は既に実標準形のかたちをしている．

## 5.27 ユニタリー行列

**定義 5.77 (ユニタリー行列)** 行列 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ が $A^*A = E$ をみたすとき，$A$ を**ユニタリー行列（unitary matrix）**という．

**注意 5.78 (ユニタリー行列と直交行列)** ユニタリー行列 $A$ の要素が実数のみであるとき，$AA^* = AA^T = E$ よりユニタリー行列は直交行列となる．

**定理 5.79 (ユニタリー行列の性質)** $A$ をユニタリー行列とする．次が成り立つ．

(1) $\det(A) = \pm 1$.

(2) $A$ は正則である．

(3) $A^{-1} = A^*$.

**定理 5.80 (ユニタリー行列と正規直交系)** 行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ がユニタリー行列であることと，$A$ の列ベクトルまたは行ベクトルが正規直交系であることとは，必要十分条件である．ただし，内積は $\mathbb{C}$ 上の内積を用いる．

**問 5.81 (ユニタリー行列と正規直交系)** 直交行列の場合と同様に示せ．

**問 5.82 (ユニタリー行列の具体例)** 次の行列がユニタリー行列となることを示せ．

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & i\cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

## 5.28 交代行列の対角化

**定義 5.83 (交代行列)** 行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が $A^T = -A$ をみたすとき，$A$ を**歪対称行列（skew-symmetric matrix）**または**交代行列（alternative matrix）**という．

**定理 5.84 (交代行列の固有値)** 交代行列の固有値はすべて純虚数または 0 である．

（証明） 行列 $A$ の固有値を $\lambda$ としその固有ベトクルを $\boldsymbol{x}$ とする．すなわち $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つとする．このとき，$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて，

$$\begin{aligned}
(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) &= \lambda\,(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 \\
(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) &= \overline{(\boldsymbol{x}\,,\,\lambda\boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{x})} = \overline{(A^*\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{(A^T\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{(-A\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = -\overline{(A\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} \\
&= -\overline{(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = -\overline{\lambda}\overline{(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = -\overline{\lambda}\overline{\|\boldsymbol{x}\|^2} = -\overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$(\boldsymbol{x}\,,A\boldsymbol{y}) = (A^*\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{y})$ となることを用いた．これらを比較すると $\lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 = -\bar{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2$ となる．固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{0}$ とはならないから，$\lambda + \overline{\lambda} = 0$ が成立する．このとき $\lambda$ は純虚数である．

**注意 5.85 (交代行列)** 交代行列は正規行列である．

**定理 5.86 (交代行列の固有ベクトル)** 交代行列において，異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．

（証明） 交代行列は正規行列であるから固有ベクトルは直交する．または，次のように示す．$A^T = -A$ において, 固有値は純虚数なので $A\boldsymbol{u} = i\lambda\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v} = i\mu\boldsymbol{v}$, $\lambda \neq \mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ とする．$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて

$$\begin{aligned}
i\lambda\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (i\lambda\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = \left(\boldsymbol{u}\,,\,A^T\boldsymbol{v}\right) = -\,(\boldsymbol{u}\,,\,A\boldsymbol{v}) \\
= -\,(\boldsymbol{u}\,,\,i\mu\boldsymbol{v}) = -\overline{i\mu}\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = i\mu\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

となる．

$$i(\lambda-\mu)\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$$

であるから，$\lambda \neq \mu$ より $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$ を得る．

**定理 5.87 (交代行列の対角化)** 交代行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする．このとき，$A$ はユニタリー行列 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&D = U^{-1}AU = U^*AU,\\
&D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),\\
&U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と $\mathbb{C}$ 上で対角化される．ただし，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトルであり，$U$ がユニタリー行列となるように選ぶとする．

**定理 5.88 (交代行列の実標準形)** 交代行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の固有値を

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = \overline{\lambda_1},\ \lambda_3,\ \lambda_4 = \overline{\lambda_3},\ \cdots,\ \lambda_{n-1},\ \lambda_n = \overline{\lambda_{n-1}}$$

とする．このとき，$A$ は直交行列 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&D = Q^{-1}AQ = Q^TAQ,\\
&D = \begin{bmatrix} R(\lambda_1) & & & \\ & R(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & R(\lambda_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad R(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{Im}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(\lambda) & 0 \end{bmatrix},\\
&Q = \begin{bmatrix} \mathrm{Im}(\boldsymbol{q}_1) & \mathrm{Re}(\boldsymbol{q}_1) & \cdots & \mathrm{Im}(\boldsymbol{q}_{n-1}) & \mathrm{Re}(\boldsymbol{q}_{n-1}) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と実標準形でブロック対角化される．ただし，$\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトルであり，$Q$ が直交行列となるように選ぶとする．

**例 5.89 (交代行列の対角化の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

を対角化する．

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

より，固有値は $\lambda = i, -i$ である．

$$iE - A = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad -iE - A = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，固有ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -i\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} i\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる．これより

$$D = U^*AU, \qquad D = \mathrm{diag}\,(i, -i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と $\mathbb{C}$ 上で対角化される．また，$\mathbb{R}$ 上で実標準形では

$$D = Q^TAQ, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．

## 5.29 エルミート行列の対角化

**定義 5.90 (エルミート行列)** 行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ が $A^* = A$ をみたすとき $A$ を**エルミート行列（Hermite matrix）**という．

**注意 5.91 (エルミート行列と対称行列)** エルミート行列 $A$ の要素が実数のみであるとき，$A^* = A^T = A$ よりエルミート行列は対称行列となる．

**定理 5.92 (エルミート行列の固有値)** エルミート列の固有値はすべて実数である．

（証明）　$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ とし，$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて，

$$
\begin{aligned}
&(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = \lambda\,(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 \\
&(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}\,,\,\lambda\boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{x})} = \overline{(A^*\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{(A\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{\lambda(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{\lambda\|\boldsymbol{x}\|^2} = \overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，$(\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y}) = (A^*\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y})$ を用いた．$(\lambda - \overline{\lambda})\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0$, $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ より，$\lambda - \overline{\lambda} = 0$ が成立する．$\lambda$ は実数である．

**注意 5.93 (エルミート行列)** エルミート行列は正規行列である．

**定理 5.94 (エルミート行列の固有ベクトル)** エルミート行列において，異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．

（証明）　エルミート行列は正規行列であるので固有ベクトルは直交する．または，次のように示す．$A^* = A$, $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$, $\lambda \neq \mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ とする．$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて，

$$
\lambda\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\,,\,A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\,,\,A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\,,\,\mu\boldsymbol{v}) = \overline{\mu}\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = \mu\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})
$$

となる．

$$
(\lambda - \mu)\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0
$$

であるから，$\lambda \neq \mu$ より $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$ を得る．

**定理 5.95 (エルミート行列の対角化)** エルミート行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする．このとき，$A$ はユニタリー行列 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ を用いて

$$
D = U^{-1}AU = U^*AU, \qquad D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}
$$

と対角化される．ただし，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトルであり，$U$ がユニタリー行列となるように選ぶとする．

**例 5.96 (エルミート行列の対角化の具体例)** 行列

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}
$$

を対角化する．

$$
\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -i \\ i & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) = 0
$$

より，固有値は $0, 2$ である．

$$0E - A = \begin{bmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad 2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，固有ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_1, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_2$$

となる．$(\boldsymbol{p}_1\,, \boldsymbol{p}_2) = 0$ であるから，規格化して $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_1/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{p}_2/\sqrt{2}$ とする．このとき $A$ はユニタリー行列 $U$ を用いて

$$D = U^*AU, \qquad D = \mathrm{diag}\,(0, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と対角化される．

**例 5.97 (エルミート行列の対角化の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

を対角化する．

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -i & -1 \\ i & \lambda & -i \\ -1 & i & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

より，固有値は $1$ (2 個), $-2$ である．

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ i & 1 & -i \\ -1 & i & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -2 & -i & -1 \\ i & -2 & -i \\ -1 & i & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，固有ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} ix_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -ix_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_3$$

となる．$(\boldsymbol{p}_1\,,\,\boldsymbol{p}_2)=i$, $(\boldsymbol{p}_1\,,\,\boldsymbol{p}_3)=0$, $(\boldsymbol{p}_2\,,\,\boldsymbol{p}_3)=0$ であるから，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_1 &= \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{p}_2' &= \boldsymbol{p}_2 - (\boldsymbol{p}_2\,,\,\boldsymbol{q}_1)\,\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2'}{\|\boldsymbol{p}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{q}_3 &= \frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

とおくと，正規直交系 $\left(\boldsymbol{q}_i\,,\,\boldsymbol{q}_j\right)=\delta_{ij}$ となる．このとき $A$ はユニタリー行列 $U$ を用いて

$$D = U^*AU, \qquad D = \mathrm{diag}\,(1,1,-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

と対角化される．

## 5.30　歪エルミート行列の対角化

**定義 5.98 (歪エルミート行列)** 行列 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ が $A^*=-A$ をみたすとき $A$ を**歪エルミート行列**（**skew Hermite matrix**）という．

**注意 5.99 (歪エルミート行列と交代行列)** 歪エルミート行列 $A$ の要素が実数のみであるとき，$A^*=A^T=-A$ よりエルミート行列は交代行列となる．

**定理 5.100 (歪エルミート行列の固有値)** 歪エルミート列の固有値はすべて純虚数または 0 である．

（証明）　$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ とし，$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて，

$$\begin{aligned}
(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) &= \lambda\,(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 \\
(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) &= \overline{(\boldsymbol{x}\,,\,\lambda\boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{x})} = \overline{(A^*\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = \overline{(-A\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = -\overline{(A\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} \\
&= -\overline{(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = -\overline{\lambda}\overline{(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x})} = -\overline{\lambda}\overline{\|\boldsymbol{x}\|^2} = -\overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$(\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y})=(A^*\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y})$ を用いた．$(\lambda+\overline{\lambda})\|\boldsymbol{x}\|^2=0$, $\|\boldsymbol{x}\|\neq 0$ より，$\lambda+\overline{\lambda}=0$ が成立する．$\lambda$ は純虚数である．

**注意 5.101 (歪エルミート行列)** 歪エルミート行列は正規行列である．

**定理 5.102 (歪エルミート行列の固有ベクトル)** 歪エルミート行列において，異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．

(証明)　歪エルミート行列は正規行列であるので固有ベクトルは直交する．または，次のように示す．$A^* = -A$ であり, 固有値は純虚数であるから，$A\boldsymbol{u} = i\lambda\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v} = i\mu\boldsymbol{v}$, $\lambda \neq \mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ とおく．$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて,

$$\begin{aligned} i\lambda\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) &= (i\lambda\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\,,\,A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\,,\,-A\boldsymbol{v}) = -\,(\boldsymbol{u}\,,\,A\boldsymbol{v}) \\ &= -\,(\boldsymbol{u}\,,\,i\mu\boldsymbol{v}) = -\overline{i\mu}\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = i\mu\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

となる．

$$i(\lambda - \mu)\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$$

であるから，$\lambda \neq \mu$ より $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$ を得る．

**定理 5.103 (歪エルミート行列の対角化)** 歪エルミート行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする．このとき，$A$ はユニタリー行列 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ を用いて

$$D = U^{-1}AU = U^*AU, \qquad D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

と対角化される．ただし，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトルであり，$U$ がユニタリー行列となるように選ぶとする．

**例 5.104 (歪エルミート行列の対角化の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

を対角化する．

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -i \\ -i & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

より，固有値は $i, -i$ である．

$$iE - A = \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad -iE - A = \begin{bmatrix} -i & -i \\ -i & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，固有ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_1, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_2$$

となる．$(\boldsymbol{p}_1\,,\,\boldsymbol{p}_2) = 0$ であるから，規格化して $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_1/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{p}_2/\sqrt{2}$ とする．このとき $A$ はユニタリー行列 $U$ を用いて

$$D = U^*AU, \qquad D = \mathrm{diag}\,(i, -i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と対角化される．

### 5.31 直交行列の対角化

**定理 5.105 (直交行列の固有値)** 直交行列の固有値は絶対値が 1 となる複素数である．

（証明） $A^TA = E,\ A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ とし，$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて，

$$(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = |\lambda|^2\|\boldsymbol{x}\|^2$$
$$(\lambda\boldsymbol{x}\,,\,\lambda\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{x}) = \left(A^TA\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}\right) = (E\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

が成り立つ．ここで，$(\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y}) = \left(A^T\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}\right)$ を用いた．$(|\lambda|^2-1)\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0,\ \|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ より，$|\lambda| = 1$ が成立する．

**注意 5.106 (直交行列)** 直交行列は正規行列である．

**定理 5.107 (直交行列の固有ベクトル)** 直交行列において，異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．

（証明） 直交行列は正規行列であるので固有ベクトルは直交する．または，次のように示す．$A^TA = E$ であり, 固有値は複素平面の単位円上にあるから，$A\boldsymbol{u} = e^{i\lambda}\boldsymbol{u},\ A\boldsymbol{v} = e^{i\mu}\boldsymbol{v},\ \lambda \neq \mu\ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ とする．$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて，

$$\left(e^{i\lambda}\boldsymbol{u}\,,\,e^{i\mu}\boldsymbol{v}\right) = e^{i\lambda}\overline{e^{i\mu}}\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = e^{i\lambda}e^{-i\mu}\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = e^{i(\lambda-\mu)}\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})\,,$$
$$\left(e^{i\lambda}\boldsymbol{u}\,,\,e^{i\mu}\boldsymbol{v}\right) = (A\boldsymbol{u}\,,\,A\boldsymbol{v}) = \left(A^TA\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}\right) = (E\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v})$$

となる．ここで $(\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y}) = \left(A^T\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}\right)$ を用いた．

$$(e^{i(\lambda-\mu)} - 1)\,(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$$

であるから，$\lambda \neq \mu$ より $(\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}) = 0$ を得る．

**定理 5.108 (直交行列の対角化)** 直交行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする．このとき，$A$ はユニタリー行列 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ を用いて

$$D = U^{-1}AU = U^*AU, \qquad D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad U = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{bmatrix}$$

と対角化される．ただし，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトルであり，$U$ がユニタリー行列となるように選ぶとする．

**定理 5.109 (直交行列の実標準形)** 直交行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の固有値を

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = \overline{\lambda_1},\ \lambda_3,\ \lambda_4 = \overline{\lambda_3},\ \cdots,\ \lambda_{2k-1},\ \lambda_{2k} = \overline{\lambda_{2k-1}},\ \lambda_{2k+1} = 1,\ \cdots,\ \lambda_l = -1,\ \cdots$$

とする．このとき，$A$ は直交行列 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&D = Q^{-1}AQ = Q^TAQ,\\
&D = \begin{bmatrix} R(\lambda_1) & & & & & & & \\ & R(\lambda_2) & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & R(\lambda_{2k-1}) & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix},\\
&R(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\lambda) & -\mathrm{Im}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(\lambda) & \mathrm{Re}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\arg(\lambda)) & -\sin(\arg(\lambda)) \\ \sin(\arg(\lambda)) & \cos(\arg(\lambda)) \end{bmatrix},\\
&Q = \begin{bmatrix} \mathrm{Im}(\boldsymbol{q}_1) & \mathrm{Re}(\boldsymbol{q}_1) & \cdots & \mathrm{Im}(\boldsymbol{q}_{2k-1}) & \mathrm{Re}(\boldsymbol{q}_{2k-1}) & \boldsymbol{q}_{2k+1} & \cdots \boldsymbol{q}_l & \cdots \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と実標準形でブロック対角化される．ただし，$\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトルであり，$Q$ が直交行列となるように選ぶとする．

**例 5.110 (直交行列の対角化の具体例)** 行列

$$
A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

を対角化する．

$$
\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0
$$

より，固有値は

$$
\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{3}i}{2}
$$

である．

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{3}i}{2}E - A &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3}i & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3}i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\\
\frac{1-\sqrt{3}i}{2}E - A &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3}i & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3}i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

より，固有ベクトルはそれぞれ

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_1, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_2
$$

となる．$(\boldsymbol{p}_1\,,\boldsymbol{p}_2)=0$ であるから，規格化して $\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{p}_1/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{p}_2/\sqrt{2}$ とする．このとき $A$ はユニタリー行列 $U$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&D=U^*AU,\\
&D=\operatorname{diag}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\sqrt{3}i & 0\\ 0 & 1-\sqrt{3}i\end{bmatrix},\\
&U=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と対角化される．実標準系では

$$
D=Q^TAQ,\qquad D=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}
$$

となる．

## 5.32 ユニタリー行列の対角化

**定理 5.111 (ユニタリー行列の固有値)** ユニタリー行列の固有値は絶対値が 1 となる複素数である．

（証明） $A^*A=E$, $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ とし，$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて，

$$
\begin{aligned}
&(\lambda\boldsymbol{x}\,,\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\overline{\lambda}\,(\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{x})=|\lambda|^2\|\boldsymbol{x}\|^2\\
&(\lambda\boldsymbol{x}\,,\lambda\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x}\,,A\boldsymbol{x})=(A^*A\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{x})=(E\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，$(\boldsymbol{x}\,,A\boldsymbol{y})=(A^*\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{y})$ を用いた．$(|\lambda|^2-1)\|\boldsymbol{x}\|^2=0$, $\|\boldsymbol{x}\|\neq 0$ より，$|\lambda|=1$ が成立する．

**注意 5.112 (ユニタリー行列)** ユニタリー行列は正規行列である．

**定理 5.113 (ユニタリー行列の固有ベクトル)** ユニタリー行列において，異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．

（証明） ユニタリー行列は正規行列であるので固有ベクトルは直交する．または，次のように示す．$A^*A=E$ であり, 固有値は複素平面の単位円上にあるから，$A\boldsymbol{u}=e^{i\lambda}\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v}=e^{i\mu}\boldsymbol{v}$, $\lambda\neq\mu$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$ とする．$\mathbb{C}$ 上の内積を用いて，

$$
\begin{aligned}
&\left(e^{i\lambda}\boldsymbol{u}\,,e^{i\mu}\boldsymbol{v}\right)=e^{i\lambda}\overline{e^{i\mu}}\,(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})=e^{i\lambda}e^{-i\mu}\,(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})=e^{i(\lambda-\mu)}\,(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})\,,\\
&\left(e^{i\lambda}\boldsymbol{u}\,,e^{i\mu}\boldsymbol{v}\right)=(A\boldsymbol{u}\,,A\boldsymbol{v})=(A^*A\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})=(E\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

となる．ここで $(\boldsymbol{x}\,,A\boldsymbol{y})=(A^*\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{y})$ を用いた．

$$
(e^{i(\lambda-\mu)}-1)\,(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})=0
$$

であるから，$\lambda\neq\mu$ より $(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})=0$ を得る．

**定理 5.114 (ユニタリー行列の対角化)** ユニタリー行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする．このとき，$A$ はユニタリー行列 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ を用いて

$$D = U^{-1}AU = U^*AU, \qquad D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

と対角化される．ただし，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトルであり，$U$ がユニタリー行列となるように選ぶとする．

## 5.33 ちょっとまとめ

**まとめ 5.115 (対角化と標準形)**

| | 固有値 | $\mathbb{R}$ 上で直交行列で対角化 | $\mathbb{R}$ 上で直交行列で実標準形 | $\mathbb{C}$ 上でユニタリー行列で対角化 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}^{n\times n} \ni$ 対称行列 $(A^T = A)$ | 実数 | ○ | | |
| $\mathbb{R}^{n\times n} \ni$ 交代行列 $(A^T = -A)$ | 純虚数 or 0 | | ○ | ○ |
| $\mathbb{R}^{n\times n} \ni$ 直交行列 $(A^TA = E)$ | $\lvert\lambda\rvert = 1$ $\lambda \in \mathbb{C}$ | △ ($\lambda = \pm 1$ のみ) | ○ | ○ |
| $\mathbb{C}^{n\times n} \ni$ エルミート行列 $(A^* = A)$ | 実数 | | | ○ |
| $\mathbb{C}^{n\times n} \ni$ 歪エルミート行列 $(A^* = -A)$ | 純虚数 or 0 | | | ○ |
| $\mathbb{C}^{n\times n} \ni$ ユニタリー行列 $(A^*A = E)$ | $\lvert\lambda\rvert = 1$ $\lambda \in \mathbb{C}$ | | | ○ |

## 5.34 演習問題 〜 ユニタリー行列で対角化

**問 5.116 (対称行列の対角化)** 次の行列を直交行列またはユニタリー行列で対角化せよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ (9) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (10) $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ (11) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (12) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (14) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (15) $\begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (16) $\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 & 2i & 2 \\ -2i & 7 & -i \\ 2 & i & 7 \end{bmatrix}$

(17) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (18) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (19) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (20) $\begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

(21) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ (22) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (23) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (24) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(25) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (26) $\begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix}$ (27) $\begin{bmatrix} 10 & 2i & 2 \\ -2i & 7 & -i \\ 2 & i & 7 \end{bmatrix}$

(28) $\begin{bmatrix} 2 & 1+i & -3+3i \\ 1-i & -3 & -i \\ -3-3i & i & 5 \end{bmatrix}$ (29) $\begin{bmatrix} 5 & -i & 1+i \\ i & 5 & -1+i \\ 1-i & -1-i & 6 \end{bmatrix}$ (30) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

## 5.35 ジョルダン標準形

行列 $A$ のある固有値 $\lambda$ の重複度が $m$ であるとする．固有空間

$$W(\lambda) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

が $\dim(W) < m$ のとき，行列 $A$ は対角化できない．このとき

$$W_m(\lambda) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda E)^m\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

で定義される**一般固有空間**を考える．$\forall x \in W$ に対して $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$(A - \lambda E)^m\boldsymbol{x} = (A - \lambda E)^{m-1}(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = (A - \lambda E)^{m-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つので，$W \subset W_m$ である．

**定理 5.117 (一般固有空間)** $W_m$ の基底で

$$\begin{aligned}
(A - \lambda E)\boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{p}_1 &\in W_1, & & \\
(A - \lambda E)\boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{p}_1, & \boldsymbol{p}_2 &\in W_2, & \boldsymbol{p}_2 &\notin W_1, \\
(A - \lambda E)\boldsymbol{p}_3 &= \boldsymbol{p}_2, & \boldsymbol{p}_3 &\in W_3, & \boldsymbol{p}_3 &\notin W_2, \\
&\vdots & &\vdots & &\vdots \\
(A - \lambda E)\boldsymbol{p}_m &= \boldsymbol{p}_{m-1}, & \boldsymbol{p}_m &\in W_m, & \boldsymbol{p}_m &\notin W_{m-1}
\end{aligned}$$

をみたす基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m\}$ が存在する．また，$\dim(W_m) = m$ が成り立つ．

行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ に対しては，この定理より

$$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda\boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_2 = \lambda\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_3 = \lambda\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2, \quad \cdots, \quad A\boldsymbol{p}_m = \lambda\boldsymbol{p}_m + \boldsymbol{p}_{m-1}$$

となり，

$$A\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_{n-1} & \boldsymbol{p}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{p}_1 & \lambda\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1 & \lambda\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \lambda\boldsymbol{p}_m + \boldsymbol{p}_{m-1}\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_{m-1} & \boldsymbol{p}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_{m-1} & \boldsymbol{p}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{bmatrix}$$

$$AP = PJ$$

が成り立つ．一般には次の定理が成り立つ．

**定理 5.118** 行列 $A$ は固有値

$$\overbrace{\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2, \cdots, \lambda_2}_{m_2}, \cdots, \underbrace{\lambda_r, \cdots, \lambda_r}_{m_r}}^{n}$$

をもつとする．このとき $A$ はある正則行列 $P$ を用いて

$$D = P^{-1}AP,$$

$$D = \left.\begin{bmatrix} J(\lambda_1, m_1) & & & \\ & J(\lambda_2, m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r, m_r) \end{bmatrix}\right\} n,$$

$$J(\lambda, m) = \left.\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}\right\} m$$

の形にブロック対角化される．$D$ を**ジョルダン標準形（Jordan canonical form）**という．ここで $J(\lambda, m)$ を**ジョルダンブロック（Jordan block）**または**ジョルダン細胞（Jordan cell）**という．

**例 5.119 (ジョルダン標準形の具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

を対角化する．

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

より，固有値は 2, $-1$ (2 重) となる．$\lambda = 2$ のとき，

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，$(A - 2E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c\boldsymbol{p}_1 \qquad (c \neq 0)$$

と得られる．$\lambda = -1$ のとき，

$$A + E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解いて固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-x_3\\0\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c\\0\\c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=c\boldsymbol{p}_2 \qquad (c\neq 0)$$

と得られる．$\dim(W(-1))=1$ であり対角化できない．$(A+E)^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間である一般固有空間 $W_2(-1)$ を考える．このとき，

$$[A+E\mid \boldsymbol{p}_2]=\begin{bmatrix}2&3&2&-1\\0&0&0&0\\1&2&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{bmatrix}1&0&1&-5\\0&1&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

より，$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_2$ を解いて

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-5-x_3\\3\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\3\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{p}_3+c\boldsymbol{p}_2 \qquad (c\neq 0)$$

となるので，$(A+E)^2\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{0}$, $(A+E)\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2$ をみたす一般固有ベクトル $\boldsymbol{p}_3$ が得られる．このとき $A$ はジョルダン標準形に

$$D=P^{-1}AP, \qquad D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}, \quad P=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1&\boldsymbol{p}_2&\boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&-5\\0&0&3\\1&1&0\end{bmatrix}$$

と分解される．

**問 5.120 (ジョルダン標準形)** 数値を代入し $D=P^{-1}AP$ が成り立つことを確認せよ．

**問 5.121 (ジョルダン標準形)**

$$J=\begin{bmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{bmatrix}$$

に対して

$$J^k=\begin{bmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&&\\&\lambda^k&\ddots&\\&&\ddots&k\lambda^{k-1}\\&&&\lambda^k\end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

# 6　2次形式

## 6.1　2 次曲線

$\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $F(x,y)=0$ を考える．1 次式

$$F(x,y)=ax+by+c=0$$

で与えられる曲線は直線である．2 次式

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

で与えられる曲線を **2 次曲線**という．

**例 6.1 (放物線の例)** 放物線は 2 次曲線である．これを**放物形**という．

- $y$ 軸に対称な放物線 $y = x^2$ は $F = x^2 - y = 0$ と表されるので 2 次曲線である．
- $x$ 軸に対称な放物線 $x = y^2$ は $F = y^2 - x = 0$ と表されるので 2 次曲線である．
- 2 次曲線 $F = x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$ で与えられる曲線は直線 $y = x$ に対称な放物線である．この放物線は曲線 $x = y^2$ を $\pi/4$ 回転させたものであるから，$x = (x' + y')/\sqrt{2}$, $y = (-x' + y')/\sqrt{2}$ とし $(x', y')$ を $(x, y)$ に置き換えれば導出される．

**例 6.2 (楕円の例)** 楕円は 2 次曲線である．これを**楕円形**という．

- 楕円 $x^2/4 + y^2/9 = 1$ は $F = 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ と表されるので 2 次曲線である．
- 楕円 $x^2 + y^2/4 = 1$ は $F = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$ と表されるので 2 次曲線である．
- 2 次曲線 $F = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4 = 0$ で与えられる曲線は楕円である．この楕円は楕円 $x^2 + y^2/4 = 1$ を $\pi/4$ 回転させたものと等しい．

**例 6.3 (双曲線の例)** 双曲線は 2 次曲線である．これを**双曲形**という．

- 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ は $F = x^2 - y^2 - 1 = 0$ と表されるので 2 次曲線である．
- 双曲線 $x^2 - y^2/4 = -1$ は $F = 4x^2 - y^2 + 4 = 0$ と表されるので 2 次曲線である．
- 2 次曲線 $F = 3x^2 + 3y^2 + 10xy + 4 = 0$ で与えられる曲線は双曲線である．この双曲線は双曲線 $x^2 - y^2/4 = -1$ を $\pi/4$ 回転させたものと等しい．

## 6.2 2 次曲線の中心

2 次曲線は

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \alpha\, x^2 + 2\beta\, xy + \gamma\, y^2 + b_1\, x + b_2 y + c \\
&= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c \\
&= \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c = F(\boldsymbol{x}), \\
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}&, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と表される．

**定義 6.4 (曲線の中心)** 曲線 $F = 0$ が点 $(x_0, y_0)$ に関して点対称なとき，$(x_0, y_0)$ を曲線 $F = 0$ の**中心**という．

**定理 6.5 ( 2 次曲線の中心)** 2 次曲線 $F = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ に中心が存在するための必要十分条件は，$A$ が正則であることである．

(証明)　曲線 $F = 0$ がある点 $(x_0, y_0)$ に関して点対称であるための必要十分条件は，すべての $F = 0$ 上の点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}$ に対して，$\boldsymbol{x}_0 - \tilde{\boldsymbol{x}}$ も $F = 0$ 上の点となるような $\boldsymbol{x}_0$ が一意に存在ことである．すなわち，

$$\begin{aligned}
0 = F(\boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}) &= (\boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}})^T A (\boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{b}^T (\boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}) + c \\
&= \boldsymbol{x}_0{}^T A \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_0{}^T A \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^T A \boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}^T A \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}^T \tilde{\boldsymbol{x}} + c
\end{aligned}$$

に対して，

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{x}_0 - \tilde{\boldsymbol{x}}) &= (\boldsymbol{x}_0 - \tilde{\boldsymbol{x}})^T A (\boldsymbol{x}_0 - \tilde{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{b}^T (\boldsymbol{x}_0 - \tilde{\boldsymbol{x}}) + c \\
&= \boldsymbol{x}_0{}^T A \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0{}^T A \tilde{\boldsymbol{x}} - \tilde{\boldsymbol{x}}^T A \boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}^T A \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{b}^T \tilde{\boldsymbol{x}} + c \\
&= -2\boldsymbol{x}_0{}^T A \tilde{\boldsymbol{x}} - 2\tilde{\boldsymbol{x}}^T A \boldsymbol{x}_0 - 2\boldsymbol{b}^T \tilde{\boldsymbol{x}} = -2\left(A^T \boldsymbol{x}_0 + A \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}\,,\, \tilde{\boldsymbol{x}}\right) = -2\,(2A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}\,,\, \tilde{\boldsymbol{x}}) = 0
\end{aligned}$$

をみたす $\boldsymbol{x}_0$ が一意に存在することである．任意の $\tilde{\boldsymbol{x}}$ に対して成立するためには $2A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ でなければならない．よって $A\boldsymbol{x}_0 = -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$ を得る．この方程式で解 $\boldsymbol{x}_0$ が一意に存在するための必要十分条件は $A$ が正則となることである．

**定義 6.6 (有心，無心 2 次曲線)** $\det(A) = \alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$ となる 2 次曲線を**有心 2 次曲線**という．$\det(A) = \alpha\gamma - \beta^2 = 0$ となる 2 次曲線を**無心 2 次曲線**という．

**例 6.7 (有心，無心 2 次曲線)** 楕円形と双曲形は有心 2 次曲線である．放物形は無心 2 次曲線である．

## 6.3　2 次曲線の平行移動

**定理 6.8 (2 次曲線の平行移動)** 有心 2 次曲線

$$F = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c = 0$$

は平行移動 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}$ により，

$$F = \tilde{\boldsymbol{x}}^T A \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{c} = \alpha\,\tilde{x}^2 + 2\beta\,\tilde{x}\tilde{y} + \gamma\,\tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0$$

と表される．

(証明)　2 次曲線は

$$F = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + c$$

と表される．これに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}$ を代入すると

$$\begin{aligned}
F &= (\boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}, A(\boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}})) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}) + c \\
&= (\boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}, A\boldsymbol{x}_0 + A\tilde{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}) + c \\
&= (\boldsymbol{x}_0, A\boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{x}_0, A\tilde{\boldsymbol{x}}) + (\tilde{\boldsymbol{x}}, A\boldsymbol{x}_0) + (\tilde{\boldsymbol{x}}, A\tilde{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{x}}) + c \\
&= (\tilde{\boldsymbol{x}}, A\tilde{\boldsymbol{x}}) + \{(\boldsymbol{x}_0, A\tilde{\boldsymbol{x}}) + (A\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{x}})\} + \{(\boldsymbol{x}_0, A\boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_0) + c\}
\end{aligned}$$

となる．ここで一般に

$$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T(A\boldsymbol{y}) = (A^T\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} = (A^T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A^T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

となるので，

$$\begin{aligned} F &= (\tilde{\boldsymbol{x}}, A\tilde{\boldsymbol{x}}) + \{(A^T\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{x}}) + (A\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{x}})\} + \{(\boldsymbol{x}_0, A\boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_0) + c\} \\ &= (\tilde{\boldsymbol{x}}, A\tilde{\boldsymbol{x}}) + (A^T\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{x}}) + \{(\boldsymbol{x}_0, A\boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_0) + c\} \\ &= (\tilde{\boldsymbol{x}}, A\tilde{\boldsymbol{x}}) + (\tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{x}}) + \tilde{c} \\ &= \tilde{\boldsymbol{x}}^T A\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{b}}^T\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{c} \end{aligned}$$

と表される．ただし，

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = A^T\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}, \qquad \tilde{c} = (\boldsymbol{x}_0, A\boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_0) + c$$

とおいた．$\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0}$ とおく．$A = A^T$ であることと $A$ が正則であることに注意すると，

$$2A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

より，中心は

$$\boldsymbol{x}_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}\boldsymbol{b}$$

と得られる．以上より，平行移動 $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}} - A^{-1}\boldsymbol{b}/2$ により中心は原点に移り，2 次曲線は $F = \tilde{\boldsymbol{x}}^T A\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{c}$ となる．

## 6.4　2 次曲線の標準形

**定理 6.9 (2 次曲線の標準形)** 原点を中心とする有心 2 次曲線

$$F = \alpha\, x^2 + 2\beta\, xy + \gamma\, y^2 + c = 0$$

は回転変換で**標準形**

$$F = \tilde{\alpha}\, \tilde{x}^2 + \tilde{\gamma}\, \tilde{y}^2 + c = 0$$

に写される．

（証明）　2 次曲線

$$F = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + c$$

の係数 $A$ は対称行列なので直交行列 $R$ により対角化される．すなわち，

$$D = R^{-1}AR = R^TAR, \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

が成り立つ．これより，

$$A = RDR^T$$

であることを用いると，

$$\begin{aligned}F &= \boldsymbol{x}^T(RDR^T)\boldsymbol{x} + c = \left(\boldsymbol{x}^T R\right)^T D(R^T\boldsymbol{x}) + c = \tilde{\boldsymbol{x}}^T D\tilde{\boldsymbol{x}} + c \\ &= \begin{bmatrix}\tilde{x} & \tilde{y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x} \\ \tilde{y}\end{bmatrix} = \lambda_1\,\tilde{x}^2 + \lambda_2\,\tilde{y}^2 + c = \tilde{\alpha}\,\tilde{x}^2 + \tilde{\beta}\,\tilde{y}^2 + c\end{aligned}$$

となる．ただし，$\tilde{\boldsymbol{x}} = R^T\boldsymbol{x}$, $\tilde{\alpha} = \lambda_1$, $\tilde{\beta} = \lambda_2$ とおく．

**定理 6.10 ( 2 次曲線の分類)** 2 次曲線 $F = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + c$ は $\det(A) > 0$ のとき楕円形であり，$\det(A) < 0$ のとき双曲形であり，$\det(A) = 0$ のとき放物形である．

(証明)

$$\det(A) = \det(RDR^T) = \det(D) = \lambda_1\lambda_2 = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$$

と

$$F = \tilde{\alpha}\,\tilde{x}^2 + \tilde{\gamma}\,\tilde{y}^2 + c = 0$$

より分類される．

**例 6.11 ( 2 次曲線のグラフの具体例)** 2 次曲線

$$\begin{aligned}F &= x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2 = 0 \\ &= \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} - 2 \\ &= \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} - 2\end{aligned}$$

のグラフを描く．まず，

$$\det(A) = \begin{vmatrix}1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1\end{vmatrix} = -1 - 2\sqrt{3} < 0$$

より，$F = 0$ は双曲形である．次に $A$ を直交行列 $R$ で対角化すると，

$$R^T AR = D, \qquad D = \begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & -2\end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}$$

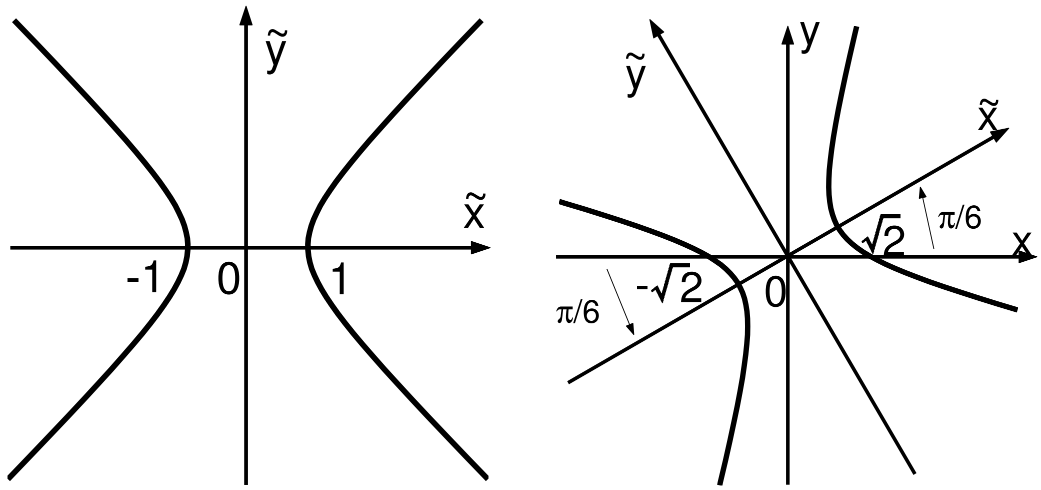
である．$A = RDR^T$ より

$$F = \boldsymbol{x}^T(RDR^T)\boldsymbol{x} - 2 = \left(R^T\boldsymbol{x}\right)^T D(R^T\boldsymbol{x}) - 2 = \tilde{\boldsymbol{x}}^T\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & -2\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}} - 2 = 2\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 - 2 = 0$$

と標準形を得る．ただし，$\tilde{\boldsymbol{x}} = R^T\boldsymbol{x}$ とおく．よって $\tilde{x}\tilde{y}$ 軸の 2 次曲線は双曲線

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 1$$

となる．$\boldsymbol{x} = R\tilde{\boldsymbol{x}}$ より $xy$ 軸では $\pi/6$ 回転したグラフである．




(a) $\tilde{x}\tilde{y}$ 座標　　(b) $xy$ 座標

**例 6.12 ( 2 次曲線のグラフの具体例)** 2 次曲線

$$(\star)\qquad F = 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 \qquad = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 16$$
$$= \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} - 16 = 0$$

のグラフを描く．まず,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

より，$F = 0$ は楕円形である．有心であるから中心 $(x_0, y_0)$ を求める．$x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$ とおき平行移動する．$F = 0$ へ代入すると，

$$F = 8x'^2 + 4x'y' + 5y'^2 + (16x_0 + 4y_0 + 8)x + (4x_0 + 10y_0 - 16)y$$
$$+ (8x_0^2 + 4x_0y_0 + 5y_0^2 + 8x_0 - 16y_0 - 16) = 0$$

となる．$x$, $y$ の項が消えるとき，原点が中心となるので，$x_0$, $y_0$ は連立方程式

$$16x_0 + 4y_0 + 8 = 0, \qquad 4x_0 + 10y_0 - 16 = 0$$

をみたさなければならない．この方程式は $2A\boldsymbol{x}_0 = -\boldsymbol{b}$ とも書けるので，中心 $(x_0, y_0)$ の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

と得られる．あらためて

$$x = x' - 1, \qquad y = y' + 2$$

とおき，座標 $(x', y')$ について書き直すと，

$$F = 8x'^2 + 4x'y' + 5y'^2 - 36 = \boldsymbol{x}'^T A\boldsymbol{x}' - 36 = 0$$

と表される．次に行列 $A$ の固有値は $9, 4$ であり，直交行列 $R$ で対角化すると，

$$R^T A R = D, \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

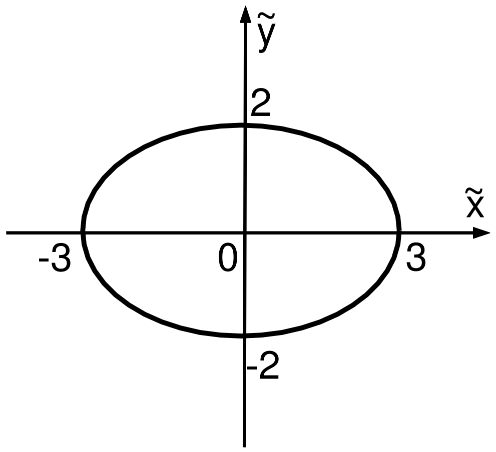
である．ここで $\theta$ は $\tan\theta = 2$ をみたす値とする．$\tan\theta = 2 > \sqrt{3}$ より $\theta$ は $\pi/3$ より少し大きい値である．$A = RDR^T$ より

$$F = \boldsymbol{x}'^T (RDR^T)\boldsymbol{x}' - 36 = (R^T\boldsymbol{x}')^T D(R^T\boldsymbol{x}') - 36 = \tilde{\boldsymbol{x}}^T A\tilde{\boldsymbol{x}}^T - 36 = \tilde{\boldsymbol{x}}^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} - 36$$
$$= 4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 - 36 = 0$$

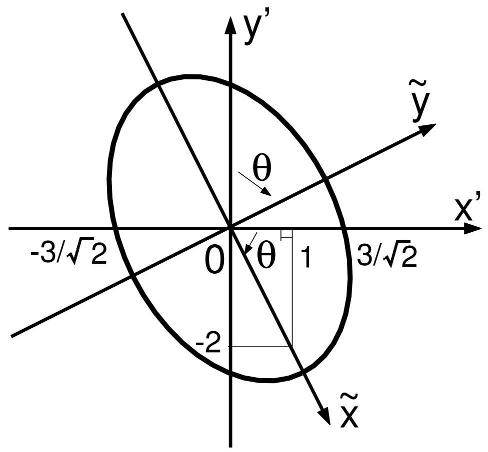
と標準形が得られる．ここで $\tilde{\boldsymbol{x}} = R^T\boldsymbol{x}'$ とおいた．$\tilde{x}\tilde{y}$ 軸平面では 2 次曲線は

$$\left(\frac{\tilde{x}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{y}}{2}\right)^2 = 1$$

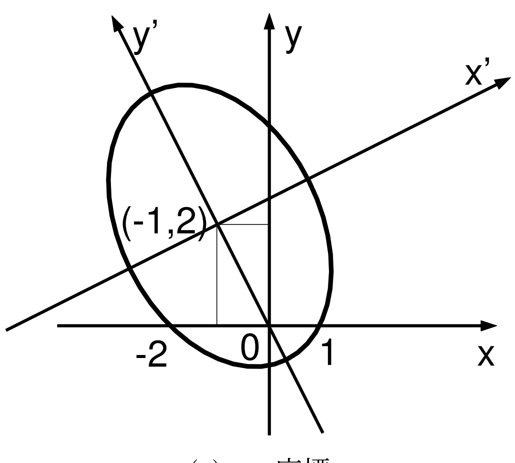
となる．これは中心が原点の楕円形である．この曲線を $x'y'$ 軸平面に戻す．$\boldsymbol{x}' = R\tilde{\boldsymbol{x}}$ であるから，時計回りに角 $\theta$ の回転させたグラフを $x'y'$ 軸平面に描く．さらに平行移動 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}_0$ より，楕円の中心が $(-1, 2)$ となるように $xy$ 軸平面にグラフを描く．




(a) $\tilde{x}\tilde{y}$ 座標




(b) $x'y'$ 座標




(c) $xy$ 座標

**例 6.13 (放物形)** 2 次曲線

$$F = x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 25 = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + 25 = 0$$

のグラフを書く．まず,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

とおく．$\det(A) = 0$ より $F = 0$ は放物形である．$A$ は無心曲線であるから中心はない．$A$ を対角化すると,

$$R^T AR = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

となる．$A = RDR^T$ を $F = 0$ に代入すると

$$\begin{aligned} F &= \boldsymbol{x}^T RDR^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + 25 = (R^T\boldsymbol{x})^T D(R^T\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{b}^T R)(R^T\boldsymbol{x}) + 25 \\ &= \tilde{\boldsymbol{x}}^T D\tilde{\boldsymbol{x}} + (R^T\boldsymbol{b})^T\tilde{\boldsymbol{x}} + 25 = \tilde{\boldsymbol{x}}^T D\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{b}}^T\tilde{\boldsymbol{x}} + 25 = 0 \end{aligned}$$

となる．ここで $\tilde{\boldsymbol{x}} = R^T\boldsymbol{x}$, $\tilde{\boldsymbol{b}} = R^T\boldsymbol{b}$ とおいた.

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = R^T\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\sqrt{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

より，2 次曲線は

$$F = 2\tilde{y}^2 - 2\sqrt{2}(2\tilde{x} - \tilde{y}) + 25 = 0$$

となる．書き直すと

$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\tilde{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\sqrt{2}$$

となる．これは頂点が $\left(3\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ の放物線である．また，この放物線は直線 $\tilde{y} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ に線対称であり，直線 $\tilde{x} = 3\sqrt{2}$ に接している．$\boldsymbol{x} = R\tilde{\boldsymbol{x}}$ を用いて $\dfrac{\pi}{4}$ 回転すると $(x, y)$ に関する曲線に戻る．頂点は

$$\boldsymbol{x}_0 = R\tilde{\boldsymbol{x}}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

より $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ となる．また，$\tilde{\boldsymbol{x}} = R^T\boldsymbol{x}$ より，$\tilde{y} = \dfrac{-x + y}{\sqrt{2}}$ を $\tilde{y} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ に代入すると，$x - y = 1$ となる．$\tilde{x} = 3\sqrt{2}$ に $\tilde{x} = \dfrac{x + y}{\sqrt{2}}$ を代入すると，$x + y = 6$ となる．よって $F = 0$ は頂点が $(7/2, 5/2)$ の放物形で，直線 $x - y = 1$, $x + y = 6$ を軸とする放物線である.

### 6.5 分類外の 2 次曲線

**まとめ 6.14 (2 次曲線の分類)** 2 次曲線は楕円，双曲線，放物線以外のグラフもありうる．標準形の形で次のように分類される：

(i) **楕円**：$\det(A) > 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のとき.

(ii) **点楕円**：$\det(A) > 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ のとき，原点のみの楕円形.

(iii) **虚の楕円**：$\det(A) > 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ のとき，$\dfrac{x^2}{(ia)^2} + \dfrac{y^2}{(ib)^2} = 1$ より $\mathbb{R}^2$ ではグラフは存在しない.

(iv) **双曲線**：$\det(A) < 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ のとき.

(v) **交わる 2 つの直線**：$\det(A) < 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ のとき，$(bx - ay)(bx + ay) = 0$ と書き換えて 2 直線 $bx - ay = 0$, $ab + ay = 0$ となる.

(vi) **放物線**：$\det(A) = 0$, $y = ax^2 + bx + c$ または $x = ay^2 + by + c$ のとき.

(vii) **平行な 2 つの直線**：$\det(A) = 0$, $x^2 = c > 0$ または $y^2 = c > 0$ のとき.

(viii) **重なった 1 つの直線**：$\det(A) = 0$, $x^2 = 0$ または $y^2 = 0$ のとき.

(ix) **虚の平行 2 直線**：$\det(A) = 0$, $x^2 = c < 0$ または $y^2 = c < 0$ のとき.

**注意 6.15 (交わる 2 直線)** 2 次曲線

$$F = x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

は $\det(A) = -9/4 < 0$ より双曲形であるが,

$$F = (x - y - 1)(x - 4y + 2) = 0$$

と因数分解されるので，$F = 0$ は 2 つの直線

$$x - y - 1 = 0, \qquad x - 4y + 2 = 0$$

を表す.

**注意 6.16 (平行 2 直線)** 2 次曲線

$$F = x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$$

は $\det(A) = 0$ より無心 2 次曲線である.

$$F = (x - y + 5)(x - y + 1)$$

と因数分解されるので，2 つの平行な直線を表す.

**注意 6.17 (虚の直線)** 2 次曲線 $F = x^2 + 1 = 0$ は $F = (x + i)(x - i) = 0$ と書けるから，2 つの**虚の直線**を表す．よって，実数の範囲内ではグラフは存在しない.

## 6.6 演習問題 〜 2 次曲線

**問 6.18 (2 次曲線)** 次の 2 次曲線のグラフを書け.

(1) $8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16=0$ (2) $x^2-6xy+y^2+2x+10y-11=0$

(3) $2x^2+5xy+2y^2-10x-14y+12=0$ (4) $x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$

(5) $5x^2-4xy+y^2-4x+2y+2=0$ (6) $3x^2+2xy+3y^2-16y+23=0$

(7) $2x^2+4xy+5y^2-4x+2y+2=0$ (8) $x^2+4xy+3y^2-6x-10y+8=0$

(9) $x^2+10xy+y^2-12x-12y+6=0$ (10) $x^2-2xy+y^2-6x-2y+25=0$

(11) $x^2+2xy+y^2+2x-6y=0$ (12) $x^2-2xy+y^2+6x-6y+5=0$

(13) $4x^2-4xy+y^2+10x-10y-\dfrac{7}{5}=0$ (14) $3x^2+12xy+12y^2+2x+2y-\dfrac{89}{3}=0$

(15) $9x^2+24xy+16y^2-26x+7y-34=0$ (16) $x^2+4xy+4y^2-10y=0$

(17) $x^2-2xy+y^2-2x-y-1=0$ (18) $9x^2+12xy+4y^2-15x-10y+6=0$

(19) $2x^2+4xy-y^2-6=0$ (20) $13x^2-10xy+13y^2-72x+72y+72=0$

(21) $2x^2+4xy-y^2-20x-8y+32=0$ (22) $2x^2+6xy+10y^2-16x-46y+54=0$

(23) $x^2+24xy-6y^2-50x+25=0$ (24) $3x^2+12xy+12y^2+2\sqrt{5}x+2\sqrt{5}y=0$

(25) $3x^2+2xy-8y^2-14x+22y-5=0$ (26) $5x^2+2xy+5y^2-2x-10y-7=0$

(27) $3x^2-4xy+6y^2-8x-4y+3=0$ (28) $x^2-6xy+y^2-2x+6y-3=0$

(29) $4x^2-4xy+y^2+6x-8y+3=0$ (30) $2x^2-5xy+2y^2+2x+2y=0$

(31) $x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2+x+\sqrt{2}y-2=0$ (32) $5x^2+20xy+20y^2+4x+8y+4=0$

(33) $36x^2+60xy+25y^2+12x+10y+1=0$ (34) $3x^2+2xy+3y^2+8x-8y+4=0$

(35) $\sqrt{3}xy+y^2-\sqrt{3}x+y=0$ (36) $7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-8\sqrt{3}x-8y=0$

(37) $xy-x+y=0$ (38) $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2-2\sqrt{3}x-2y=0$

(39) $x^2-2xy+y^2+(4-\sqrt{2})x-(4+\sqrt{2})y=0$ (40) $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2-2\sqrt{3}x-2y=0$

(41) $x^2-xy+y^2=0$ (42) $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=0$ (43) $4x^2+2\sqrt{3}xy+2y^2=0$

(44) $3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2=0$ (45) $-x^2+2\sqrt{3}xy+y^2=0$ (46) $4x^2+4xy+y^2=0$

(47) $-x^2+4xy+2y^2=0$ (48) $3x^2+2xy+2y^2=0$ (49) $x^2+2xy+2y^2=0$

(50) $x^2+2xy+y^2=0$ (51) $2x^2-2xy+y^2=0$ (52) $-5x^2+6xy-2y^2=0$