解析学II（担当：近藤）　#3 2005年10月27日

[I]　次の合成関数の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．ただし，u, v の関数として表せ．

(1) $z = x^2 - y^2$，$x = \cosh(2u+3v)$，$y = \sinh(3u-2v)$

(2) $z = f(x+3y)$，$x = u - 2v$，$y = 3u - 4v$

[II]　次の座標変換のヤコビアンを求めよ．

(1) $(x, y) \leftrightarrow (r, t)$: $x = r\cosh t,\ y = r\sinh t$

(2) $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, \varphi)$: $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$

[III]　直交座標 xy と極座標 $r\theta$ との座標変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を考える．

(1) 点 P が $r\theta$ 座標で $(r, \theta) = \left(1, -\dfrac{2\pi}{3}\right), \left(2, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ となるとき，xy 座標における座標 (x, y) をそれぞれ求めよ．

(2) 点 P が xy 座標で $(x, y) = \left(1, \sqrt{3}\right), (-1, -1)$ となるとき，$r\theta$ 座標における座標 (r, θ) をそれぞれ求めよ．

(3) 座標変換 $(x, y) \leftrightarrow (r, \theta)$ のヤコビアンを求めよ．

(4) 関数 z の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ と x, y を用いてそれぞれ表せ．

(5) 偏微分演算子 $\dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ と x, y を用いてそれぞれ表せ．

(6) 関数 z の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ と r, θ を用いてそれぞれ表せ．

(7) 偏微分演算子 $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ を $\dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial}{\partial \theta}$ と r, θ を用いてを用いてそれぞれ表せ．

(8) 関数 $F = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ を r, θ で表せ．