# 解析学II

**近藤弘一**

**最終更新日：平成18年1月18日**

# 目 次

# 1 空間の図形

## § 1.1 $\mathbb{R}^n$ の直線

**定義 1.1** **(位置ベクトル)** $\mathbb{R}^n$ の空間の点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して，列ベクトル

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

を点 $P$ の**位置ベクトル（position vector）**という．点 $P$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ を同一視する． □

**定義 1.2** **(直線)** $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{x}$ がパラメータ $t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p}$$

と表されるとする．このとき点 $\boldsymbol{x}(t)$ の軌跡を**直線（line）**という．$\boldsymbol{p}$ を**方向ベクトル（direction vector）**という． □

**定理 1.3** **(内分点)** $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を通る直線をむすび，その直線上の点で点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ からの距離の比が $t : 1-t$ となる点 $\boldsymbol{c}$ は

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$$

で与えられる．$0 < t < 1$ のとき点 $\boldsymbol{c}$ を 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内分点（internally dividing point）**といい，$t < 0, 1 < t$ のとき**外分点（externally dividing point）**という． □

**定義 1.4** **(直線)** $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{x}$ がパラメータ $t, s \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{q}$$

と表されるとする．このとき点 $\boldsymbol{x}(t)$ の軌跡を**平面（plane）**という． □

## § 1.2 $\mathbb{R}^2$ の直線

**注意 1.5** **（直線の方程式）** $xy$ 平面内の直線の方程式は

$$y = ax + b$$

と表される．$a$ は傾きを表し，$b$ は $y$ 切片である．また，式変形して

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

と表すと，$a$ は $x$ 切片であり，$b$ は $y$ 切片を表す．式変形すると様々な意味をもつ．通常，直線の方程式の標準形は，非同次 1 次方程式

$$ax + by + c = 0$$

の形で表す. □

**注意 1.6** **（直線の方程式と方向ベクトル）** $xy$ 平面内の直線を

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

と表す．このとき，パラメータ $t$ を用いてベクトルで表記すると

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

とパラメータ表示される．$\boldsymbol{p}$ は直線の向きを表し，**方向ベクトル（direction vector）**という． □

**注意 1.7** **（直線の方程式と法線ベクトル）** $xy$ 平面内の直線を

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

と表す．このとき，ベクトルで表記すると

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0, \qquad \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

と表される．$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ であり，$\boldsymbol{n}$ は直線に直交するベクトルである．$\boldsymbol{n}$ を**法線ベクトル（normal vector）**という． □

**例 1.8** **（直線）** 2 点 $A(2, -3), B(-1, 1)$ を通る直線を考える．この直線の方向ベクトルは

$$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

である．直線の方程式のパラメータ表示は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3t \\ -3+4t \end{bmatrix}$$

である．$x = 2-3t, y = -3+4t$ で $t$ を消去すると

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{4}$$

となる．式変形して

$$4(x-2) + 3(y+3) = 0$$

とする．この式より，この直線は法線ベクトルが

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

で点 $(2,-3)$ を通る直線である．さらに式変形して一般形で表すと

$$4x + 3y + 1 = 0$$

である．また，式変形して

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, \qquad \frac{x}{-\frac{1}{4}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1$$

とする．直線の傾きは $-\frac{4}{3}$ であり，$x$ 切片は $-\frac{1}{4}$ で $y$ 切片は $-\frac{1}{3}$ である．

次にこの直線と直交し点 $A(2,-3)$ を通る直線を考える．法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が方向ベクトルとるので，法線の方程式は

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{3}$$

である．式変形すれば

$$3(x-2) - 4(y+3) = 0, \quad 3x - 4y - 18 = 0, \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}, \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{-\frac{9}{2}} = 1$$

と書ける．法線は傾きが $\frac{3}{4}$ で，$x$ 切片が $6$ で，$y$ 切片が $-\frac{9}{2}$ で，法線ベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ である．

□

## § 1.3 $\mathbb{R}^3$ の直線と平面

**定義** 1.9 **(直線)** $xyz$ 空間における直線は，パラメータ $t$ を用いてベクトルで表すと，

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

と書ける．$\boldsymbol{p}$ は**方向ベクトル**である．成分で表すと，$\mathbb{R}^3$ の**直線の方程式**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

が得られる． □

**定義** 1.10 **(平面の方程式)** $xyz$ 空間内の**平面の方程式**は

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

と表される．ベクトルで表記すると

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$$

となる．$\boldsymbol{n}$ を**法線ベクトル**という． □

**注意** 1.11 **(平面，直線)** $x, y, z$ に関する非同次 1 次方程式の一般形は

$$ax + by + cz + d = 0$$

である．この方程式は $xyz$ 空間内の法線ベクトルが $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ で点 $(0, 0, -d/c)$ を通る平面を表す．非同次 1 次方程式を 2 本の方程式で連立すると

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

である．方程式のそれぞれは法線ベクトルが $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}^T$ と $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}^T$ の平面を表す．よって，この連立方程式の解集合は，2 つの平面の共有点の集合である直線となる． □

**例** 1.12 **(直線)** 2 点 $A(1, 1, -2), B(3, 0, 1)$ を通る $xyz$ 空間内の直線を考える．この直線の方向ベクトルは

$$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

である．直線のパラメータ表示は

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2t\\1-t\\-2+3t\end{bmatrix}$$

となる．$x=1+2t, y=1-t, z=-2+3t$ で $t$ を消去すると，直線の方程式

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$$

を得る． □

**例 1.13** **（平面）** 3 点 $A(1,1,-2)$, $B(3,0,1)$, $C(2,1,-1)$ を通る $xyz$ 空間内の平面を考える．法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\3&1\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_x+\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_y+\begin{vmatrix}2&1\\-1&0\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_z=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

であり，点 $A(1,1,-2)$ を通るので，$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\overrightarrow{OA})=0$ より平面の方程式

$$-(x-1)+(y-1)+(z+2)=0$$

を得る．一般形で書けば

$$x-y-z-2=0$$

となる．さらに変形して

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{-2}+\frac{x}{-2}=1$$

とする．平面と $x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸の交点はそれぞれ $x=2, y=-2, z=-2$ である． □

**例 1.14** **（平面）** 3 点 $A(1,1,-2)$, $B(3,0,1)$, $C(2,1,-1)$ を通る $xyz$ 空間内の平面を考える．平面の方程式の一般形は

$$ax+by+cz+1=0$$

であるから，これに各点の座標を代入すると連立方程式

$$a+b-2c+1=0,\quad 3a+c+1=0,\quad 2a+b-c+1=0$$

を得る．この方程式の解は

$$(a,b,c)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

である．よって平面の方程式は $x-y-z-2=0$ となる． □

**例 1.15** **（直線）** 連立方程式

$$x - y - z - 2 = 0, \quad 2x + y - z - 5 = 0$$

で定まる直線を考える．この直線は 2 つの平面の共有点である．第 2 式から第 1 式を引いて $z$ を消去すると

$$x + 2y - 3 = 0$$

であり，第 1 式と第 2 式を足して $y$ を消去すると

$$3x - 2z - 7 = 0$$

となる．これらより

$$x = \frac{y - \frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{z + \frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{y - \frac{3}{2}}{-1} = \frac{z + \frac{7}{2}}{3}$$

を得る．直線は点 $(0, \frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$ を通り，方向ベクトル $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$ の直線である．また，パラメータ表示すると

$$x = 2t, \quad y = -t + \frac{3}{2}, \quad z = 3t - \frac{7}{2}$$

である．$t$ は任意であるから，$t$ を $t + \frac{1}{2}$ と置き換えると，

$$x = 2t + 1, \quad y = -t + 1, \quad z = 3t - 2$$

となり，式が簡単となる．このとき平面の方程式は

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 2}{3}$$

となる．直線は点 $(1, 1, -2)$ も通る． □

**例 1.16** **（直線）** 連立方程式

$$x - y - z - 2 = 0, \quad 2x + y - z - 5 = 0$$

で定まる直線を考える．この直線は 2 つの平面の解集合であるから，連立方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

を解く．拡大係数行列を簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

となる．このとき方程式は

$$x - \frac{2}{3}z = \frac{7}{3}, \quad y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$

と変形される．階数が 2 であるから，任意定数は 1 個であるので，任意定数 $t$ を $z = t$ とおくと，

$$x = \frac{2}{3}t + \frac{7}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}, \quad z = t$$

を得る．$t$ は任意定数であるから，$t$ を $3t - 2$ と置き換えると，

$$x = 2t + 1, \quad y = -t + 1, \quad z = 3t - 2$$

を得る．$t$ を消去すると平面の方程式

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

を得る． □

## § 1.4 平行四辺形の面積

**定理 1.17** **（平行四辺形の面積）** 点 $O$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $D(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ からなる平行四辺形 $OADB$ の面積は

$$S = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

で与えられる．

（証明） まず,

$$\theta = \angle AOB, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

とおく．すると,

$$\begin{aligned}
S &= \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)^2} && (1) \\
&= \sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} = \sqrt{({a_1}^2 + {a_2}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} && (2) \\
&= \sqrt{{a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + {a_2}^2{b_1}^2} = \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| && (3) \\
&= \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) && (4)
\end{aligned}$$

と得られる． □

## § 1.5 演習問題 ～ 直線，平面

**問** 1.18 **（直線）** 次の $\mathbb{R}^2$ の直線に関して，傾き，$y$ 切片，$x$ 切片，方向ベクトル，法線ベクトルを求めよ．また，この直線に直交し原点を通る法線を求めよ．

(1) $y = 3x - 2$ (2) $3x - 2y + 5 = 0$ (3) 2 点 $(3, 2), (1, -2)$ を通る直線

(4) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2}$ (5) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1$

□

**問** 1.19 **（直線）** 次の $\mathbb{R}^2$ の直線をパラメータ表示で表せ．また，直線の方向ベクトル，法線ベクトル，$x$ 切片，$y$ 切片，傾きを求めよ．さらには，この直線に直交し点 $(1, 2)$ を通る法線を求めよ．

(1) 点 $(1, -1), (2, 3)$ を通る直線 (2) 点 $(0, 2), (1, 0)$ を通る直線

(3) 点 $(-3, 1), (4, 2)$ を通る直線 (4) 点 $(2, 1), (5, -1)$ を通る直線

(5) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{4}$ (6) $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{-3}$ (7) $\dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y-3}{5}$ (8) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-1}$

(9) $y = 2x - 1$ (10) $y = -2x + 3$ (11) $y = 4x - 3$ (12) $y = -3x - 5$

(13) $3x + 2y + 5 = 0$ (14) $-x + y + 1 = 0$ (15) $2x - y - 2 = 0$

(16) $-x - 3y + 1 = 0$ (17) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$ (18) $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{4} = 1$

(19) $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{-5} = 1$ (20) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-3} = 1$

□

**問** 1.20 **（平面）** 次の $\mathbb{R}^3$ の平面の法線ベクトルを求めよ．

(1) $2x - y + 3z + 4 = 0$ (2) 3 点 $(1, 2, -1), (0, 2, 1), (0, 2, 1)$ を通る平面

□

**問** 1.21 **（平面）** 次の 3 点を通る $\mathbb{R}^3$ の平面の方程式を求めよ．

(1) 点 $(1, 2, -1), (0, 1, 2), (3, -1, 0)$ (2) 点 $(0, 1, 2), (-1, 2, -1), (2, 0, -3)$

(3) 点 $(4, 0, 2), (2, -1, 0), (2, 1, 1)$ (4) 点 $(0, 1, 2), (3, -1, 0), (2, 4, 0)$

□

**問** 1.22 **（直線）** 次の $\mathbb{R}^3$ の直線の方向ベクトルを求めよ．

(1) $2x + 3y = 1, 3y + 4z = 2$ (2) $2x + 3y - z = 1, x - 2y + z = -1$

(3) 2 点 $(1, 2, -1), (0, 2, 1)$ を通る直線

□

**問** 1.23 **（平面）** 次の 2 点を通る $\mathbb{R}^3$ の直線をパラメータ表示と成分表示で表せ．

(1) 点 $(1, 2, -1), (0, 1, 2)$ (2) 点 $(0, 1, 2), (-1, 2, -1)$ (3) 点 $(4, 0, 2), (2, -1, 0)$

(4) 点 $(0, 1, 2), (3, -1, 0)$

□

**問** 1.24 **（平面）** 次の $\mathbb{R}^3$ の直線をパラメータ表示せよ．

(1) $2x + 3y + z + 1 = 0, x - y + 2z - 1 = 0$ (2) $x - y + 2z - 2 = 0, 3x + 2y - z + 5 = 0$

□

**問** 1.25 **（平面）** 次の $\mathbb{R}^3$ の平面と直交し点 $(1,2,3)$ を通る直線の方程式を求めよ．また，その交点を求めよ．

(1) $2x+3y+1=0$ (2) $-x+2y-2=0$ (3) $3x-y+2=0$ (4) $-3x-2y+3=0$

□

**問** 1.26 **（平面）** 次の $\mathbb{R}^3$ の直線と直交し点 $(1,2,3)$ を通る直線の方程式を求めよ．また，その交点を求めよ．

(1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ (2) $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-2}$ □

**問** 1.27 **（平行四辺形の面積）** 次の 4 点からなる平行四辺形の面積を求めよ．

(1) $(0,0)$, $(1,3)$, $(3,4)$, $(2,1)$ (2) $(0,0)$, $(-3,1)$, $(-1,3)$, $(2,2)$

(3) $(-2,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(1,-2)$

□

# 2 偏微分

## § 2.1 2 変数関数

**定義 2.1** **（2 変数関数）** 変数 $x, y$ の値に対応して変数 $z$ の値が定まるとき,

$$z = f(x, y)$$

と表記し，$f$ を**2 変数関数**という．このとき $x, y$ を**独立変数（independent variable）**，$z$ を**従属変数（dependent variable）**という．
□

**例 2.2** **（2 変数関数の具体例）** 関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = x^2 + 5xy + 2y^2$$

と与えられるとき，$f(2, -3)$ と表記するときは

$$f(2, -3) = (2)^2 + 5(2)(-3) + 2(-3)^2 = -8$$

を意味する．
□

**問 2.3** **（2 変数関数）** 関数 $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^2$ に対して，値 $f(0, 1)$, $f(1, 1)$, $f(2, 0)$, $f(1, -1)$ を求めよ．
□

**定義 2.4** **（定義域）** 関数 $z = f(x, y)$ の独立変数の組 $(x, y)$ がとりうる領域を**定義域（domain）**という．定義域 $D$ は $xy$ 平面上の集合である．境界を含む場合を**閉領域（closed domain）**と呼び，境界を含まない場合を**開領域（open domain）**と呼ぶ．
□

**例 2.5** **（定義域の具体例）** 境界を含む長方形領域

$$D = \{\, (x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \}$$

は閉領域である．境界を含まない長方形領域

$$D = \{\, (x, y) \mid a < x < b,\ c < y < d \}$$

は開領域である．
□

**例** 2.6 **（定義域の具体例）** 原点を中心とする半径 $a$ の円の境界とその内部の領域

$$D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq a^2\ \right\}$$

は閉領域である．原点を中心とする半径 $a$ の円の内部の領域

$$D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 < a^2\ \right\}$$

は開領域である． □

**例** 2.7 **（実平面）** 実 2 次元平面

$$\mathbb{R}^2 = \{\ (x,y)\ |\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$$

は開領域である． □

**注意** 2.8 **（2 変数関数のグラフ）** 定義域 $D$ は $\mathbb{R}^2$ 平面内の集合である．一方，$z=f(x,y)$ をみたす点 $(x,y,z)$ の集合は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を表す．この曲面を関数 $z=f(x,y)$ の**グラフ**という． □

## § 2.2 極限

**定義** 2.9 **（極限）** 関数 $f(x,y)$ において，定義域内の点 $P(x,y)$ を点 $A(a,b)$ に近づけるとする．ただし $(x,y) \neq (a,b)$ とする．このとき，近づけ方に依らず $f(x,y)$ が同じ 1 つの値 $c$ に近づくならば，$f(x,y)$ は**極限（limit）** $c$ が存在する，または，$f(x,y)$ は $c$ に**収束する（convergent）** といい，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c, \qquad \lim_{x\to a, y\to b} f(x,y) = c,$$
$$\lim_{P\to A} f(x,y) = c, \qquad f(x,y) \to c \quad (x \to a, y \to b)$$

と表記する．

□

**注意** 2.10 **（極限）** $A \in D$ とは限らない．

□

**注意** 2.11 **（極限）** 近づけ方によって，$f(x,y)$ の値が異なるときは，極限が存在しない．

□

**例** 2.12 **（極限）** 関数

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad D = \{\,(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\,\}$$

の原点 $(0,0)$ への極限を考える．$(0,0) \notin D$ であることに注意する．

(a) $x$ 軸（$y=0$ の直線）に沿って近づける場合．$y=0$ を代入した後に $x \to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{y=0, x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

が成り立つ．

(b) $y$ 軸（$x=0$ の直線）に沿って近づける場合．$x=0$ を代入した後に $y \to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{x=0, y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

が成り立つ．

(c) 直線 $y=mx$ に沿って近づける場合．ただし，$m$ は任意の実数とする．$y=mx$ を代入した後に $x \to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{y=mx, x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+m^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

が成り立つ．

(a), (b), (c) より，近づけ方が異なれば $f(x,y)$ が近づく値も変わるので，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ は存在しない．

□

**例 2.13** **（極限）** 関数

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{x+y},\qquad D=\{\,(x,y)\mid (x,y)\neq(0,0)\,\}$$

の原点 $(0,0)$ への極限を考える．$(0,0)\notin D$ であることに注意する．(a) $y$ 軸（$x=0$ の直線）に沿って近づける場合．$x=0$ を代入した後に $y\to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{x=0,y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

が成り立つ．(b) 直線 $y=mx$ に沿って近づける場合．ただし，$m$ は任意の実数とする．$y=mx$ を代入した後に $x\to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{y=mx,x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+mx)}{x+mx}=\lim_{\xi\to 0}\frac{\sin\xi}{\xi}=1$$

が成り立つ．ここで，$\xi=(1+m)x$ とおいた．(a), (b), より，全方向から近づけたとき同じ値 $1$ に収束するので，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y}=1$$

が存在する． □

**例 2.14** **（極限）** 関数

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\qquad D=\{\,(x,y)\mid (x,y)\neq(0,0)\,\}$$

の原点 $(0,0)$ への極限を考える．全方向から近づけるために，

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

とおき，$r\to 0$ の極限を考える．ただし，$\theta$ は $0\leq\theta<2\pi$ の任意の実数とする．このとき，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0$$

となり，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$$

が存在する． □

## § 2.3 連続性

**定義 2.15** **（連続）** 関数 $z = f(x,y)$ は次の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとき点 $(a,b)$ で**連続（continuous）**であるという．

(i) $f(a,b)$ が定義されている．

(ii) 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在する．

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ が成り立つ．

□

**例 2.16** **（連続の具体例）** 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

は原点 $(0,0)$ で連続であるか調べる．(i) $f(0,0) = 0$ と定義されている．(ii) 前述の例題により，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$

が存在する．(iii)　(i), (ii) より

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = f(0,0)$$

が成り立つ．以上，(i), (ii), (iii) より関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続である． □

**例 2.17** **（不連続の具体例）** 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

は原点 $(0,0)$ で連続であるか調べる．まず，極限が存在するか調べる．直線 $y = mx$ に沿って近づけると，

$$\lim_{y=mx, x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

となる．直線の傾き $m$ が異なれば，収束する値 $\dfrac{m}{1+m^2}$ も異なる．よって $(x,y) \to (0,0)$ における極限は存在しない．極限が存在しないので，原点 $(0,0)$ で $f(x,y)$ は連続ではない． □

**例** 2.18 **（不連続の具体例）** 関数

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{x+y} \qquad D=\{\,(x,y)\mid (x,y)\neq(0,0)\,\}$$

は原点 $(0,0)$ で連続であるか考える．まず，前述の例題により，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y}=1$$

が存在する．しかし，原点で値 $f(0,0)$ が定義されていない．よって関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で不連続である．

□

**注意** 2.19 **（除きうる不連続点）** 関数

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{x+y}$$

は原点で不連続である．しかし，不連続点 $(0,0)$ において

$$f(0,0)=1$$

と定義する．すると，関数 $f(x,y)$ は

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=1$$

をみたし，原点 $(0,0)$ で連続となる．このように定義を加えることで連続となる不連続点のことを**除きうる不連続点（removable discontinuity）**という．

□

**問** 2.20 **（連続）** 次の関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続であるか述べよ．除きうる不連続点の場合は，$f(x,y)$ が連続となるよう $f(0,0)$ を定義せよ．

(1) $x^2+y$ (2) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (3) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (4) $\dfrac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ (5) $\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

□

## § 2.4 多変数関数の微分

1 変数関数 $y = f(x)$ において，$x = a$ から $x = a + \Delta x$ への $y$ の増分は

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

である．このとき，$xy$ 平面内の 2 点 $(a, f(a))$, $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ を通る直線の傾きは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ となる．$x = a$ における $y = f(x)$ の微係数は，2 点を近づけたときの傾き $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限

$$\frac{df(a)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

である．このとき $\Delta x \to 0$ は，右から近づける $\Delta x \to +0$ と左から近づける $\Delta x \to -0$ の両方を含むことに注意する．

一方，2 変数関数 $z = f(x, y)$ においては，定義域 $D$ 内の点 $A(a, b)$ から点 $P(a + \Delta x, b + \Delta y)$ への $z$ の増分

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

を考える．このとき $xyz$ 空間内の 2 点 $A'(a, b, c)$, $P'(a + \Delta x, b + \Delta y, z + \Delta z)$ （$c = f(a, b)$ とおく）を通る直線の傾きは

$$\frac{\Delta z}{\rho} = \frac{f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

となる．ただし，$\rho$ は点 $A$, $P$ 間の距離 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ である．点 $P$ を点 $A$ に近づけたときの傾き $\dfrac{\Delta z}{\rho}$ の極限を考える．点 $P$ を点 $A$ へ近づけるとき，近づける方向は $x$ 軸や $y$ 軸に沿った方向だけでなく，全方向から近づけなければならない．

(i) 全方向 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ から近づけたとき，傾き $\dfrac{\Delta z}{\rho}$ の極限が存在すれば，$z$ は**全微分可能**であるという．

(ii) $x$ 軸に沿って $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ （$\rho = |\Delta x| \to 0$）と近づけたとき，傾きの極限

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho} = \lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{\Delta z}{|\Delta x|} = \lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{|\Delta x|} = \pm \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$

が存在すれば，$z$ は $\boldsymbol{x}$ **に関して偏微分可能**であるという．

(iii) $y$ 軸に沿って $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ （$\rho = |\Delta y| \to 0$）と近づけたとき，傾きの極限

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho} = \lim_{|\Delta y| \to 0} \frac{\Delta z}{|\Delta y|} = \lim_{|\Delta y| \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{|\Delta y|} = \pm \lim_{\Delta y \to \pm 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

が存在すれば，$z$ は $\boldsymbol{y}$ **に関して偏微分可能**であるという．

## § 2.5 偏微分

**定義** 2.21 **（偏微分，偏微分係数）** 関数 $f(x,y)$ の点 $(a,b)$ において，極限

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x},\qquad \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}$$

が存在するとき，関数 $f(x,y)$ は点 $(a,b)$ において，$x$ または $y$ に関して**偏微分可能（partial differentiable）**であるという．この極限を**偏微分係数（partial differential coefficient）**という．

□

**定義** 2.22 **（偏動関数）** 定義 $D$ 内の任意の点 $(x,y)$ に対して極限

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

が存在するとき，これらを**偏導関数（partial derivative）**という．偏導関数を求める操作を**偏微分する**という．

□

**注意** 2.23 **（偏微分の記号）** 関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数は

$$\begin{array}{llllll}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}, & \dfrac{\partial f}{\partial x}, & \dfrac{\partial z}{\partial x}, & f_x(x,y), & f_x, & z_x,\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}, & \dfrac{\partial f}{\partial y}, & \dfrac{\partial z}{\partial y}, & f_y(x,y), & f_y, & z_y\end{array}$$

と表記する．

□

**注意** 2.24 **（偏微分）** 関数 $z=f(x,y)$ のグラフは $xyz$ 空間内の曲面となる．このグラフと平面 $y=b$ との共有点のグラフは $z=f(x,b)$ で与えられる曲線となる．このとき関数 $f(x,b)$ は $x$ についての 1 変数関数であるから，$x$ について微分すれば曲線 $z=f(x,b)$ の傾き $f_x(x,b)$ が得られる．

同様にしてグラフ $z=f(x,y)$ と平面 $x=a$ との共有点の曲線 $z=f(a,y)$ は，$y$ についての 1 変数関数であるから，$y$ について微分すれば曲線 $z=f(a,y)$ の傾き $f_y(a,y)$ が得られる． □

**注意** 2.25 **（偏微分）** $x$ に関する偏微分の定義式において，$y$ は定数と考えて $x$ 方向の極限のみを考えている．同様にして，$y$ に関する偏微分の定義式は，$x$ は定数と考えて $y$ 方向の極限のみを考えている．このとき定義式は $x$ と $y$ についての 1 変数関数の微分とそれぞれ等価となる．よって，ひとつの独立変数を除いて他のすべての独立変数を定数と考えて 1 変数関数の微分をすればよい．

□

**例 2.26** **（偏微分）** 関数

$$f(x,y) = 2x^3 + 5xy + 2y^2$$

を $x$ で偏微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + 5xy + 2y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(5xy) + \frac{\partial}{\partial x}(2y^2) = 2\frac{\partial}{\partial x}x^3 + 5y\frac{\partial}{\partial x}x + 2y^2\frac{\partial}{\partial x}1 \\ &= 2 \times 3x^2 + 5y \times 1 + 2y^2 \times 0 = 6x^2 + 5y\end{aligned}$$

となり，$x$ に関する偏導関数が得られる．$y$ で偏微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + 5xy + 2y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(5xy) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^2) = 2x^3\frac{\partial}{\partial y}1 + 5x\frac{\partial}{\partial y}y + 2\frac{\partial}{\partial y}y^2 \\ &= 2x^3 \times 0 + 5x \times 1 + 2 \times 2y = 5x + 4y\end{aligned}$$

となり，$y$ に関する偏導関数が得られる． □

**例 2.27** **（偏微分係数）** 関数 $f(x,y) = 2x^3 + 5xy + 2y^2$ の点 $(1,-2)$ における偏微分係数は

$$\begin{aligned}f_x(1,-2) &= 6x^2 + 5y\,\Big|_{x=1,y=-2} = 6 \times 1^2 + 5 \times (-2) = -4, \\ f_y(1,-2) &= 5x + 4y\,\Big|_{x=1,y=-2} = 6 \times 1 + 4 \times (-2) = -3\end{aligned}$$

となる． □

**例 2.28** **（偏微分）** 関数 $f(x,y) = e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y)$ の偏導関数は，

$$\begin{aligned}f_x &= (e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y))_x \\ &= (e^{x-y})_x\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(\sin(2x^2 - 3xy + 4y))_x \\ &= e^{x-y}(x-y)_x\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(2x^2 - 3xy + 4y)_x\cos(2x^2 - 3xy + 4y) \\ &= e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(4x - 3y)\cos(2x^2 - 3xy + 4y) \\ &= e^{x-y}\left(\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + (4x - 3y)\cos(2x^2 - 3xy + 4y)\right), \\ f_y &= (e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y))_y \\ &= (e^{x-y})_y\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(\sin(2x^2 - 3xy + 4y))_y \\ &= e^{x-y}(x-y)_y\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(2x^2 - 3xy + 4y)_y\cos(2x^2 - 3xy + 4y) \\ &= -e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(-3x + 4)\cos(2x^2 - 3xy + 4y) \\ &= -e^{x-y}\left(\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + (3x - 4)\cos(2x^2 - 3xy + 4y)\right)\end{aligned}$$

となる． □

**問** 2.29 **（偏微分）** 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数と点 $(1,-1)$ における偏微分係数を求めよ．

(1) $f(x,y)=x^4-3x^2y^2+3y^4$ (2) $f(x,y)=x^5+3x^4y^2+4xy^3+y^4$

(3) $f(x,y)=e^{xy^2}qquad(4) \quad f(x,y)=\sin(2x+3y)$

□

## § 2.6 $n$ 変数関数の偏微分

**定義** 2.30 **（多変換数の導関数）** $n$ 変数関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\boldsymbol{x})$ の偏導関数は

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_j+h,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_j)-f(\boldsymbol{x})}{h}\end{aligned}$$

と定義する．ただし，

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

とおく．

□

**例** 2.31 **（多変換数の導関数）** 関数 $w=f(x,y,z)=\sin(2x-y)\cos(y+3z)$ の偏導関数は,

$$\begin{aligned}w_x&=\frac{\partial f}{\partial x}=2\cos(2x-y)\cos(y+3x),\\w_y&=\frac{\partial f}{\partial y}=-\cos(2x-y)\cos(y+3x)-\sin(2x-y)\sin(y+3z)=-\cos(2x-2y-3z),\\w_z&=\frac{\partial f}{\partial z}=-3\sin(2x-y)\sin(y+3x)\end{aligned}$$

となる.

□

**例** 2.32 **（多変換数の導関数）** 関数 $r=r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の偏導関数は,

$$\begin{aligned}r_x&=(\sqrt{x^2+y^2+z^2})_x=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2)_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\\r_y&=(\sqrt{x^2+y^2+z^2})_y=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2)_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r},\\r_z&=(\sqrt{x^2+y^2+z^2})_z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2)_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r}\end{aligned}$$

となる.

□

## § 2.7 高階偏微分

関数 $z=f(x,y)$ の 1 階偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ は $x, y$ に関する 2 変数関数であるから，さらに $x$ または $y$ に関して偏微分することができる．このとき

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}=f_x \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(f_x)_x=f_{xx},\\
\frac{\partial f}{\partial x}=f_x \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=(f_x)_y=f_{xy},\\
\frac{\partial f}{\partial y}=f_y \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(f_y)_x=f_{yx},\\
\frac{\partial f}{\partial y}=f_y \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(f_y)_y=f_{yy}
\end{aligned}
$$

と表記する．これを **2 階偏導関数**という．さらに偏微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx} \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=(f_{xx})_x=f_{xxx},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx} \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=(f_{xx})_y=f_{xxy},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy} \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=(f_{xy})_x=f_{xyx},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy} \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}=(f_{xy})_y=f_{xyy},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx} \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=(f_{yx})_x=f_{yxx},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx} \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}=(f_{yx})_y=f_{yxy},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy} \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=(f_{yy})_x=f_{yyx},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy} \quad &\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=(f_{yy})_y=f_{yyy}
\end{aligned}
$$

と表記し **3 階偏導関数**という．さらに偏微分を繰り返して $x, y$ についてあわせて $n$ 回偏微分してできた導関数を

$$
\frac{\partial^n f}{\partial x^k\cdots\partial y^j\partial x^i}=f_{\underbrace{x\cdots x}_{k}\cdots\underbrace{y\cdots y}_{j}\underbrace{x\cdots x}_{i}} \qquad i+j+\cdots+k=n
$$

と表記し，$n$ **階偏導関数**という．

**例 2.33** **(高階導関数)** 関数 $f(x,y)=2x^3+5xy+2y^2$ の高階偏導関数は,

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+5y, \qquad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=5x+4y,$$

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2+5y)=(6x^2+5y)_x=12x, \quad f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(6x^2+5y)=(6x^2+5y)_y=5,$$

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(5x+4y)=(5x+4y)_x=5, \qquad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(5x+4y)=(5x+4y)_y=4,$$

$$f_{xxx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}(12x)=(12x)_x=12, \qquad f_{xxy}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}(12x)=(12x)_y=0,$$

$$f_{xyx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(5)=(5)_x=0, \qquad f_{xyy}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(5)=(5)_x=0,$$

$$f_{yxx}=\frac{\partial^3 3}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(5)=(5)_x=0, \qquad f_{yxy}=\frac{\partial^3 3}{\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(5)=(5)_y=0,$$

$$f_{yyx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}(4)=(4)_x=0, \qquad f_{yyy}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}(4)=(4)_y=0$$

となり，さらに 4 階以上の偏導関数はすべて 0 となる．ここで，この関数の場合は

$$f_{xy}=f_{yx}, \qquad f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}, \qquad f_{yyx}=f_{yxy}=f_{xyy}$$

となることに注意する． □

**注意 2.34** **(偏微分の可換性)** 一般には偏微分は交換可能ではない：

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}, \qquad f_{xy}\neq f_{yx}$$

□

**定理 2.35** **(偏微分の可換性)** 関数 $f(x,y)$ において，$f_{xy}, f_{yx}$ が存在し，かつこれらが連続関数であるとき，$f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ．(注意）逆は成り立たない． □

**注意 2.36** **(偏微分の可換性)** 偏微分が可換となる十分条件は他にも色々あるが，実用上は上の定理が一番有用である．ほとんどの普通の関数はこの定理の十分条件をみたし，偏微分が $x, y$ について可換となる． □

**問 2.37** **(偏導関数)** 次の関数の高階偏導関数を計算し，$f_{xy}=f_{yx}$, $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$, $f_{yyx}=f_{yxy}=f_{xyy}$ となることを確認せよ．

(1) $f(x,y)=x^3-x^2y+xy^2-y^3+1$ (2) $f(x,y)=x^4-3x^2y^2+3y^4$
(3) $f(x,y)=x^5+3x^4y^2+4xy^3+y^4$ (4) $f(x,y)=e^{xy^2}$ (5) $f(x,y)=\sin(2x+3y)$
(6) $f(x,y)=x^2\cos y-y^2\cos x$ (7) $f(x,y)=\tan^{-1}x^2y$ □

## § 2.8 ランダウの記号

**定義 2.38** **（ランダウの記号）** 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

が成り立つとき,

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$$

と表記する．$o(\cdot)$ は**ランダウ（Landau）の記号**であり，ラージオーと読む．またこのとき，$f$ は $g$ に比べ**無視できる**という． $\square$

**定義 2.39** **（ランダウの記号）** 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = b < \infty$$

が成り立つとき,

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a)$$

と表記する．$O(\cdot)$ は**ランダウ（Landau）の記号**であり，スモールオーと読む．またこのとき $f$ は $g$ で**押さえられる**という． $\square$

**注意 2.40** **（二つのランダウの記号の関係）** 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a)$$

が成り立つとき，$b \neq 0$ であれば $\lim_{x \to a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} - b \right) = 0$ となるので

$$f(x) = b\,g(x) + o(g(x)) \quad (x \to a)$$

が成り立つ. $\square$

**定義 2.41** **（無限大，無限小）** 関数 $f(x), g(x)$ が $x \to a$ において無限小または無限大となるとき，次の呼び方を定義する．

- $f \to 0, g \to 0, f = o(g)$ $(x \to a)$ のとき，$f$ は $g$ より**高次の無限小**と呼ぶ．または $g$ は $f$ より**低次の無限小**と呼ぶ.
- $f \to \pm\infty, g \to \pm\infty, f = o(g)$ $(x \to a)$ のとき，$f$ は $g$ より**低次の無限大**と呼ぶ．または $g$ は $f$ より**高次の無限大**と呼ぶ.
- $f \to 0, g \to 0, f = O(g)$ $(x \to a)$ のとき，$f$ と $g$ とは**同次の無限小**と呼ぶ.
- $f \to \pm\infty, g \to \pm\infty, f = O(g)$ $(x \to a)$ のとき，$f$ と $g$ とは**同次の無限大**と呼ぶ.

$\square$

**例 2.42** **(ランダウの記号の使用例)** $\sin x$ の極限 $x \to 0$ において,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

より

$$\sin x = O(x) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ．よって，$x \to 0$ において $\sin x$ と $x$ とは同次の無限小である．また,

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{x^5} = \frac{R_5(x)}{x^5} = \frac{\frac{\cos(\theta x)}{5!}x^5}{x^5} = \frac{\cos(\theta x)}{5!} \to \frac{1}{5!} \quad (x \to 0)$$
$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{x^4} = \frac{R_5(x)}{x^4} = \frac{\frac{\cos(\theta x)}{5!}x^5}{x^4} = \frac{\cos(\theta x)}{5!}x \to 0 \quad (x \to 0)$$

より,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \quad (x \to 0) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ．よって，$x \to 0$ において $R_5(x)$ と $x^5$ とは同次の無限小であり，$R_5(x)$ は $x^4$ より高次の無限小である．

□

**例 2.43** **(ランダウの記号の使用例)** $\sqrt{x+x^2}$ の極限 $x \to \infty$ において,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+1} = 1$$

より

$$\sqrt{x+x^2} = O(x) \quad (x \to \infty)$$

が成り立つ．よって，$x \to \infty$ において $\sqrt{x+x^2}$ と $x$ とは同次の無限大である．また,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}} = 0$$

より

$$\sqrt{x+x^2} = o(x^2) \quad (x \to \infty)$$

が成り立つ．よって，$x \to \infty$ において $\sqrt{x+x^2}$ は $x^2$ より低次の無限大である．

□

**注意 2.44** **（テイラー展開とランダウの記号）** テイラー展開により

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O\left((x-a)^{n+1}\right),$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^{n}\right)$$

が成り立つ．なぜなら

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-a))}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\right| < \infty$$

となるからである．同様に

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n}}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\times 0\right| = 0$$

となることより得られる． □

**例 2.45** **（ランダウの記号の使用例）**

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + O(x^2) \quad (x\to 0) \\ &= 1 + x + o(x) \quad (x\to 0) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad (x\to 0) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x\to 0) \end{aligned}$$

□

**例 2.46** **（ランダウの記号の使用例）**

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad (x\to 0) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x\to 0) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) \quad (x\to 0) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x\to 0) \end{aligned}$$

□

## § 2.9 1 変数関数の微分

**定義 2.47** **（微分可能）** 関数 $y = f(x)$ において，点 $x$ から 点 $x + \Delta x$ への**増分**

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

に対して

$$\Delta y = \alpha\,\Delta x + o(\rho), \quad \rho = |\Delta x|, \quad (\rho \to 0)$$

をみたす $\alpha$ が存在するとき，関数 $y = f(x)$ は**微分可能**であるという．このとき

$$dy = \alpha\,dx$$

と表記し，$dy$ を $y = f(x)$ の**微分**という． □

**定理 2.48** **（微分）** 関数 $y = f(x)$ が微分可能であることの必用十分条件は，極限

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

が存在することである．このとき

$$dy = f'(x)dx$$

が成り立つ．

（証明） $\Delta y = \alpha\Delta x + \varepsilon(\rho)$ とおく．ただし，$\rho = |\Delta x|$ であり，$\varepsilon(\rho)$ は $\rho$ についてのある関数とする．$\varepsilon(\rho)$ について式変形すると

$$\frac{\varepsilon(\rho)}{\Delta x} = \frac{\Delta y - \alpha\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \alpha = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \alpha$$

となる．このとき，

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\rho) = o(\rho) \quad (\rho \to 0) \\
&\quad\Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{\rho \to 0} \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho} = \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\rho)}{\Delta x} = \pm \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \alpha \right) \\
&\quad\Leftrightarrow \quad \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $f$ が微分可能であることと極限 $f'(x)$ が存在することとは必要十分条件であり，$\alpha = f'(x)$ となる． □

**例 2.49** **（微分可能）** 関数 $y = f(x) = x^2$ に関して

$$\Delta y = \alpha\,\Delta x + \epsilon(\rho)$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{\epsilon(\rho)}{\rho} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{(2x-\alpha)\Delta x + \Delta x^2}{\rho} = \pm\lim_{\rho\to 0}\frac{(2x-\alpha)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \pm\lim_{\rho\to 0}\left((2x-\alpha)+\Delta x\right)\\ &= \pm(2x-\alpha)\end{aligned}$$

が成り立つ．$\alpha = 2x$ のとき $0$ となるから，

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + o(\rho) \quad (\rho \to 0)$$

が成り立つ．$y = x^2$ は微分可能であり，$y$ の微分は

$$dy = 2x\,dx$$

である． □

## § 2.10 全微分

**定義 2.50** **（全微分可能）** 関数 $z = f(x, y)$ において，点 $(x, y)$ から点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ への増分

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

に対して

$$\Delta z = \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (\rho \to 0)$$

をみたす $\alpha, \beta$ が存在するとき，関数 $z = f(x, y)$ は**全微分可能（total differentiable）**であるという．このとき，

$$dz = \alpha\,dx + \beta\,dy$$

と表記し，$dz$ を $z = f(x, y)$ の**全微分**または単に**微分**という． □

**例 2.51** **（微分可能）** 関数 $z = f(x, y) = xy$ は全微分可能であるか考える．まず，増分は

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

である．この増分が

$$\Delta z = \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \epsilon(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

の形をみたすと仮定する．このとき式変形すると

$$\frac{\epsilon(\rho)}{\rho} = \frac{(y - \alpha)\Delta x + (x - \beta)\Delta y + \Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

となる．ここで $\Delta x = \rho\cos\theta, \Delta y = \rho\sin\theta$ とおき，$\rho \to 0$ の極限をとると，

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}\frac{\epsilon(\rho)}{\rho} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{(y - \alpha)\rho\cos\theta + (x - \beta)\rho\sin\theta + \rho^2\sin\theta\cos\theta}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0}(y - \alpha)\cos\theta + (x - \beta)\sin\theta + \rho\sin\theta\cos\theta \\
&= (y - \alpha)\cos\theta + (x - \beta)\sin\theta
\end{aligned}$$

を得る．$\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\frac{\epsilon}{\rho} = 0$ となるためには

$$\alpha = y, \qquad \beta = x$$

とおく．よって，

$$\Delta z = y\,\Delta x + x\,\Delta y + o(\rho) \quad (\rho \to 0)$$

が成り立つ．関数 $z = xy$ は全微分可能である．また，$z = xy$ の全微分は

$$dz = y\,dx + x\,dy$$

となる． □

## § 2.11 $n$ 変数関数の全微分

**定義** 2.52 **（全微分）** $n$ 変数関数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\Delta z = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta {x_1}^2 + \Delta {x_2}^2 + \cdots + \Delta {x_n}^2} \qquad (\rho \to 0)$$

をみたす $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が存在するとき，$f$ は**全微分可能**であるといい，

$$dz = \alpha_1\, dx_1 + \alpha_2\, dx_2 + \cdots + \alpha_n\, dx_n$$

と表記する．$dz$ を $z$ の**全微分**または**微分**という．

□

## § 2.12 全微分と偏微分

**定理** 2.53 **（全微分可能の必要条件）** 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能であれば，$f$ は偏微分可能であり，

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

が成り立つ．

（証明） 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能であれば，

$$\Delta z = \alpha \Delta x + \beta \Delta y + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

が成り立つ．$x$ 軸に沿って極限をとる．$\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ とする．このとき，$\rho = |\Delta x|$ であるから，

$$\Delta z = \alpha \Delta x + o(|\Delta x|) \quad (|\Delta x| \to 0)$$

が成り立つ．これは

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta z}{\Delta x} - \alpha = \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} - \alpha \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

と等価である．また，$y$ 軸に沿って極限をとる．$\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ とすると，同様にして $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ を得る．

□

**定理** 2.54 **（全微分可能の十分条件）** 関数 $z = f(x, y)$ において，偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ が存在し，かつこれらが連続関数であれば，$z = f(x, y)$ は全微分可能である．（注意）逆は成り立たない．

□

**注意 2.55** **（全微分可能の十分条件）** 全微分可能となる十分条件は他にもあるが，上の定理が一番実用的である． □

**例 2.56** **（全微分）** 関数 $z = f(x, y) = x^2 e^{xy}$ は偏導関数

$$
\begin{aligned}
f_x(x, y) &= (x^2 e^{xy})_x = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} = (2x + x^2 y) e^{xy}, \\
f_y(x, y) &= (x^2 e^{xy})_y = x^3 y e^{xy}
\end{aligned}
$$

が存在し，これらは連続関数である．よって $f(x, y)$ は全微分可能である．また，$z$ の全微分は

$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = (2x + x^2 y) e^{xy}\,dx + x^3 e^{xy}\,dy = e^{xy}\left((2x + x^2 y)\,dx + x^3\,dy\right)$$

となる.（注意）微分 $dx, dy$ と関数 $e^{xy}, 2x + x^2 y, x^3$ の書く順を入れ替えてはならない．つまり，$dz = ((2x + x^2 y)dx + x^3 dy)e^{xy}$ や $dz = e^{xy}(dx\,(2x + x^2 y) + dy\,x^3)$ は**誤った表記**である． □

**例 2.57** **（全微分）** 関数 $z = x^4 y + x^2 y^3 + x y^4$ は偏導関数

$$z_x = 4x^3 y + 2x y^3 + y^4, \qquad z_y = x^4 + 3x^2 y^2 + 4x y^3$$

が存在し，かつこれらは連続関数である．よって $z$ は全微分可能であり，$z$ の全微分は

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy = (4x^3 y + 2x y^3 + y^4)\,dx + (x^4 + 3x^2 y^2 + 4x y^3)\,dy$$

となる． □

**例 2.58** **（全微分）** 関数 $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ は偏導関数

$$\theta_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \theta_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

が存在し，かつこれらは原点を除き連続関数である．よって $z$ は原点を除き全微分可能であり，$z$ の全微分は

$$d\theta = \theta_x\,dx + \theta_y\,dy = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

となる.（注意）微分 $dx, dy$ と関数 $-y, x$ の書く順を入れ替えてはならない．また，分母 $x^2 + y^2$ の部分は微分 $dx, dy$ の前から $(x^2 + y^2)^{-1}$ が掛けられているという意味であることに注意する．つまり，以下の表記は**すべて誤った表記**である：

$$d\theta = \frac{-dx\,y + dy\,x}{x^2 + y^2} = (-y\,dx + x\,dy)\frac{1}{x^2 + y^2} = (-dx\,y + dy\,dx)\frac{1}{x^2 + y^2}.$$

□

**例** 2.59 **（全微分）** 関数 $u = xy + yz + zx$ は偏導関数

$$u_x = u + z, \quad u_y = x + z, \quad u_z = y + x$$

が存在し，かつこれらは連続関数である．よって $u$ は全微分可能であり，$u$ の全微分は

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = (u+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$$

となる． □

**問** 2.60 **（全微分）** 次の関数の全微分を求めよ．

$$(1) \quad z = x\cos y - y\cos x \qquad (2) \quad w = xy + yz + zx$$

□

## § 2.13 全微分と連続

**定理** 2.61 **（全微分可能と連続）** 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能であれば，$z = f(x, y)$ は連続関数である．

（証明） 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能であれば，

$$\Delta z = \alpha\Delta x + \beta\Delta y + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

が成り立つ．このとき $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ の極限をとる．右辺は

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} (\alpha\Delta x + \beta\Delta y + o(\rho)) = 0$$

となる．よって左辺も 0 となるので，

$$\begin{aligned} &\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(x,y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) = \lim_{(\tilde{x},\tilde{y})\to(x,y)} f(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{aligned}$$

を得る．点 $(x, y)$ への極限 $\lim_{(\tilde{x},\tilde{y})\to(x,y)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$ が存在し，かつ点 $(x, y)$ における値 $f(x, y)$ と等しいので，関数 $f(x, y)$ は任意の点 $(x, y)$ について連続である． □

## § 2.14 1 変数関数の合成関数の微分

**定理 2.62** **(合成関数の微分)** 関数 $y = f(x), x = \phi(t)$ の合成関数 $y = f(\phi(t))$ は $t$ についての 1 変数関数であり，この合成関数の導関数は

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

となる．または，代入も含めて正確に書くと

$$\frac{d}{dt}f(\phi(t)) = f'(\phi(t))\phi'(t)$$

となる．

(証明) 関数 $y = f(x), x = \phi(t)$ を微分可能とすると

$$dy = f'(x)dx, \qquad dx = \phi'(t)dt$$

であり，

$$\begin{aligned}
&(☆) && \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x), \\
&(○) && \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x} = 0, \\
&(★) && \Delta x = \phi(t+\Delta t) - \phi(t) = \phi'(t)\Delta t + \varepsilon_2(\Delta t), \\
&(●) && \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t} = 0
\end{aligned}$$

と表される．このとき，

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{f(\phi(t+\Delta t)) - f(\phi(t))}{\Delta t} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} \\
&= \frac{f'(x)\Delta x + \varepsilon_1}{\Delta x}\frac{\phi'(t)\Delta t + \varepsilon_2}{\Delta t} = \left(f'(x) + \frac{\varepsilon_1}{\Delta x}\right)\left(\phi'(t) + \frac{\varepsilon_2}{\Delta t}\right) \\
&= f'(x)\phi'(t) + \phi'(t)\frac{\varepsilon_1}{\Delta x} + f'(x)\frac{\varepsilon_2}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta x}\frac{\varepsilon_2}{\Delta t}
\end{aligned}$$

となる．ここで $\Delta t \to 0$ の極限をとると (●) が成り立つ．このとき，$\Delta t \to 0, \varepsilon_2 \to 0$ より，(★) は $\Delta x \to 0$ となる．$\Delta x \to 0$ のとき (○) が成り立つ．よって，(○), (●) より，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\phi'(t) = f'(\phi(t))\phi'(t)$$

を得る． □

## § 2.15 2 変数関数と 1 変数関数の合成関数の微分

**定理 2.63** **（合成関数の微分）** 2 変数関数 $z = f(x, y)$ と 1 変数関数 $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ との合成関数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$ の導関数は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

となる．また，代入も含めて正確に書くと

$$\frac{d}{dt}f(\phi(t), \psi(t)) = f_x(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

となる．

（証明） 関数 $z = f(x, y)$ は全微分可能であり，関数 $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ は微分可能とする．このとき

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy, \quad dx = \phi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt$$

が成り立つ．または，

$$\begin{aligned}
&\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1(\rho) = o(\rho) \quad (\rho \to 0), \\
&\Delta x = \phi(t + \Delta t) - \phi(t) = \phi'(t)\Delta t + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2(\Delta t) = o(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0), \\
&\Delta y = \psi(t + \Delta t) - \psi(t) = \psi'(t)\Delta t + \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3(\Delta t) = o(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0)
\end{aligned}$$

と表される．ただし，$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{f(\phi(t + \Delta t), \psi(t + \Delta t)) - f(\phi(t), \psi(t))}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \\
&= \frac{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1}{\Delta t} = f_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta t} \\
&= f_x(x, y)\frac{\phi'(t)\Delta t + \varepsilon_2}{\Delta t} + f_y(x, y)\frac{\psi'(t)\Delta t + \varepsilon_3}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta t} \\
&= f_x(x, y)\phi'(t) + f_y(x, y)\psi'(t) + \frac{\varepsilon_1}{\Delta t} + f_x(x, y)\frac{\varepsilon_2}{\Delta t} + f_y(x, y)\frac{\varepsilon_3}{\Delta t}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\Delta t \to 0$ の極限をとると，$\varepsilon_2(\Delta t) = o(\Delta t)$, $\varepsilon_3(\Delta t) = o(\Delta t)$, $\varepsilon_1(\rho) = o(\rho)$ より，$\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\varepsilon_3(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ であり，

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\varepsilon_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\varepsilon_1}{\rho}\frac{\rho}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\varepsilon_1}{\rho}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\right) \\
&= \left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\varepsilon_1}{\rho}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\left(\phi'(t) + \frac{\varepsilon_2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\psi'(t) + \frac{\varepsilon_3}{\Delta t}\right)^2}\right) = 0 \times \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} = 0
\end{aligned}$$

となるので,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x,y)\phi'(t) + f_y(x,y)\psi'(t) = f_x(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) + f_y(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)$$

を得る.

□

**例 2.64** **(合成関数の微分)**　関数 $z = f(x,y)$, $x = 2t-3$, $y = -t+1$ の合成関数 $z = f(2t-3, -t+1)$ の導関数は,

$$\frac{dx}{dt} = 2, \qquad \frac{dy}{dt} = -1$$

より

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2f_x(2t-3, -t+1) - f_y(2t-3, -t+1)$$

となる.

□

**例 2.65** **(合成関数の微分)**　関数 $z = xy^2 - x^2y$, $x = t^2$, $y = e^t$ の合成関数の導関数は,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - 2xy = e^{2t} - 2t^2e^t, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - x^2 = 2t^2e^t - t^4, \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

より

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (e^{2t} - 2t^2e^t)2t + (2t^2e^t - t^4)e^t = 2(t^2+t)e^{2t} - (t^4+4t^3)e^t$$

となる.

□

**例 2.66** **(合成関数の微分)**　関数 $z = x^3y^2$, $x = t^2$, $y = t^4$ の合成関数の微分は,

$$z_x = 3x^2y^2 = 3t^4t^8 = 3t^{12}, \quad z_y = 2x^3y = 2t^6t^4 = 2t^{10}, \quad x' = 2t, \quad y' = 4t^3$$

より

$$\frac{dz}{dt} = z_x x' + z_y y' = (3t^{12})(2t) + (2t^{10})(4t^3) = 14t^{13}$$

となる.

□

**例 2.67** **(合成関数の微分)**　関数 $z = f(x,y)$, $y = g(x)$ の合成関数 $z = f(x, g(x))$ の $x$ 微分を考える．まず，$x = t$, $y = g(t)$ と置き換えて，$z = f(t, g(t))$ を $t$ で微分する．$\dfrac{dx}{dt} = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = g'(t)$ より

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}f(t,g(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x(t,g(t)) + f_y(t,g(t))g'(t)$$

となる．$t$ を $x$ に置き換えると

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}f(x,g(x)) = f_x(x,g(x)) + f_y(x,g(x))g'(x) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

を得る.

□

**問 2.68** **(合成関数の微分)**　次の合成関数の導関数を求めよ．

(1)　$z = x\cos y - y\cos x$, $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$　　(2)　$z = y^2 + 2xy + 3x^2$, $x = \log t$, $y = t$ □

## § 2.16 2 変数関数と 2 変数関数の合成関数の微分

**定理 2.69** **(合成関数の微分)**　2 変数関数 $z = f(x, y)$ と 2 変数関数 $x = \phi(u, v)$, $v = \psi(u, v)$ の合成関数 $z = f(\phi(u, v), \psi(u, v))$ の偏微分は

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

で与えられる．代入も含めて書くと

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) &= f_x(\phi(u, v), \psi(u, v))\phi_u(u, v) + f_y(\phi(u, v), \psi(u, v))\psi_u(u, v), \\
\frac{\partial}{\partial v} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) &= f_x(\phi(u, v), \psi(u, v))\phi_v(u, v) + f_y(\phi(u, v), \psi(u, v))\psi_v(u, v)
\end{aligned}$$

と表される． □

**例 2.70** **(合成関数の微分の具体例)**　関数 $z = xy^2 + x^2 y$ と関数 $x = u + v$, $y = u - v$ の合成関数の偏導関数を求める．まず，

$$\begin{aligned}
z_x &= y^2 + 2xy = (u - v)^2 + 2(u + v)(u - v) = 3u^2 - v^2 - 2uv, \\
z_y &= 2xy + x^2 = 2(u + v)(u - v) + (u + v)^2 = 3u^2 - v^2 + v^2 + 2uv, \\
x_u &= 1, \qquad y_u = 1, \qquad x_v = 1, \qquad y_v = -1
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}
z_u &= z_x x_u + z_y y_u = (3u^2 - v^2 - 2uv) + (3u^2 - v^2 + v^2 + 2uv) = 6u^2 - 2v^2, \\
z_v &= z_x x_v + z_y y_v = (3u^2 - v^2 - 2uv) - (3u^2 - v^2 + v^2 + 2uv) = -4uv
\end{aligned}$$

を得る． □

**例 2.71** **(合成関数の微分の具体例)**　関数 $z = xy^2 + x^2 y$ と関数 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の合成関数の偏導関数を求める．まず，

$$\begin{aligned}
z_x &= y^2 + 2xy = r^2(\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta), & z_y &= 2xy + x^2 = r^2(2\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta), \\
x_r &= \cos\theta, \qquad y_r = \sin\theta, & x_\theta &= -r\sin\theta, \qquad y_\theta = r\cos\theta
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}
z_r &= z_x x_r + z_y y_r = 3r^2 \sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) \\
z_\theta &= z_x x_\theta + z_y y_\theta = r^3(1 + 3\sin\theta\cos\theta)(\cos\theta - \sin\theta)
\end{aligned}$$

を得る． □

## § 2.17 $n$ 変数関数と 1 変数関数の合成関数の微分

**定理 2.72** **（多変数関数の合成関数の微分）** $n$ 変数関数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\boldsymbol{x})$ と 1 変数関数

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \cdots, \quad x_n = \phi_n(t)$$

の合成関数 $z = f(\boldsymbol{x}(t))$ の微分は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}$$

で与えられる．代入も含めて書くと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)) = f_{x_1}&(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t))\phi_1'(t) \\ &+ f_{x_2}(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t))\phi_2'(t) + \\ &\cdots + f_{x_n}(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t))\phi_n'(t)\end{aligned}$$

となる．また，ベクトル表記では

$$\frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot \boldsymbol{x}' = \operatorname{grad} f \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

と表される．ここで

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'(t) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \phi_1'(t) \\ \phi_2'(t) \\ \vdots \\ \phi_n'(t) \end{bmatrix},$$

$$\nabla f = \nabla f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} f = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x_1}(\boldsymbol{x}) \\ f_{x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

とおいた． □

**注意 2.73** **（多変数関数の合成関数の微分）** 曲面 $z = f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{x}$ における法線ベクトルは $\nabla f(\boldsymbol{x}(t))$ である（接平面の節を参照）． $\boldsymbol{x}(t)$ の軌跡は $(x_1, \cdots, x_n)$ 空間内の曲線である．この曲線の接ベクトルは $\boldsymbol{x}'(t)$ である． □

## § 2.18 $n$ 変数関数と $m$ 変数関数の合成関数の微分

**定理** 2.74 **（合成関数の微分）** $n$ 変数関数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\boldsymbol{x})$ と $m$ 変数関数

$$\begin{aligned}
x_1&=\phi_1(u_1,u_2,\cdots,u_m)=\phi_1(\boldsymbol{u}),\\
x_2&=\phi_2(u_1,u_2,\cdots,u_m)=\phi_2(\boldsymbol{u}),\\
&\vdots\\
x_n&=\phi_n(u_1,u_2,\cdots,u_m)=\phi_n(\boldsymbol{u})
\end{aligned}$$

の合成関数 $z=f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}))$ の偏微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u_1}&=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_1},\\
\frac{\partial z}{\partial u_2}&=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_2},\\
&\vdots\\
\frac{\partial z}{\partial u_m}&=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_m}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_m}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_m}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_m}
\end{aligned}$$

で与えられる．代入も含めて書くと $u_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ に関して

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u_j}f(\phi_1(u_1,\cdots,u_m),\phi_2(u_1,\cdots,u_m),\cdots,\phi_n(u_1,\cdots,u_m))\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n}f_{x_k}(\phi_1(u_1,\cdots,u_m),\phi_2(u_1,\cdots,u_m),\cdots,\phi_n(u_1,\cdots,u_m))\phi_{u_j}(u_1,\cdots,u_m)
\end{aligned}$$

と表される．また，ベクトル表記では

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\, z=\begin{bmatrix}\frac{\partial z}{\partial u_1}\\ \frac{\partial z}{\partial u_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial z}{\partial u_m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}&\frac{\partial x_2}{\partial u_1}&\cdots&\frac{\partial x_n}{\partial u_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2}&\frac{\partial x_2}{\partial u_2}&\cdots&\frac{\partial x_n}{\partial u_2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial u_m}&\frac{\partial x_2}{\partial u_m}&\cdots&\frac{\partial x_n}{\partial u_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial z}{\partial x_1}\\ \frac{\partial z}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\end{bmatrix}=J\,\nabla_{\boldsymbol{x}}\, z$$

となる．行列 $J=\left[\dfrac{\partial x_j}{\partial u_i}\right]_{m\times n}$ を**ヤコビ行列（Jacobi matrix）**という． □

## § 2.19 偏微分作用素

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x} \\
&\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \alpha\frac{\partial}{\partial x} f + \beta\frac{\partial}{\partial y} f = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} \\
&\frac{\partial}{\partial x} g \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} g \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
&\frac{\partial}{\partial x} g \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial^2}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

## § 2.20 座標変換

**定義 2.75** **（座標変換）** 座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が変数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ を独立変数とする関数

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \cdots, u_n), \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \cdots, u_n), \\ \quad \vdots \\ x_n = \varphi_n(u_1, u_2, \cdots, u_n) \end{cases}$$

により定まるとする．このとき，$(u_1, \cdots, u_n)$ をあらたに座標と呼び，(∗) を座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ から座標 $(u_1, \cdots, u_n)$ への**座標変換（coordinate transform）**と呼ぶ． □

**定義 2.76** **（ヤコビアン）** 座標変換 $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (u_1, \cdots, u_n)$ に対して，行列式

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

をこの座標変換の**ヤコビアン（Jacobian）**または**ヤコビの行列式（Jacobi determinant）**という． □

**注意 2.77** **（座標変換）** ヤコビアンが非零となるときのみ，座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ と座標 $(u_1, \cdots, u_n)$ とが 1 対 1 に対応する． □

## § 2.21 斜交座標

2 次元ユークリッド空間に普通に導入する座標 $xy$ は，標準基底

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

における座標である．座標を $(x, y)$ とすると任意のベクトルは

$$(☆) \qquad \boldsymbol{p} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表される．一方，基底

$$\boldsymbol{e}_u = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_v = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

における座標を $(u, v)$ とおくと，任意のベクトルは

$$(★) \qquad \boldsymbol{p} = u\boldsymbol{e}_u + v\boldsymbol{e}_v = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_u & \boldsymbol{e}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

と表される．ベクトル $\boldsymbol{p}$ は同じものであるから，**(☆), (★)** より

$$(○) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

が成り立つ．基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ は 1 次独立であるから，$A$ は正則で逆行列 $A^{-1}$ が存在し，

$$(●) \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

が成り立つ．**(○)** を座標 $(x, y)$ から座標 $(u, v)$ への座標変換という．また，**(●)** を座標 $(u, v)$ から座標 $(x, y)$ への座標変換という．標準基底 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ は $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0$ をみたし直交するから，座標 $xy$ は**直交座標**である．基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ の方向余弦

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_v}{\|\boldsymbol{e}_u\|\|\boldsymbol{e}_v\|} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}}$$

は一般には 0 とはならないので，座標 $uv$ は**斜交座標**である．

**問 2.78** **(直交座標と斜交座標)** 基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ に関して次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{e}_u$ と $\boldsymbol{e}_v$ が直交する $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の条件を求めよ．

(2) $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ が単位ベクトルとなる $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の条件を求めよ．

(3) $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ が直交しかつ単位ベクトルとなる $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の条件を求めよ． □

**例 2.79** **（直交座標から斜交座標へのヤコビアン）** 直交座標 $xy$ から斜交座標 $uv$ への座標変換 (◯) のヤコビアンを求める．(◯) より

$$x = \alpha u + \gamma v, \qquad y = \beta u + \delta v$$

であるから,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \beta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \gamma, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \delta$$

となり，ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \det(A^T) = \alpha\delta - \beta\gamma$$

を得る．

□

**例 2.80** **（斜交座標における偏微分作用素）** 直交座標 $xy$ から斜交座標 $uv$ への座標変換 (◯) を考える．関数 $z = f(x,y)$ における $u, v$ に関する偏導関数を求める．導関数の微分則を用いると

$$(\triangle) \qquad z_u = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \alpha z_x + \beta z_y, \quad z_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \gamma z_x + \delta z_y$$

を得る．この関係式は

$$(\flat) \qquad \begin{bmatrix} z_u \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}$$

とも表される．また，ナブラ作用素

$$\nabla_{(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix}, \qquad \nabla_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

を導入すれば

$$\nabla_{(u,v)} z = A^T \nabla_{(x,y)} z$$

と簡潔に表される．次に (△) において関数 $z$ は任意でもよいので関数を省略すると，偏微分演算子の関係式

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y} = \gamma\frac{\partial}{\partial x} + \delta\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る．この関係式は偏微分作用素に関する $uv$ 座標から $xy$ 座標への変換を表す．点に関する座標変換 (◯) の逆向きの変換であることに注意する．

□

**例 2.81** **（斜交座標における偏微分作用素）** 斜交座標 $uv$ から直交座標 $xy$ への座標変換 **(●)** を考える．関数 $z=f(u,v)$ における $x,y$ に関する偏導関数を求める．**(●)** より座標変換は

$$u=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}(\delta x-\gamma y),\qquad v=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}(-\beta x+\alpha y)$$

であるか，導関数の微分則を用いると

$$(\blacktriangle)\qquad \begin{aligned} z_x&=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\left(\delta z_u-\beta z_v\right),\\ z_y&=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\left(-\gamma z_u+\alpha z_v\right)\end{aligned}$$

を得る．この関係式は

$$\begin{bmatrix} z_x\\ z_y\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_u\\ z_v\end{bmatrix}=A^{-T}\begin{bmatrix} z_u\\ z_v\end{bmatrix}$$

とも表される．この結果は ($\flat$) の両辺に $A^{-T}$ を左から掛けることでも得られる．また，ナブラ作用素を導入すると

$$\nabla_{(x,y)}z=A^{-T}\nabla_{(u,v)}z$$

と簡潔に表される．次に **(▲)** において関数 $z$ は任意で成り立つので省略すると，偏微分作用素の関係式

$$(\circledcirc)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\left(\delta\frac{\partial}{\partial u}-\beta\frac{\partial}{\partial v}\right),\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial u}+\alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)\end{aligned}$$

を得る．この関係式は偏微分作用素に関する $xy$ 座標から $uv$ 座標への変換を表す．点に関する座標変換 **(●)** の逆向きの変換であることに注意する．

□

**例 2.82** **（斜交座標への座標変換）** 関数 $z=f(x,y)$ に対して関数

$$F(x,y)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=(z_x)^2+(z_y)^2$$

を考える．この関数を斜交座標 $uv$ で表す．**(▲)** を代入すると

$$\begin{aligned} F&=\left(\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\left(\delta z_u-\beta z_v\right)\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\left(-\gamma z_u+\alpha z_v\right)\right)^2\\ &=\frac{(\delta^2+\gamma^2)(z_u)^2+(\alpha^2+\beta^2)(z_v)^2-2(\beta\delta+\alpha\gamma)z_uz_v}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\\ &=\frac{\gamma^2+\delta^2}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2-2\frac{\beta\delta+\alpha\gamma}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\end{aligned}$$

を得る．

□

**問** 2.83 **（斜交座標への座標変換）** この関数 $F$ が斜交座標 $uv$ で

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

と表されるための $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の必要十分条件は，基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ が正規直交基底であることを示せ．またこのとき，行列 $A$ は直交行列となる（$AA^T = E$ をみたす）ことを示せ． □

**例** 2.84 **（斜交座標におけるラプラシアン）** 関数 $z = f(x, y)$ に対して関数

$$F(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{xx} + z_{yy}$$

を考える．この関数を斜交座標 $uv$ で表す．(◎) より

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}z = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(\delta\frac{\partial}{\partial u} - \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial u} - \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)z \\
&= \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(\delta\frac{\partial}{\partial u} - \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)(\delta z_u - \beta z_v) = \frac{\delta^2 z_{uu} - 2\beta\delta z_{uv} + \beta^2 z_{vv}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}, \\
z_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}z = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)z \\
&= \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)(-\gamma z_u + \alpha z_v) = \frac{\gamma^2 z_{uu} - 2\alpha\gamma z_{uv} + \alpha^2 z_{vv}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}
\end{aligned}$$

となるらか,

$$\begin{aligned}
F = z_{xx} + z_{yy} &= \frac{(\delta^2 + \gamma^2)z_{uu} - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)z_{uv} + (\alpha^2 + \beta^2)z_{vv}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \\
&= \frac{\gamma^2 + \delta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

を得る． □

**例** 2.85 **（斜交座標におけるラプラシアン）** 直交座標 $xy$ から斜交座標 $uv$ への座標変換 (◯) を考える．このとき**ラプラシアン（Laplacian）**または**ラプラス作用素（Laplace operator）**と呼ばれる偏微分作用素

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

の $uv$ 座標への変換を行う．前例題において関数 $z$ は任意であるから,

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

を得る． □

**問** 2.86 **（斜交座標におけるラプラシアン）** 斜交座標 $uv$ におけるラプラシアンが

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

となるための $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の必要十分条件は，基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ が正規直交基底であることを示せ．またこのとき，行列 $A$ は直交行列となる（$AA^T = E$ をみたす）ことを示せ． □

**問** 2.87 **（斜交座標）** 座標 $(x, y)$ から斜交座標 $(u, v)$ への座標変換

(1) $x = \sqrt{3}u - \sqrt{3}v, y = u + v$ (2) $x = 2u - v, y = u + 2v$ (3) $x = u - v, y = u + \sqrt{3}v$

に対してそれぞれ，次の問に答えよ．

(i) $u = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, $v = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ をみたす $(x, y)$ の軌跡をそれぞれ書け．
(ii) $u$ 軸（$v = 0$ の直線）と $v$ 軸（$u = 0$ の直線）の方向ベクトルを求めよ．
(iii) $u$ 軸と $v$ 軸のなす角度を求めよ．
(iv) 座標 $(u, v) = (1, 1), (2, 3), (-1, 2), (-1, -3), (2, -1)$ に対して，座標 $(x, y)$ を求めよ．
(v) 座標 $(x, y) = (1, 1), (2, 3), (-1, 2), (-1, -3), (2, -1)$ に対して，座標 $(u, v)$ を求めよ．
(vi) 直線 $x + 2y = 1$ を座標 $(u, v)$ で表せ．
(vii) 曲線 $x^2 + y^2 = 1$ を座標 $(u, v)$ で表せ．
(viii) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ．
(ix) 偏微分作用素に関する座標 $uv$ から座標 $xy$ への座標変換を求めよ．
(x) 偏微分作用素に関する座標 $xy$ から座標 $uv$ への座標変換を求めよ．
(xi) 関数 $z = f(x, y)$ に対する関数 $F = (z_x)^2 + (z_y)^2$ を座標 $uv$ で表わせ．
(xii) 関数 $z = f(x, y)$ に対する関数 $F = z_{xx} + z_{yy}$ を座標 $uv$ で表わせ．
(xiii) ラプラス作用素 $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を座標 $uv$ で表わせ． □

## § 2.22 2 次元空間の極座標

**定義** 2.88 **（極座標）** 2 次元空間において，直交座標 $(x, y)$ から**極座標（polar coordinates）** $(r, \theta)$ への座標変換は

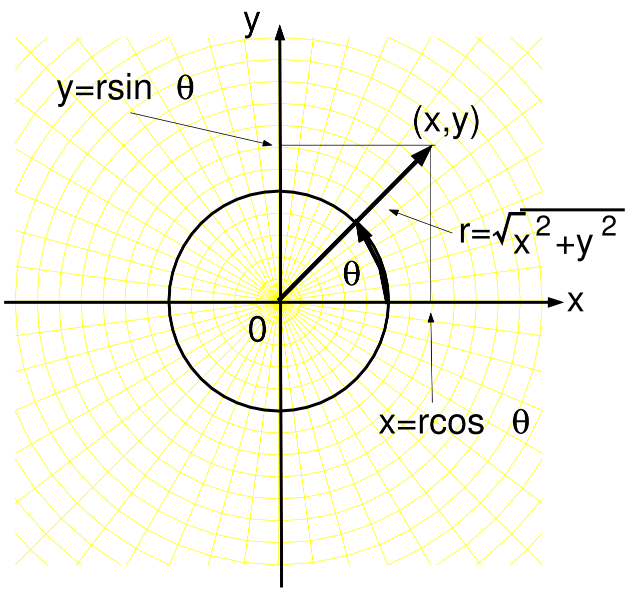
$$(\text{☆}) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられる． □

**注意** 2.89 **（極座標）** 極座標 $(r, \theta)$ から直交座標 $(x, y)$ への座標変換は

$$(\bigstar) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

と表される． □




**例** 2.90 **（極座標のヤコビアン）** 座標変換 (☆) より

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

となるらか，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

と得られる． □

**例** 2.91 **(極座標における偏微分作用素の変換)** 座標 $(x, y)$ から極座標 $(r, \theta)$ への変換 (☆) を考える．関数 $z = f(x, y)$ を $r, \theta$ に関して偏微分すると，合成関数の微分則より

$$
(\triangle)\quad
\begin{aligned}
z_r &= \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y} = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta,\\
z_\theta &= \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} = -z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これは

$$
(\flat)\qquad \begin{bmatrix} z_r \\ z_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}
$$

とも表される．行列 $A$ の行列式がヤコビアンである．このとき，

$$
\frac{\partial}{\partial r}z = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)z, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}z = \left(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)z
$$

と書くと関数 $z$ は任意であり省略すると

$$
\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}
$$

となる．(★) を用いて右辺の $r, \theta$ を $x, y$ で表すと

$$
\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}
$$

となる．これは偏微分作用素における極座標 $r\theta$ から座標 $xy$ への座標変換である．点に関する座標変換 (☆) とは変換の向きが異なることに注意する．

□

**例** 2.92 **(極座標における偏微分作用素の変換)** 極座標 $(r, \theta)$ から座標 $(x, y)$ への変換 (★) を考える．関数 $z = f(r, \theta)$ を $x, y$ に関して偏微分すると，(★) と合成関数の微分則より

$$
\begin{aligned}
z_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{-y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{xz_r}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{yz_\theta}{x^2+y^2},\\
z_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{yz_r}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xz_\theta}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．さらに (☆) を用いて右辺を $r, \theta$ で表すと

$$
(\blacktriangle)\quad z_x = z_r\cos\theta - \frac{z_\theta}{r}\sin\theta, \qquad z_y = z_r\sin\theta + \frac{z_\theta}{r}\cos\theta
$$

となる．これは

$$
\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_\theta \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} z_r \\ z_\theta \end{bmatrix}
$$

とも表される．この式は(♭)の両辺に $A^{-1}$ を左から掛けることでも得られる．すなわち，$B = A^{-1}$ となる．ここで,

$$\frac{\partial}{\partial x} z = \left( \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) z, \qquad \frac{\partial}{\partial y} z = \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) z$$

と書くと，関数 $z$ は任意であり省略すると

$$(\bigcirc) \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

を得る．これは偏微分作用素における座標 $xy$ から極座標 $r\theta$ への座標変換である．点に関する座標変換(★)とは変換の向きが異なることに注意する．

□

**例** 2.93 **（極座標への座標変換）** 関数 $z = f(x, y)$ に対して関数

$$F(x, y) = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = (z_x)^2 + (z_y)^2$$

を考える．この関数を極座標 $r\theta$ で表す．(▲)を代入すると

$$\begin{aligned} F &= \left( z_r \cos\theta - \frac{z_\theta}{r} \sin\theta \right)^2 + \left( z_r \sin\theta + \frac{z_\theta}{r} \cos\theta \right)^2 \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(z_r)^2 - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} z_r z_\theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} z_r z_\theta + \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{r^2} (z_\theta)^2 \\ &= (z_r)^2 + \frac{(z_\theta)^2}{r^2} = \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

を得る．

□

**例** 2.94 **（極座標におけるラプラシアン）** 関数 $z = f(x, y)$ に対して関数

$$F(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{xx} + z_{yy}$$

を考える．この関数を極座標 $r\theta$ で表す．(◯) より，

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}z = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)z \\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\, z_r - \frac{1}{r}\sin\theta\, z_\theta\right) \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\, z_r - \frac{1}{r}\sin\theta\, z_\theta\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\, z_r - \frac{1}{r}\sin\theta\, z_\theta\right) \\
&= \cos\theta\left(\cos\theta\, z_{rr} - \sin\theta\left(-\frac{1}{r^2}\, z_\theta + \frac{1}{r}\, z_{r\theta}\right)\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\left(-\sin\theta\, z_r + \cos\theta\, z_{r\theta} - \frac{1}{r}\left(\cos\theta\, z_\theta + \sin\theta\, z_{\theta\theta}\right)\right) \\
&= \cos^2\theta\, z_{rr} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\, z_{\theta\theta} - \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\, z_{r\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\, z_r + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\, z_\theta, \\
z_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}z = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)z \\
&= \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\, z_r + \frac{1}{r}\cos\theta\, z_\theta\right) \\
&= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\, z_r + \frac{1}{r}\cos\theta\, z_\theta\right) + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, z_r + \frac{1}{r}\cos\theta\, z_\theta\right) \\
&= \sin\theta\left(\sin\theta\, z_{rr} + \cos\theta\left(-\frac{1}{r^2}z_\theta + \frac{1}{r}z_{r\theta}\right)\right) + \frac{1}{r}\cos\theta\left(\cos\theta\, z_r + \sin\theta\, z_{r\theta} + \frac{1}{r}\left(-\sin\theta\, z_\theta + \cos\theta\, z_{\theta\theta}\right)\right) \\
&= \sin^2\theta\, z_{rr} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\, z_{\theta\theta} + \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\, z_{r\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta\, z_r - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\, z_\theta
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
F &= z_{xx} + z_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)z_{rr} + \frac{1}{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)z_{\theta\theta} + \frac{1}{r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)z_r \\
&= z_{rr} + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} + \frac{1}{r}z_r = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}
\end{aligned}
$$

を得る． □

**例 2.95** **（極座標におけるラプラシアン）** ラプラス演算子

$$
\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
$$

を座標 $r\theta$ で表す．前例題より

$$
F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)z = \triangle z = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)z
$$

が成り立つ．関数 $z$ は任意であるから，

$$
\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}
$$

を得る． □

## § 2.23 3 次元空間の極座標

**定義** 2.96 **（極座標）** 3 次元空間において，直交座標 $(x, y, z)$ から**極座標（polar coordinates）** $(r, \theta, \varphi)$ への座標変換は

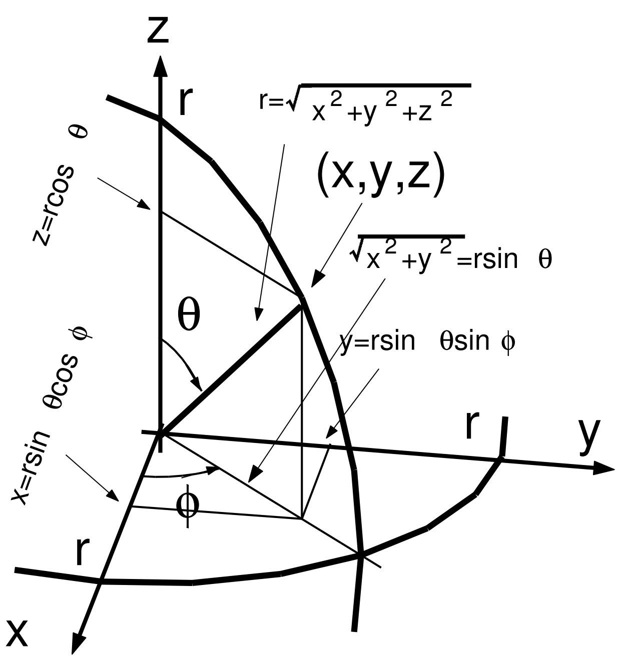
$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

で与えられる． □

**注意** 2.97 **（極座標）** 極座標 $(r, \theta, \varphi)$ から直交座標 $(x, y, z)$ への座標変換は

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

と表される． □




**例** 2.98 **（極座標のヤコビアン）**

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos^2\theta\sin\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} + r^2\sin^3\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$$

$$= r^2\sin\theta$$

□

**例** 2.99 **（極座標における偏微分作用素の変換）**

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

typing... □

**例** 2.100 **（極座標における偏微分作用素の変換）**

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\cos\theta} \\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{bmatrix}$$

typing... □

**例** 2.101 **（極座標におけるラプラシアン）**

$$\begin{aligned} \triangle &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

typing... □

## § 2.24 調和関数

**定義** 2.102 **（ラプラス演算子）** $n$ 次元座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の空間の**ラプラス演算子（Laplace operator）**または**ラプラシアン（Laplacian）**は

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$$

により定義される． □

**定義** 2.103 **（調和関数）** $n$ 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が

$$\triangle f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

をみたすとき，$f$ を**調和関数（harmonic function）**という． □

**例** 2.104 **（調和関数）** 関数

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

は調和関数である．typing...

極座標で表すと，typing... □

**例** 2.105 **（調和関数）** 関数

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

は調和関数である．typing...

極座標で表すと，typing... □

**例** 2.106 **（調和関数）** 関数

$$f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

は調和関数である．typing...

極座標で表すと，typing... □

## § 2.25 方向微分

**定義** 2.107 **（方向微分）** 関数 $f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{a}$ における方向 $\boldsymbol{e}$ の**方向微分**は

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{e}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{e}\|}\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}) = \nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\frac{\boldsymbol{e}}{\|\boldsymbol{e}\|} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_k}\frac{e_k}{\|\boldsymbol{e}\|}$$

により定義される.

（証明） typing...

□

**例** 2.108 **（方向微分）** 関数 $z = f(x,) = x^2 + y^2$ の点 $(a,b)$ における方向 $\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の微分は,

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad \frac{\boldsymbol{e}}{\|\boldsymbol{e}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

を用いて,

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial \boldsymbol{e}} = f_x(a,b)\alpha + f_y(a,b)\beta = \frac{2a}{\sqrt{2}} + \frac{2b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(a+b)$$

となる.

□

## § 2.26 ライプニッツ則

**定理** 2.109 **（ライプニッツ則）** 1 変数関数 $f(x), g(x)$ の積の $n$ 回微分は

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}f}{dx^{n-k}} \frac{d^k g}{dx^k}$$

で与えられる．これを**ライプニッツ則（Leibnitz rule）**という．

（証明） 積 $f(x)g(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x)g(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx} \\ &= \lim_{y\to x}\frac{df(x)}{dx}g(y) + f(x)\frac{dg(y)}{dy} = \lim_{y\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x)g(y)\end{aligned}$$

と表される．よって $n$ 回微分は

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}f(x)g(x) &= \lim_{y\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x)g(y) = \lim_{y\to x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k}{\partial y^k}f(x)g(y) \\ &= \lim_{y\to x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}f(x)}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k g(y)}{\partial y^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}f(x)}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k g(x)}{\partial x^k}\end{aligned}$$

となる． □

**例** 2.110 **（積の微分）**

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'g + gf', \\ &\frac{d^2}{dx^2}f(x)g(x) = f''g + 2f'g' + fg'', \\ &\frac{d^3}{dx^3}f(x)g(x) = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + g''', \\ &\frac{d^4}{dx^4}f(x)g(x) = f^{(4)}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + g^{(4)}\end{aligned}$$

□

**問** 2.111 **（積の微分）** $\dfrac{d^{10}}{dx^{10}}f(x)g(x)$ を求めよ． □

## § 2.27 テイラー展開

1 変数関数 $f(x)$ のテイラー展開は，点 $a$ のまわりで $x$ について展開すると

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}, \quad \xi = a + (x-a)\theta \quad (0 < \theta < 1)$$

である．$x = a+h$ とおいて，点 $a$ のまわりで $a+h$ についての展開に書き直すと

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

となる．

2 変数関数 $f(x,y)$ のテイラー展開では，点 $(a,b)$ のまわりで点 $(x,y) = (a+h, b+k)$ についての展開を考える．typing...

**定理 2.112**（**テイラー展開**） 関数 $f(x,y)$ が $n+1$ 回微分可能なとき，点 $(a,b)$ のまわりで点 $(x,y) = (a+h, b+k)$ についての**テイラー展開（Taylor expansion）**は，

$$f(a+h, b+k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b) + R_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{l+m=i \\ 0 \le l,m \le i}} \frac{h^l k^m}{l!m!}\frac{\partial^i f(a,b)}{\partial x^l \partial y^m} + R_{n+1},$$
$$f(x,x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{l+m=i \\ 0 \le l,m \le i}} \frac{1}{l!m!}\frac{\partial^i f(a,b)}{\partial x^l \partial y^m}(x-a)^l (y-b)^m + R_{n+1}$$

である与えられる．ただし，$R_{n+1}$ は**剰余項（remainder）**であり，

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k) = \sum_{\substack{l+m=n+1 \\ 0 \le l,m \le i}} \frac{h^l k^m}{l!m!}\frac{\partial^i f(a+\theta h, b+\theta k)}{\partial x^l \partial y^m}$$

と与えられる．ただし，$0 < \theta < 1$ である． □

**例 2.113**（**テイラー展開**） 関数 $f(x,y)$ を点 $(a,b)$ のまわりで点 $(a+h, b+k)$ について 3 次まで展開し，4 次以降を剰余項で表すと

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \frac{h^2}{2}f_{xx}(a,b) + hkf_{xy}(a,b) + \frac{k^2}{2}f_{yy}(a,b) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}f_{xxx}(a,b) + \frac{h^2k}{2}f_{xxy}(a,b) + \frac{hk^2}{2}f_{xyy}(a,b) + \frac{k^3}{3!}f_{yyy}(a,b) + R_4, \\ R_4 &= \frac{h^4}{4!}f_{xxxx}(a+\theta h, b+\theta k) + \frac{h^3k}{3!}f_{xxxy}(a+\theta h, b+\theta k) + \frac{h^2k^2}{2!2!}f_{xxyy}(a+\theta h, b+\theta k) \\ &\quad + \frac{hk^2}{3!}f_{xyyy}(a+\theta h, b+\theta k) + \frac{k^4}{4!}f_{yyyy}(a+\theta h, b+\theta k) \end{aligned}$$

となる． □

**例 2.114** **(テイラー展開)** 関数 $f(x,y)=x^2y+4y-5$ を点 $(1,-1)$ のまわりで点 $(x,y)$ についてテイラー展開する．まず，偏導関数は

$$\begin{aligned}
&f_x=2xy,\quad f_y=x^2+4,\quad f_{xx}=2y,\quad f_{xy}=2x,\quad f_{yy}=0,\\
&f_{xxx}=0,\quad f_{xxy}=2,\quad f_{xyy}=0,\quad f_{yyy}=0,\quad f_{xxxx}=0,\quad \cdots
\end{aligned}$$

である．4 階以降の偏導関数はすべて 0 となる．また，点 $(1,-1)$ における偏微係数は

$$\begin{aligned}
&f(1,-1)=-10,\quad f_x(1,-1)=-2,\quad f_y(1,-1)=5,\\
&f_{xx}(1,-1)=-2,\quad f_{xy}(1,-1)=2,\quad f_{yy}(1,-1)=0,\\
&f_{xxx}(1,-1)=0,\quad f_{xxy}(1,-1)=2,\quad f_{xyy}(1,-1)=0,\quad f_{yyy}(1,-1)=0,\\
&f_{xxxx}(1,-1)=0,\quad ,\cdots
\end{aligned}$$

である．これを用いるとテイラー展開は

$$\begin{aligned}
f(x,y)=&f(1,-1)+f_x(1,-1)(x-1)+f_y(1,-1)(y+1)\\
&+\frac{1}{2}f_{xx}(1,-1)(x-1)^2+f_{xy}(1,-1)(x-1)(y+1)+\frac{1}{2}f_{xx}(1,-1)(y+1)^2\\
&+\frac{1}{3!}f_{xxx}(1,-1)(x-1)^3+\frac{1}{2}f_{xxy}(1,-1)(x-1)^2(y+1)+\frac{1}{2}f_{xyy}(1,-1)(x-1)(y+1)^2\\
&+\frac{1}{3!}f_{yyy}(1,-1)(y+1)^3+\frac{1}{4!}f_{xxxx}(1,-1)(x-1)^4+0+0+\cdots
\end{aligned}$$

より，

$$f(x,y)=-10-2(x-1)+5(y+1)-(x-1)^2+2(x-1)(y+1)+(x-1)^2(y+1)$$

となる．多項式のテイラー展開は，多項式を単に変形した形となる． □

**例 2.115** **(テイラー展開)** 関数 $f(x,y)=e^{x+2y}$ を点 $(0,0)$ まわりで点 $(h,k)$ についてテイラー展開する．まず，

$$f_x=e^{x+2y},\quad f_y=2e^{x+2y},\quad f_{xx}=e^{x+2y},\quad f_{xy}=2e^{x+2y},\quad f_{yy}=4e^{x+2y}$$

より

$$\begin{aligned}
&f(0,0)=1,\quad f_x(0,0)=1,\quad f_y(0,0)=2,\\
&f_{xx}(\theta h,\theta k)=e^{\theta h+2\theta k},\quad f_{xy}(\theta h,\theta k)=2e^{\theta h+2\theta k},\quad f_{yy}(\theta h,\theta k)=4e^{\theta h+2\theta k}
\end{aligned}$$

となるから，1 次項までのテイラー展開は

$$\begin{aligned}
f(h,k)&=f(0,0)+hf_x(0,0)+kf_y(0,0)+\frac{h^2}{2}f_{xx}(\theta h,\theta k)+hkf_{xy}(\theta h,\theta k)+\frac{k^2}{2}f_{yy}(\theta h,\theta k)\\
&=1+h+2k+\frac{1}{2}(h^2+4hk+4k^2)e^{\theta h+2\theta k}\quad (0<\theta<1)
\end{aligned}$$

となる． □

**例 2.116** **（テイラー展開）**　関数 $f(x,y)=\sin(xy)$ を点 $(\frac{\pi}{2},1)$ のまわりで点 $(x,y)$ についてテイラー展開する．まず,

$$\begin{aligned}&f_x=y\cos(xy),\quad f_y=x\cos(xy),\\&f_{xx}=-y^2\sin(xy),\quad f_{xy}=\cos(xy)-xy\sin(xy),\quad f_{yy}=-x^2\sin(xy)\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{\pi}{2},1\right)=1,\quad f_x\left(\frac{\pi}{2},1\right)=0,\quad f_y\left(\frac{\pi}{2},1\right)=0,\\&f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},1\right)=-1,\quad f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},1\right)=-\frac{\pi}{2},\quad f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},1\right)=-\frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

となるので，テイラー展開は

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f\left(\frac{\pi}{2},1\right)+f_x\left(\frac{\pi}{2},1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f_y\left(\frac{\pi}{2},1\right)(y-1)\\&\quad+f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)+f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},1\right)(y-1)^2+\cdots\\&=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)-\frac{\pi^2}{8}(y-1)^2+\cdots\end{aligned}$$

である．展開を途中で打ち切ると $f(x,y)$ の 2 次の近似式 $f_2(x,y)$ が

$$f(x,y)\simeq f_2(x,y)=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)-\frac{\pi^2}{8}(y-1)^2$$

と得られる． □

**例 2.117** **（テイラー展開）**　関数 $f(x,y)=\log(1+x+y)$ のマクローリン展開を求める．まず,

$$\begin{aligned}&f_x=\frac{1}{1+x+y},\quad f_y=\frac{1}{1+x+y},\\&f_{xx}=\frac{-1}{(1+x+y)^2},\quad f_{xy}=\frac{-1}{(1+x+y)^2},\quad f_{yy}=\frac{-1}{(1+x+y)^2},\\&f_{xxx}=\frac{2}{(1+x+y)^3},\quad f_{xxy}=\frac{2}{(1+x+y)^3},\quad f_{xyy}=\frac{2}{(1+x+y)^3},\quad f_{yyy}=\frac{2}{(1+x+y)^3},\\&\cdots,\quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}=\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}=\cdots=\frac{\partial^n f}{\partial x\partial y^{n-1}}=\frac{\partial^n f}{\partial y^n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x+y)^n}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}&f(0,0)=0,\quad f_x(0,0)=1,\quad f_y(0,0)=1,\quad f_{xx}(0,0)=-1,\quad f_{xy}(0,0)=-1,\quad f_{yy}(0,0)=-1,\\&\cdots,\quad \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^n}=\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^{n-1}\partial y}=\cdots=\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x\partial y^{n-1}}=\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial y^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\end{aligned}$$

となるので，マクローリン展開は

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \cdots + \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(n-l)!\,l!} \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^{n-l} \partial y^l} x^{n-l} y^l + \cdots$$

$$= x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + x^2 y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + \cdots + \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(n-l)!\,l!} x^{n-l} y^l + \cdots$$

と得られる.

□

# § 2.28 $n$ 変数関数のテイラー展開

**定理** 2.118 **（テイラー展開）** 関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ まわりでの点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \cdots, a_n + h_n)$ についてテイラー展開は

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{i!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^i f(\boldsymbol{a}) + R_{\nu+1},$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\substack{l_1 + l_2 + \cdots + l_n = i \\ 0 \le l_j \le i}} \frac{{h_1}^{l_1} {h_2}^{l_2} \cdots {h_n}^{l_n}}{l_1! l_2! \cdots l_n!} \frac{\partial^i f(\boldsymbol{a})}{\partial {x_1}^{l_1} \partial {x_2}^{l_2} \cdots \partial {x_n}^{l_n}} + R_{\nu+1},$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\substack{l_1 + l_2 + \cdots + l_n = i \\ 0 \le l_j \le i}} \frac{1}{l_1! l_2! \cdots l_n!} \frac{\partial^i f(\boldsymbol{a})}{\partial {x_1}^{l_1} \partial {x_2}^{l_2} \cdots \partial {x_n}^{l_n}} (x_1 - a_1)^{l_1} (x_2 - a_2)^{l_2} \cdots (x_n - a_n)^{l_n} + R_{\nu+1}$$

となる.

□

# § 2.29 平均値の定理

**定理** 2.119 **（平均値の定理）** 関数 $f(x)$ が連続かつ微分可能であるとき,

$$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} = f'(\xi), \qquad a_1 < \xi < a_2$$

をみたす $\xi$ が存在する.

□

**定理** 2.120 **（平均値の定理）** 関数 $f(x, y)$ が連続かつ全微分可能であるとき,

$$f(a_2, b_2) - f(a_1, b_1) = f_x(\xi, \eta)(a_2 - a_1) + f_y(\xi, \eta)(b_2 - b_1), \qquad a_1 < \xi < a_2, \quad b_1 < \eta < b_2$$

をみたす $\xi, \eta$ が存在する.

□

**問** 2.121 **（平均値の定理）** 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\log \frac{x+y}{2} = \frac{x+y-2}{x+y-\theta(x+y-2)}, \qquad 0 < \theta < 1, \quad x > 0, \quad y > 0$$

□

## § 2.30 1 変数の陰関数

**定義** 2.122 **（陰関数）** 変数 $x, y$ が条件 $F(x,y)=0$ をみたすとき，$y$ は $x$ の関数 $y=f(x)$ であり，または $x$ は $y$ の関数 $x=g(y)$ であるとみなせる．すなわち，

$$F(x,f(x))=0, \qquad F(g(y),y)=0$$

により定義される関数 $f(x), g(y)$ を，$F(x,y)=0$ で定義される**陰関数（implicit function）**という．

□

**注意** 2.123 **（陽関数）** 関数 $y=f(x)=ax+b$ や $y=f(x)=x^2$ などの関数は**陽に（explicit）**表されているという．

□

**定理** 2.124 **（陰関数の微分）** 条件 $F(x,y)=0$ で定義される陰関数 $y=f(x)$ の導関数は，$F_y(x,y)\neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

で与えられる．

（証明） 関数 $y=f(x)$ を $F(x,y)=0$ に代入すると

$$F(x,f(x))=0$$

である．両辺を $x$ で偏微分すると

$$0=\frac{d}{dx}F(x,y)=F_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial x}+F_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial x}=F_x(x,y)+F_y(x,y)\frac{dy}{dx}$$

となるので，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ を得る．

□

**例** 2.125 **（陰関数）** 条件 $xe^{-y}=y\sin x$ で定義される陰関数 $y=f(x)$ の導関数を求める．条件 $xe^{-y}=y\sin x$ の両辺を $x$ で微分すると

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(xe^{-y}\right)=\frac{d}{dx}\left(y\sin x\right) \quad\Rightarrow\quad x'(e^{-y})+x(e^{-y})'=y'(\sin x)+y(\sin x)' \\ &\quad\Rightarrow\quad e^{-y}-xy'e^{-y}=y'\sin x+y\cos x \quad\Rightarrow\quad e^{-y}-y\cos x=(\sin x+xe^{-y})y'\end{aligned}$$

となるので，

$$y'=\frac{e^{-y}-y\cos x}{\sin x+xe^{-y}}$$

を得る．

□

**例 2.126** **（陰関数）** $xy$ 平面内の円 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ を考える．このとき，$y$ は $x$ の関数 $y=f(x)$ とみなされる．これを陽に書くと

$$y=f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$$

となる．これは 2 価関数である．多価関数のままでは取り扱いに面倒が多い．$y=f(x)$ を陰関数として取り扱い導関数を求める．条件 $F(x,y)=0$ に $y=f(x)$ を代入すると

$$x^2+f(x)^2-1=0$$

である．両辺を $x$ で微分すると

$$2x+2f(x)f'(x)=0$$

となり，

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

を得る．さらに微分すると 2 階導関数と 3 階導関数は

$$\begin{aligned} y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{1}{y}+\frac{xy'}{y^2}=-\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}=-\frac{(x^2+y^2)}{y^3}=-\frac{1}{y^3},\\ y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}&=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{y^3}\right)=\frac{3y'}{y^4}=-\frac{3x}{y^5} \end{aligned}$$

となる．$y$ は 2 価関数であるから $y',y'',y'''$ も 2 価関数である．

次に，円 $F=0$ 上の点 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ において，関数 $y=f(x)$ を点 $x=\frac{1}{2}$ まわりでテイラー展開する．$x=\frac{1}{2}, y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であることに注意すると

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=-\frac{8}{3\sqrt{3}},\quad f''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5}=-\frac{16}{3\sqrt{3}}$$

となるので，テイラー展開は

$$\begin{aligned} y&=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots \end{aligned}$$

と得られる． □

**例 2.127** **（陰関数）** 条件

$$F(x,y)=x^3+3xy+4xy^2+y^2+y-2=0$$

により定義される陰関数 $y=f(x)$ を考える．$y$ は陽に書くと，2 次方程式

$$(4x+1)y^2+(3x+1)y+(x^3-2)=0$$

を解いて，

$$y=f(x)=\frac{3x+1\pm\sqrt{(3x+1)^2-4(4x+1)(x^3-2)}}{8x+2}$$

と表される．しかし，この形では取り扱いが面倒であるから，陰関数として取り扱う．導関数 $y'=f'(x)$ は

$$F_x=3x^2+3y+4y^2,\quad F_y=3x+8xy+2y+1$$

を用いて，

$$y'=f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{3x^2+3y+4y^2}{3x+8xy+2y+1}$$

と求まる．

$\square$

**例 2.128** **（陰関数）** 条件 $F(x,y)=x^3+xy^2-2=0$ で定義される陰関数 $y=f(x)$ を考える．条件 $x^3+xy^2-2=0$ の両辺を $x$ で微分すると

$$(☆)\qquad 0=(x^3+xy^2-2)'=(x^3)'+x'y^2+x(y^2)'+0=3x^2+y^2+2xyy'$$

となる．よって

$$y'=-\frac{3x^2+y^2}{2xy}$$

を得る．(☆) をさらに $x$ で微分すると

$$\begin{aligned}0&=(3x^2+y^2+2xyy')'=3(x^2)'+(y^2)'+2(x)'yy'+2x(y)'y'+2xy(y')'\\&=6x+2yy'+2yy'+2xy'^2+2xyy''=6x+4yy'+2xy'^2+2xyy''\\&=6x+4y\left(-\frac{3x^2+y^2}{2xy}\right)+2x\left(-\frac{3x^2+y^2}{2xy}\right)^2+2xyy''\end{aligned}$$

となる．両辺に $(2xy)^2$ を掛けてまとめると

$$\begin{aligned}0&=6x(2xy)^2-4y(3x^2+y^2)(2xy)+2x(3x^2+y^2)+2xyy''(2xy)^2\\&=9x^4-3y^4+6x^2y^2+4x^2y^3y''=3(3x^2-y^2)(x^2+y^2)+4x^2y^3y''\end{aligned}$$

となる．また条件より $x^2+y^2=2/x$ であることを用いると

$$y''=-\frac{3(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{4x^2y^3}=-\frac{3(3x^2-y^2)}{2x^3y^3}$$

を得る．

曲線 $F=0$ 上の点 $(1,1)$ において，関数 $y=f(x)$ を $x=1$ のまわりでテイラー展開する．$(x,y)=(1,1)$ であることを用いて

$$f(1)=1, \quad f'(1)=-2, \quad f''(1)=-3$$

であるから，

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2+\cdots=1-2(x-1)-\frac{3}{2}(x-1)^2+\cdots$$

と得られる． □

**問 2.129** **（陰関数）** 次の条件で定義される陰関数 $y=f(x)$ の導関数を求めよ．

(1) $x^3+3x^2y+2xy^2+3y^3=4$ (2) $x+y=e^{xy}$ (3) $\log(x^2+y^2)=2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ □

## § 2.31 接線

**注意 2.130** **（曲線の法線ベクトル）** $xy$ 平面内の曲線 $F(x,y)=0$ 上の点をパラメータ表示し，$(x(t),y(t))$ とおく．このとき，曲線上の 2 点 $P(x(t),y(t)), Q(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t))$ は $\Delta t$ が十分小さいときテイラー展開して

$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{x}(t+\Delta)-\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}'(t)\Delta t+O(\Delta t^2)$$

と表される．$\Delta t\to 0$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ の向きと接線の方向ベクトル $\boldsymbol{p}$ の向きは等しくなる．よって，接線の方向ベクトルは $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}'(t)$ である．一方，$F(x(t),y(t))=0$ の両辺を $t$ で微分すると

$$F_x(x,y)x'(t)+F_y(x,y)y'(t)=0$$

となる．ベクトルで表すと

$$\nabla F(x,y)\cdot\boldsymbol{x}'(t)=0$$

となる．$\nabla F$ は $\boldsymbol{x}'(t)$ と直交する．よって，接線の法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\nabla F(x,y)$ である． □

**定理 2.131** **（接線）** 曲線 $F(x,y)=0$ の点 $(a,b)$ における**接線の方程式**は

$$F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

で与えられる．ベクトルで表記すると

$$\nabla F(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$$

となる．

（証明） 接線は点 $(a,b)$ を通り，法線ベクトルが $\nabla F(a,b)$ の直線であるので，$\nabla F(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$ を得る．または，次のようにも示される．条件 $F(x,y)=0$ により定義される陰関数 $y=f(x)$ を考える．このとき $y$ の導関数は

$$y'=f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

である．$y=f(x)$ の $x=a$ における接線の方程式は

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)=f(a)-\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,a)}(x-a)\quad\Rightarrow\quad F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

と表される．ただし，$b=f(a)$ とおく． □

**例** 2.132 **（接線の方程式）** 円 $F = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の点 $(x_0, y_0)$ における接線の方程式を求める．接線の法線ベクトルは

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y$$

を用いて $\nabla F$ であり，点 $(x_0, y_0)$ を通る直線であるから，

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 x + y_0 y - ({x_0}^2 + {y_0}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 x + y_0 y = 1$$

を得る． □

**例** 2.133 **（接線の方程式）** 曲線 $F = x^3 + 3xy + 4xy^2 + y^2 + y - 2 = 0$ の点 $(1, -1)$ における接線の方程式を求める．

$$F_x = 3x^2 + 3y + 4y^2, \quad F_y = 3x + 8xy + 2y + 1, F_x(1, -1) = 4, \quad F_y(1, -1) = -6$$

より，接線は

$$F_x(1, -1)(x - 1) + F_y(1, -1)(y + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3y - 5 = 0$$

と得られる．方程式を書き直して

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

とする．接線の傾きは $\frac{2}{3}$ で $y$ 切片は $-\frac{5}{3}$ である．

$$\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{-5}{3}} = 1$$

と書き直す．接線の $x$ 切片は $\frac{5}{2}$ で $y$ 切片は $-\frac{5}{3}$ である． □

## § 2.32 2 変数の陰関数

**定義** 2.134 **(陰関数)** 変数 $x, y, z$ が条件 $F(x,y,z)=0$ をみたすとき，$z$ は $x, y$ の関数 $z=f(x,y)$ であるとみなせる．すなわち，

$$F(x,y,f(x,y))=0$$

により定義される関数 $f(x,y)$ を，$F(x,y,z)=0$ で定義される**陰関数（implicit function）**という．

□

**例** 2.135 **(陰関数)** 条件

$$F(x,y,z)=x^2+3xy-2yz+xz+z^2-15=0$$

により定まる陰関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数を求める．$z=f(x,y)$ を代入すると

$$x^2+3xy-2yf(x,y)+xf(x,y)+f(x,y)^2-15=0$$

となる．両辺を $x$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}
(x^2+3xy-2yf(x,y)+xf(x,y)+f(x,y)^2-15)_x&=0,\\
(x^2)_x+(3xy)_x-(2yf(x,y))_x+(xf(x,y))_x+(f(x,y)^2)_x-(15)_x&=0,\\
(x^2)_x+3y(x)_x-2y(f(x,y))_x+(xf(x,y))_x+(f(x,y)^2)_x-15(1)_x&=0,\\
2x+3y-2yf_x(x,y)+f(x,y)+xf_x(x,y)+2f(x,y)f_x(x,y)&=0,\\
(-2y+x+2f(x,y))f_x(x,y)+(2x+3y+f(x,y))&=0,\\
(-2y+x+2z)f_x(x,y)+(2x+3y+z)&=0
\end{aligned}$$

となので，

$$f_x(x,y)=z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+3y+z}{-2y+x+2z}$$

を得る．同様にして $y$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}
(x^2+3xy-2yf(x,y)+xf(x,y)+f(x,y)^2-15)_y&=0,\\
(x^2)_y+(3xy)_y-(2yf(x,y))_y+(xf(x,y))_y+(f(x,y)^2)_y-(15)_y&=0,\\
x^2(1)_y+3x(y)_y-2(yf(x,y))_y+x(f(x,y))_y+(f(x,y)^2)_y-15(1)_y&=0,\\
3x-2f(x,y)-2yf_y(x,y)+xf_y(x,y)+2f(x,y)f_y(x,y)&=0,\\
(-2y+x+2f(x,y))f_y(x,y)+(3x-2f(x,y))&=0,\\
(-2y+x+2z)f_y(x,y)+(3x-2z)&=0
\end{aligned}$$

となるので，

$$f_y(x,y)=z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3x-2z}{-2y+x+2z}$$

を得る．

□

**定理 2.136** **(陰関数の微分)** 条件 $F(x,y,z)=0$ で定義される陰関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数は，$F_z(x,y,z)\neq 0$ のとき

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\qquad f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

で与えられる．

（証明） 条件 $0=F(x,y,z)$ に $z=f(x,y)$ を代入して，両辺を $x$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,f(x,y))=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\&=\frac{\partial F}{\partial x}\times 1+\frac{\partial F}{\partial y}\times 0+\frac{\partial F}{\partial z}f_x(x,y)=F_x(x,y,z)+F_z(x,y,z)f_x(x,y)\end{aligned}$$

となるので，$f_x=-F_x/F_z$ を得る．同様にして $y$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,f(x,y))=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\\&=\frac{\partial F}{\partial x}\times 0+\frac{\partial F}{\partial y}\times 1+\frac{\partial F}{\partial z}f_y(x,y)=F_y(x,y,z)+F_z(x,y,z)f_y(x,y)\end{aligned}$$

となるので，$f_y=-F_y/F_z$ を得る． □

**例 2.137** **(陰関数)** 条件

$$F(x,y,z)=x^2+3xy-2yz+xz+z^2-15=0$$

により定まる陰関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数を求める．まず,

$$F_x=2x+3y+z,\quad F_y=3x-2z,\quad F_z=-2y+x+2z$$

より，偏導関数は

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x+3y+z}{-2y+x+2z},\qquad z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{3x-2z}{-2y+x+2z}$$

と得られる． □

**例 2.138** **(陰関数)** 条件

$$F(x,y,z)=x^2+3xy-2yz+xz+z^2-15=0$$

により定まる陰関数 $z=f(x,y)$ の 2 階偏導関数 $z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ を求める．条件 $F=0$ の両辺を $x$ で偏微分すると

$$(☆)\qquad (-2y+x+2z)z_x+(2x+3y+z)=0$$

である．さらに $x$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}0 &= ((-2y+x+2z)z_x+(2x+3y+z))_x \\ &= (-2y+x+2z)_x z_x+(-2y+x+2z)z_{xx}+(2x+3y+z)_x \\ &= (1+2z_x)z_x+(-2y+x+2z)z_{xx}+(2+z_x) \\ &= (2+2z_x+2{z_x}^2)+(-2y+x+2z)z_{xx}\end{aligned}$$

となるから，

$$z_{xx} = -\frac{2+2z_x+2{z_x}^2}{-2y+x+2z} = \cdots = -\frac{2(19y^2+9xy-6yz+3x^2+3xz+3z^2)}{(-2y+x+2z)^3}$$

を得る．(☆) の両辺を $y$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}0 &= ((-2y+x+2z)z_x+(2x+3y+z))_y \\ &= (-2y+x+2z)_y z_x+(-2y+x+2z)z_{xy}+(2x+3y+z)_y \\ &= (-2+2z_y)z_x+(-2y+x+2z)z_{xy}+(3+z_y) \\ &= (3-2z_x+z_y+2z_xz_y)+(-2y+x+2z)z_{xy}\end{aligned}$$

となるから，

$$z_{xy} = -\frac{3-2z_x+z_y+2z_xz_y}{-2y+x+2z} = \cdots = -\frac{2(5xy-16yz+8x^2+8xz+8z^2)}{(-2y+x+2z)^3}$$

を得る．条件 $F=0$ の両辺を $y$ で偏微分すると

$$(-2y+x+2z)z_y+(3x-2z)=0$$

である．さらに $y$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}0 &= ((-2y+x+2z)z_y+(3x-2z))_y \\ &= (-2y+x+2z)_y z_y+(-2y+x+2z)z_{yy}+(3x-2z)_y \\ &= (-2+2z_y)z_y+(-2y+x+2z)z_{yy}-2z_y \\ &= (-4z_y+2{z_y}^2)+(-2y+x+2z)z_{yy}\end{aligned}$$

となるから，

$$z_{yy} = -\frac{-4z_y+2{z_y}^2}{-2y+x+2z} = \cdots = -\frac{2(3x-2z)(5x-4y+2z)}{(-2y+x+2z)^3}$$

を得る． □

**問 2.139** **（陰関数）**　次の条件で定義される陰関数 $z=f(x,y)$ の導関数を求めよ．

(1)　$z=x^2+4xy+y^3$　(2)　$3x^3+4y^2z=z^4+10$　(3)　$3x^2+4y^2-5z^2=20$

(4)　$y=\dfrac{x}{z^2}-\dfrac{z}{x^2}$　(5)　$x^2+2y+3z+5=\log z$　(6)　$z=e^x\sin(y+z)+1$

(7)　$z=\sin(2x+1)\cos(y^2+4)$　(8)　$\sin xy+\sin yz+\sin xz=1$ □

## § 2.33 陰関数の高階導関数

**問 2.140** **(陰関数の高階偏導関数)** 条件 $F(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=f(x)$ の高階導関数を求めよ.

(答え) 条件 $F(x,y)=0$ の両辺を $x$ で微分すると

$$0=\frac{d}{dx}F(x,y)=F_x+F_y y'$$

となる．さらに微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{d^2}{dx^2}F(x,y)=\frac{d}{dx}(F_x+F_y y')=\frac{d}{dx}F_x+\frac{d}{dx}(F_y y')=\frac{d}{dx}F_x+\left(\frac{d}{dx}F_y\right)y'+F_y\frac{d}{dx}y'\\&=F_{xx}+F_{xy}y'+(F_{xy}+F_{yy}y')y'+F_y y''=F_{xx}+2F_{xy}y'+F_{yy}y'^2+F_y y''\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}y''&=-\frac{F_{xx}+2F_{xy}y'+F_{yy}y'^2}{F_y}=-\frac{F_{xx}+2F_{xy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+F_{yy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)^2}{F_y}\\&=-\frac{F_{xx}{F_y}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}{F_x}^2}{{F_y}^3}\end{aligned}$$

を得る．同様にして $y''',\cdots$ を求める． □

**問 2.141** **(陰関数の高階偏導関数)** 条件 $F(x,y,z)=0$ で定まる陰関数 $z=f(x,y)$ の高階偏導関数を求めよ.

(答え) 条件 $F(x,y,z)=0$ の両辺を $x$ と $y$ で偏微分するとそれぞれ

$$0=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z)=F_x+F_z z_x,\qquad 0=\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z)=F_y+F_z z_y$$

となる．第 1 式をさらに $x$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(F_x+F_z z_x)=\frac{\partial}{\partial x}F_x+\left(\frac{\partial}{\partial x}F_z\right)z_x+F_z\frac{\partial}{\partial x}z_x\\&=F_{xx}+F_{xz}z_x+(F_{zx}+F_{zz}z_x)z_x+F_z z_{xx}=F_{xx}+2F_{xz}z_x+F_{zz}{z_x}^2+F_z z_{xx}\end{aligned}$$

となるので,

$$z_{xx}=-\frac{F_{xx}+2F_{xz}z_x+F_{zz}{z_x}^2}{F_z}=-\frac{F_{xx}{F_z}^2-2F_{xz}F_xF_z+F_{zz}{F_x}^2}{{F_z}^3}$$

を得る．第 1 式をさらに $y$ で偏微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}F(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(F_x+F_z z_x)=\frac{\partial}{\partial y}F_x+\left(\frac{\partial}{\partial y}F_z\right)z_x+F_z\frac{\partial}{\partial y}z_x\\&=F_{xy}+F_{xz}z_y+(F_{zy}+F_{zz}z_y)z_x+F_z z_{xy}=F_{xy}+F_{yz}z_x+F_{xz}z_y+F_{zz}z_xz_y+F_z z_{xy}\end{aligned}$$

となるので，

$$z_{xy} = -\frac{F_{xy} + F_{yz}z_x + F_{xz}z_y + F_{zz}z_x z_y}{F_z} = -\frac{F_{xy}{F_z}^2 - F_{yz}F_xF_z - F_{xz}F_yF_z + F_{zz}F_xF_y}{{F_z}^3}$$

を得る．第 2 式をさらに $y$ で偏微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(F_y + F_z z_y) = \frac{\partial}{\partial y}F_y + \left(\frac{\partial}{\partial y}F_z\right) z_y + F_z \frac{\partial}{\partial y} z_y \\ &= F_{yy} + F_{yz}z_y + (F_{zy} + F_{zz}z_y)z_y + F_z z_{yy} = F_{yy} + 2F_{yz}z_y + F_{zz}{z_y}^2 + F_z z_{yy} \end{aligned}$$

となるので，

$$z_{yy} = -\frac{F_{yy} + 2F_{yz}z_y + F_{zz}{z_y}^2}{F_z} = -\frac{F_{yy}{F_z}^2 - 2F_{yz}F_yF_z + F_{zz}{F_y}^2}{{F_z}^3}$$

を得る．同様にして $z_{xxx}, \cdots$ を求める． □

## § 2.34 接平面

**注意 2.142** **（曲面の法線ベクトル）** 曲面 $F(x,y,z)=0$ 上の曲線をパラメータ表示して $(x(t),y(t),z(t))$ とおく．このとき，

$$F(x(t),y(t),z(t))=0$$

が成り立つ．両辺を $t$ で微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{dt}F(x(t),y(t),z(t))=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\&=F_x(x,y,z)x'(t)+F_y(x,y,z)y'(t)+F_z(x,y,z)z'(t)\end{aligned}$$

となる．ベクトル表記すると

$$\nabla F(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}'(t)=0$$

である．$\nabla F(\boldsymbol{x})$ は曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ の接ベクトルと常に直交する．

曲面 $F=0$ 上の点 $(a,b,c)$ において，この点を通るあらゆる曲線 $(x(t),y(t),z(t))$ を考える．便宜上 $x(0)=a, y(0)=b, z(0)=c$ とおく．あるベクトル $\boldsymbol{n}$ がこの曲線の接ベクトル $\boldsymbol{x}'(0)$ と常に直交するとする．このとき，$\boldsymbol{n}$ を曲面 $F=0$ の**法線ベクトル**という．曲線の接ベクトル $\boldsymbol{x}'(0)$ に直交するベクトルは $\nabla F$ であるから，法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\nabla F(\boldsymbol{a})$ である． □

**定理 2.143** **（接平面）** 曲面 $F(x,y,z)=0$ の点 $(a,b,c)$ における**接平面（tangent plane）**は

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$$

で与えられる．ベクトルで表記すると

$$\nabla F(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$$

となる．

□

**注意 2.144** **（接平面）** グラフ $z=f(x,y)$ の点 $(a,b)$ における接平面は，$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$ とおき接平面を求めればよい．$F_x=f_x, F_y=f_y, F_z=-1$ であるか，

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$$

となり，接平面は

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

と表される．この右辺は関数 $f(x,y)$ の点 $(a,b)$ まわりのテイラー展開の 1 次近似と等しい． □

**例 2.145** **(接平面)**　球 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ の点 $(x_0,y_0,z_0)$ における接平面を求める．

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z,\quad F_x(x_0,y_0,z_0)=2x_0,\quad F_y(x_0,y_0,z_0)=2y_0,\quad F_z(x_0,y_0,z_0)=2z_0$$

より，接平面は

$$\begin{aligned}
&F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0\\
&\quad\Rightarrow\quad 2x_0(x-x_0)+2y_0(x-y_0)+2z_0(x-z_0)=0\\
&\quad\Rightarrow\quad x_0x+y_0y+z_0z-(x_0^2+y_0^2+z^2)=0\quad\Rightarrow\quad x_0x+y_0y+z_0z=1
\end{aligned}$$

と求まる．法線ベクトルが $\begin{bmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{bmatrix}^T$ の平面である． □

**問 2.146** **(接平面)**　曲面 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ の点 $(x_0,y_0,z_0)$ における接平面を求めよ． □

**例 2.147** **(接平面)**　曲面

$$F(x,y,z)=x^2+3xy-2yz+xz+z^2-3=0$$

の点 $(2,0,-1)$ における接平面を求める．まず，

$$\begin{aligned}
&F_x=2x+3y+z,\quad F_y=3x-2z,\quad F_z=-2y+x+2z,\\
&F_x(2,0,-1)=3,\quad F_y(2,0,-1)=8,\quad F_z(2,0,-1)=0,
\end{aligned}$$

より，接平面は

$$3(x-2)+8(y-0)+0(z+1)=0\quad\Rightarrow\quad 3x+8y-6=0$$

である．法線ベクトルが $\begin{bmatrix}3 & 8 & 0\end{bmatrix}^T$ の平面である．書き直して

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{3}{4}}=1$$

とする．$x$ 軸，$y$ 軸との交点は $x=2, y=\frac{3}{4}$ である．$z$ 軸とは交点をもたず，$z$ 軸と平行な平面である． □

**例 2.148** **(接平面)**　関数 $z=f(x,y)=4x^2y+xy^3$ の点 $(-1,1)$ における接平面は，

$$f_x=8xy+y^3,\quad f_y=4x^2+3xy^2,\quad f(-1,1)=3,\quad f_x(-1,1)=-7,\quad f_y(-1,1)=1$$

より，

$$z=f(-1,1)+f_x(-1,1)(x+1)+f_y(-1,1)(y-1)=3-7(x+1)+(y-1)=-7x+y-5$$

と得られる．接平面を標準形で書くと

$$7x - y + z + 5 = 0$$

である．この平面の法線ベクトルは $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ である．また，

$$\frac{x}{-\frac{5}{7}} + \frac{y}{5} + \frac{z}{-5} = 1$$

と書き直す．平面と $x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸の交点は $x = -\frac{5}{7}, y = 5, z = -5$ である． □

## § 2.35 極値

**定義** 2.149 **（極値）** 関数 $f(x,y)$ が，点 $(a,b)$ とその任意の近傍の点 $(a+h,b+k)$ に対して

$$f(a,b) > f(a+h,b+k)$$

をみたすとき，$f(x,y)$ は点 $(a,b)$ で**極大値** $f(a,b)$ をとるという．また，

$$f(a,b) < f(a+h,b+k)$$

をみたすとき，$f(x,y)$ は点 $(a,b)$ で**極小値** $f(a,b)$ をとるという．極大値，極小値を総称して**極値**という．

□

**定理** 2.150 **（極値の必用条件）** 関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b)$ で極値をとるとき，

$$f_x(a,b) = 0, \qquad f_y(a,b) = 0$$

が成り立つ.（注意）逆は成り立たない.

（証明） 平面 $y=b$ と曲面 $z=f(x,y)$ との共有点からなる曲線 $z=f(x,b)$ は $x$ についての 1 変数関数であり，$f(x,y)$ が極値をとるとき $f(x,b)$ も極値をとる．よって，$f_x(a,b)=0$ となる．同様にして，平面 $x=a$ を考えると $f_y(a,b)=0$ を得る．

□

**注意** 2.151 **（極値と接平面）** 関数 $f(x,y)$ は点 $(a,b)$ で極値をとるとする．このとき $f_x(a,b) = 0$, $f_y(a,b)=0$ であるから，$f(x,y)$ を点 $(a,b)$ のまわりでテイラー展開すると

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2 + \cdots$$

となり，1 次の項は存在しない．また，曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(a,b)$ における接平面の方程式は

$$z = f(a,b)$$

となり，法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

である．接平面は $xy$ 平面に平行である．

□

**例** 2.152 **(極値の計算例)** 関数 $f(x,y)=x^4+y^4$ の極値を考える．連立方程式

$$f_x(x,y)=4x^3=0,\quad f_y(x,y)=4y^3=0$$

を解くと候補の点 $(x,y)=(0,0)$ を得る．このとき点 $(0,0)$ とその任意の近傍の点 $(h,k)$ に対して，

$$f(h,k)-f(0,0)=h^4+k^4>0 \quad\Rightarrow\quad f(h,k)>f(0,0)$$

が成り立つ．よって関数 $f(x,y)$ は極小値 $f(0,0)=0$ をとる． □

**例** 2.153 **(鞍点)** 関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ の極値を考える．連立方程式

$$f_x(x,y)=2x=0,\quad f_y(x,y)=-2y=0$$

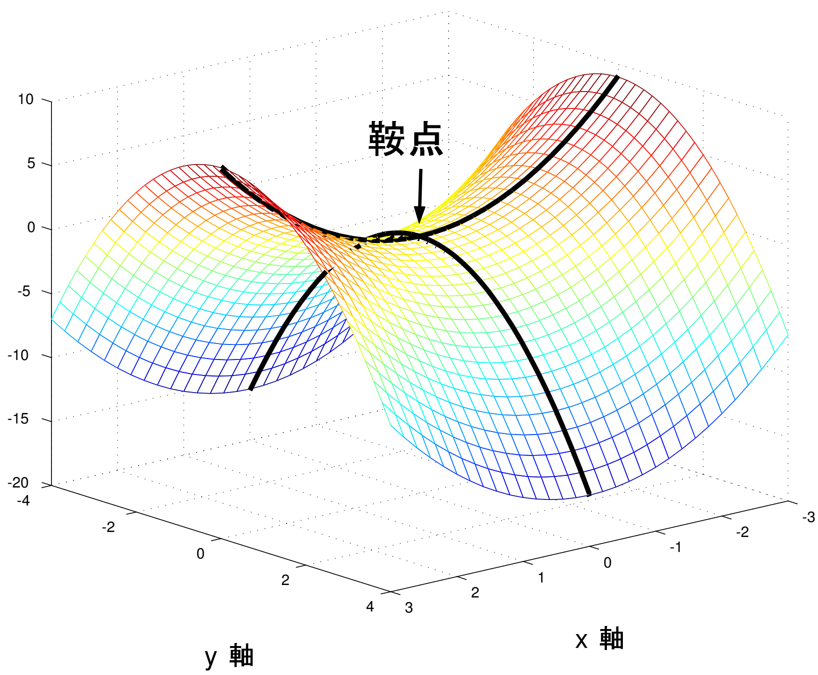
を解くと候補の点 $(x,y)=(0,0)$ を得る．しかし，$f(0,0)=0$ は極値とはならない．なぜなら，点 $(0,0)$ と $x$ 軸方向にずれた近傍の点 $(h,0)$ に対しては，

$$f(h,0)-f(0,0)=h^2>0 \quad\Rightarrow\quad f(h,0)>f(0,0)$$

となり，$f(0,0)$ は極小となる．一方，点 $(0,0)$ と $y$ 軸方向にずれた近傍の点 $(0,k)$ に対しては，

$$f(0,k)-f(0,0)=-k^2<0 \quad\Rightarrow\quad f(0,k)<f(0,0)$$

となり，$f(0,0)$ は極大となる．このようにある方向では極小であり，また別の方向では極大となる点のことを**鞍点（saddle point）**という．




□

**定理 2.154** **（極値）** 関数 $f(x,y)$ において点 $(a,b)$ が $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ をみたすとき，$f(a,b)$ が極値となるための判定条件は次の通りである．ただし，

$$D(a,b)=f_{xy}(a,b)^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$$

とおく．

(i) $D(a,b)<0$, $f_{xx}(a,b)>0$ のとき，$f(x,y)$ は点 $(a,b)$ で極小値をとる．

(ii) $D(a,b)<0$, $f_{xx}(a,b)<0$ のとき，$f(x,y)$ は点 $(a,b)$ で極大値をとる．

(iii) $D(a,b)>0$ のとき，$f(x,y)$ は点 $(a,b)$ で極値をとらない．

(iv) $D(a,b)=0$ のとき，個別に判定する．

（証明） typing... □

**例 2.155** **（極値の計算例）**　関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ の極値を求める．連立方程式

$$f_x=2x=0, \qquad f_y=2y=0$$

を解くと極値の候補として $(x,y)=(0,0)$ を得る．このとき，

$$f_{xx}=2>0, \quad f_{xy}=0, \quad f_{yy}=2, \quad D={f_{xy}}^2-f_{xx}f_{yy}=-4<0$$

となる．よって，$f(0,0)=0$ は極小値である． □

**例 2.156** **（極値の計算例）**　関数 $f(x,y)=x^2+y^3$ の極値を求める．連立方程式

$$f_x=2x=0, \qquad f_y=3y^2=0$$

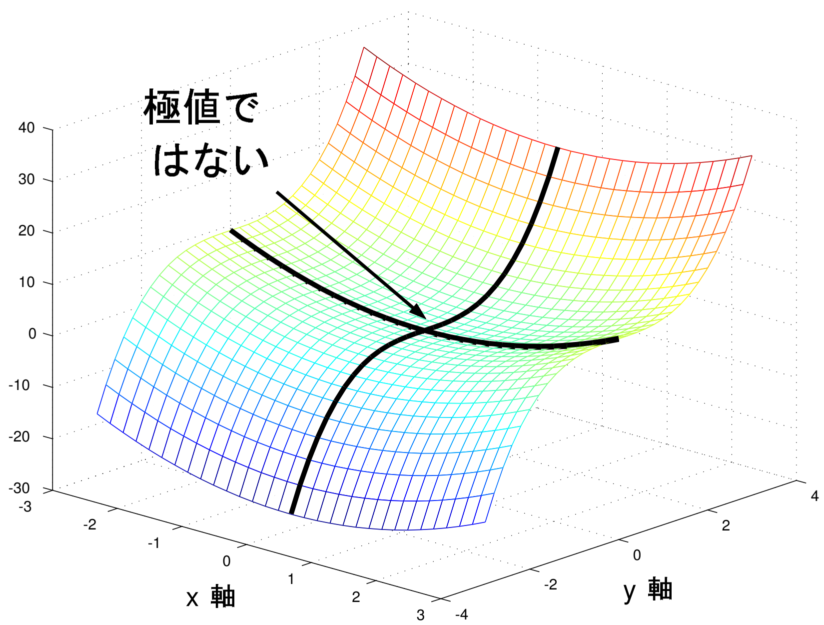
を解くと極値の候補として $(x,y)=(0,0)$ を得る．このとき，

$$f_{xx}(x,y)=2, \quad f_{xy}(x,y)=0, \quad f_{yy}(x,y)=6y, \quad D(x,y)={f_{xy}}^2-f_{xx}f_{yy}=-12y$$

となる．$D(0,0)=0$ であるから判別式 $D$ を用いて極値となるかは判定できない．そこで，点 $(0,0)$ とその近傍の点 $(0,k)$, $(0,-k)$ を考える．ただし， $k>0$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} f(0,k)-f(0,0)=k^3>0 &\quad\Rightarrow\quad f(0,k)>f(0,0) \\ f(0,-k)-f(0,0)=-k^3<0 &\quad\Rightarrow\quad f(0,-k)<f(0,0) \end{aligned}$$

が成り立つ．点 $(0,0)$ から $y$ 軸正の方向には増加傾向であり，$y$ 軸負の方向には減少傾向となるので，$f(0,0)=0$ は極値ではない．




□

**例 2.157** **（極値の計算例）**　関数 $f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+10$ の極値を求める．連立方程式

$$f_x=2x-2=0,\qquad f_y=2y+4=0$$

を解くと極値の候補として $(x,y)=(1,-2)$ を得る．このとき，

$$f_{xx}=2>0,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=2,\quad D={f_{xy}}^2-f_{xx}f_{yy}=-4<0$$

となる．よって，$f(1,-2)=5$ は極小値である． □

**例 2.158** **（極値の計算例）**　関数 $f(x,y)=x^3+y^3+3xy+2$ の極値を求める．連立方程式

$$f_x=3x^2+3y=0,\qquad f_y=3y^2+3x=0$$

を解く．第 1 式を $y=-x^2$ と変形して第 2 式に代入すると

$$x(x^3+1)=0$$

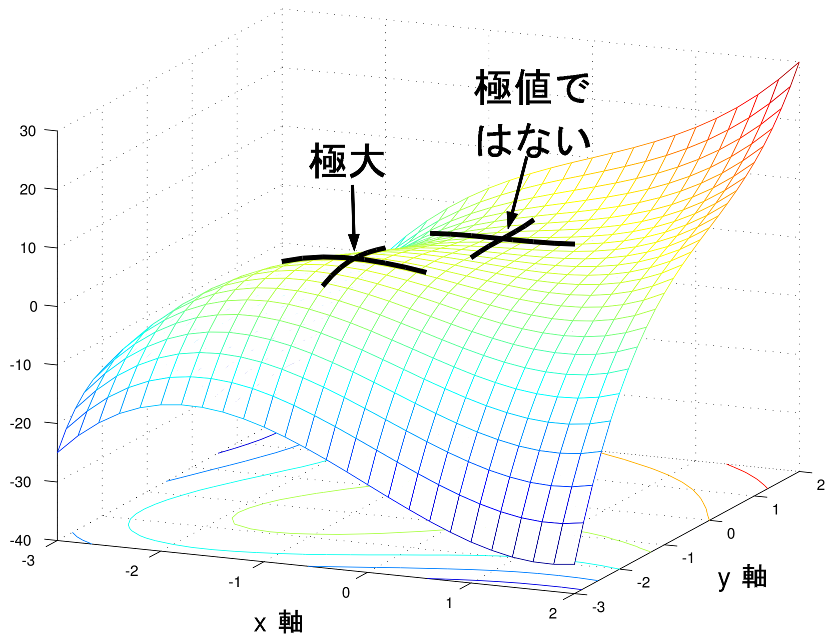
となる．これを解くと，極値の候補として

$$(x,y)=(0,0),(-1,-1)$$

を得る．このとき，

$$f_{xx}(x,y)=6x,\quad f_{xy}(x,y)=3,\quad f_{yy}(x,y)=6y,\quad D(x,y)={f_{xy}}^2-f_{xx}f_{yy}=9-36xy$$

を用いて極値であるか判定する．まず，$(x,y)=(0,0)$ の場合．$D(0,0)=9>0$ より $f(0,0)=2$ は極値ではない．次に，$(x,y)=(-1,-1)$ の場合．$D(-1,-1)=-27<0, f_{xx}(-1,-1)=-6<0$ より，$f(-1,-1)=1$ は極大値である．




□

**問 2.159** **（極値）**　次の関数の極値を求めよ．

(1)　$f(x,y)=1-2x^2-xy-y^2+2x-3y$　(2)　$f(x,y)=x^2-2xy+y^2-x^4-y^4$ □

## § 2.36 条件付き極値問題

**定理** 2.160 **（ラグランジュの未定乗数法）** 条件 $g(x,y)=0$ のもとでの関数 $f(x,y)$ の極値の候補は，$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおき，$(x,y,\lambda)$ についての連立方程式

$$F_x(x,y,\lambda)=0,\quad F_y(x,y,\lambda)=0,\quad F_\lambda(x,y,\lambda)=0$$

を解くことで得られる．これを**ラグランジュの未定乗数法（Lagrange multiplier method）**という．

（証明） 条件 $g(x,y)=0$ より $x$ と $y$ は独立ではないから，陰関数 $y=\varphi(x), x=\psi(y)$ が存在する．このとき，関数 $f(x,y)$ は 1 変数関数

$$p(x)=f(x,\varphi(x)),\qquad q(y)=f(\psi(y),y)$$

とみなされる．ここで，関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b)$ で極値をもつとする．このとき $p'(a)=0, q'(b)=0$ となるので，

$$\begin{aligned}
p'(a)&=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))\Big|_{x=a,y=b}=f_x(a,b)+f_y(a,b)\varphi'(a)=0,\\
q'(b)&=\frac{d}{dy}f(\psi(y),y)\Big|_{x=a,y=b}=f_x(a,b)\psi'(y)+f_y(a,b)=0
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}&=\varphi'(x)=-\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}\quad (\text{ただし，}g_y\neq 0),\\
\frac{dx}{dy}&=\psi'(y)=-\frac{g_y(x,y)}{g_x(x,y)}\quad (\text{ただし，}g_x\neq 0)
\end{aligned}$$

を用いると 2 つの式は

$$(\star)\qquad f_x(a,b)g_y(a,b)-f_y(a,b)g_x(a,b)=0$$

と 1 つの式となる．この方程式を解くことで極値の候補 $(a,b)$ が定まる．しかし，この方程式のままでは解くのが難しい．次のように式変形する．($\star$) を変形して

$$\lambda=\frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)}=\frac{f_y(a,b)}{g_x(a,b)}$$

とおく．これを ($\star$) へ代入して

$$f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0,\qquad f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0$$

を得る．ここで $\lambda$ も未知変数であると考えて，条件 $g(x,y)=0$ とあわせて，$(a,b,\lambda)$ についての連立方程式とみなす．$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおけば，この 3 つの方程式は $F_x=0$, $F_y=0$, $F_\lambda=0$ と表される． □

**例** 2.161 **(条件付き極値)**　条件 $g(x,y)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1=0$ のもとでの関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ の極値を求める．まず,

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^2-y^2-\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)$$

とおく．このとき連立方程式

$$F_x=2x-\frac{2\lambda}{9}x=0,\quad F_y=-2y-\frac{2\lambda}{4}y=0,\quad F_\lambda=-g=-\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)=0$$

を考える．これをまとめると

$$x(\lambda-9)=0,\quad y(\lambda+4)=0,\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

となる．$x=0$ のとき第 3 式より $y=\pm2$ であり，第 2 式より $\lambda=-4$ となる．$y=0$ のとき第 3 式より $x=\pm3$ であり，第 1 式より $\lambda=9$ となる．$\lambda=9$ のとき第 2 式より $y=0$ であり，第 3 式より $x=\pm3$ となる．$\lambda=-4$ のとき第 1 式より $x=0$ であり，第 3 式より $y=\pm2$ となる．よって連立方程式の解は

$$(x,y,\lambda)=(0,\pm2,-4),(\pm3,0,9)$$

となる．極値の候補となる点は

$$(x,y)=(0,\pm2),(\pm3,0)$$

である．これらの点が極値であるか確認する．条件 $g(x,y)=0$ により定まる 2 つの陰関数をそれぞれ $y=\varphi(x)$, $x=\psi(y)$ とおく．これらの導関数は

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\frac{g_x}{g_y}=-\frac{4x}{9y}\quad (\text{ただし } y\neq0 \text{ のとき}),$$
$$\frac{dx}{dy}=\psi'(y)=-\frac{g_y}{g_x}=-\frac{9y}{4x}\quad (\text{ただし } x\neq0 \text{ のとき})$$

となる．また，合成関数 $p(x)=f(x,\varphi(x))$, $q(x)=f(\psi(y),y)$ の導関数はそれぞれ

$$\begin{aligned}p'(x)&=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,y)\frac{dx}{dx}+f_y(x,y)\frac{dy}{dx}=f_x(x,y)+f_y(x,y)\varphi'(x)\\&=2x-2y\left(-\frac{4x}{9y}\right)=\frac{26}{9}x\quad (\text{ただし } y\neq0 \text{ のとき}),\\q'(y)&=\frac{d}{dy}f(\psi(y),y)=f_x(x,y)\frac{dx}{dy}+f_y(x,y)\frac{dy}{dy}=f_x(x,y)\psi'(y)+f_y(x,y)\\&=2x\left(-\frac{9y}{4x}\right)-2y=-\frac{13}{2}y\quad (\text{ただし } x\neq0 \text{ のとき})\end{aligned}$$

となる．さらに微分すると

$$p''(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{26}{9}x\right)=\frac{26}{9}>0\quad (\text{ただし } y\neq0 \text{ のとき}),$$
$$q''(y)=\frac{d^2}{dy^2}f(\psi(y),y)=\frac{d}{dy}\left(-\frac{13}{2}y\right)=-\frac{13}{2}<0\quad (\text{ただし } x\neq0 \text{ のとき})$$

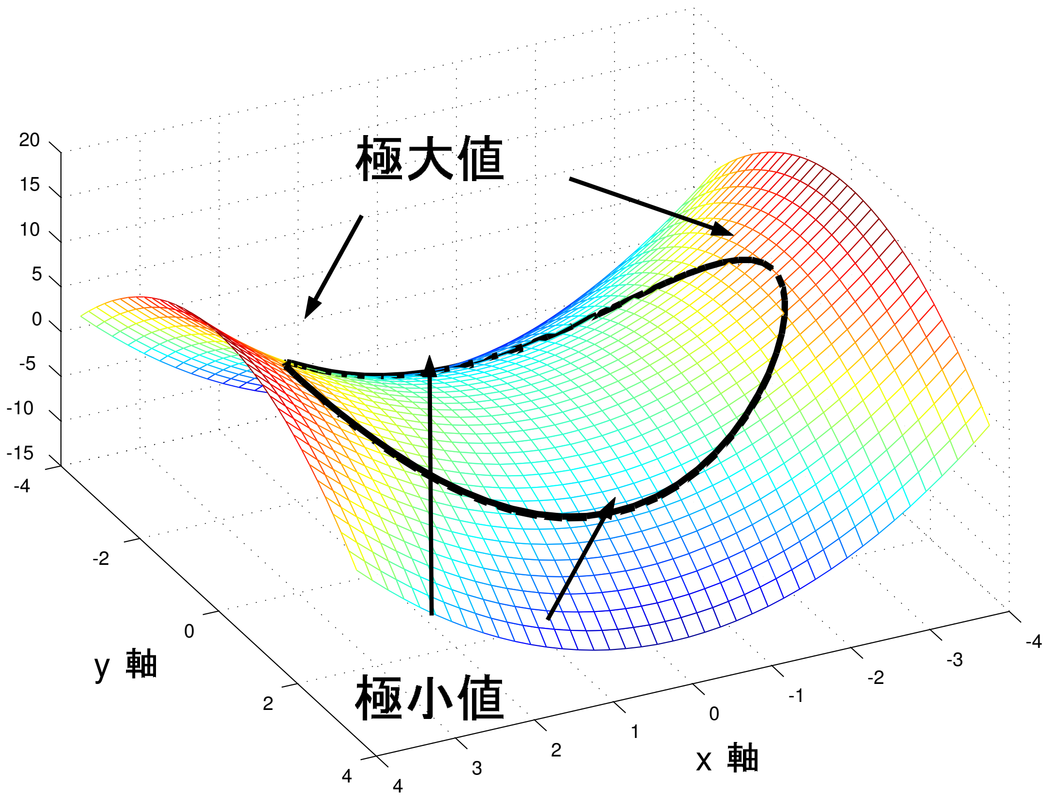
となる．よって，$(x,y)=(0,\pm 2)$ のとき，$x=0$ となるから $p(x)$ を用いて

$$p'(0)=0,\quad p''(0)=\frac{26}{9}>0$$

となるので，$f(0,\pm 2)=-4$ は極小値である．また，$(x,y)=(\pm 3,0)$ のとき，$y=0$ となるから $q(x)$ を用いて

$$q'(0)=0,\quad q''(0)=-\frac{13}{2}<0$$

となるので，$f(\pm 3,0)=9$ は極大値である．




□

**例 2.162** **（条件付き極値）**　条件 $g(x,y)=x^2-\dfrac{y^2}{4}-1=0$ のもとでの関数 $f(x,y)=x^3+y$ の極値を求める．まず，

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^3+y-\lambda\left(x^2-\frac{y^2}{4}-1\right)$$

とおく．このとき連立方程式

$$F_x=3x^2-2\lambda x=0,\quad F_y=1+\frac{2\lambda}{4}y=0,\quad F_\lambda=-g=-\left(x^2-\frac{y^2}{4}-1\right)=0$$

を考える．これをまとめると

$$x(3x-2\lambda)=0,\quad \lambda y+2=0,\quad x^2-\frac{y^2}{4}=1$$

となる．第 1 式より $x=0$ とする．このとき第 3 式より $y=\pm\sqrt{-4}$ となり実数解をもたないので不適である．第 1 式より $x=\dfrac{2\lambda}{3}$ とする．このとき，$\lambda\neq 0$ である．なぜなら，$\lambda=0$ とすると $x=0$ となるからである．よって第 2 式より $y=-\dfrac{2}{\lambda}$ である．

$$x=\frac{2\lambda}{3},\qquad y=-\frac{2}{\lambda}$$

を第 3 式に代入すると

$$(4\lambda^2+3)(\lambda^2-3)=0$$

となる．実数の範囲内の解は

$$\lambda=\pm\sqrt{3}$$

である．以上より，連立方程式の解は

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\mp\frac{2}{\sqrt{3}},\pm\sqrt{3}\right)\qquad\text{（複合同順）}$$

となる．極値の候補となる点は

$$(x,y)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

である．これらの点が極値であるか確認する．条件 $g(x,y)=0$ により定まる陰関数を $y=\varphi(x)$ とおく．この導関数は

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\frac{g_x}{g_y}=\frac{4x}{y}\quad\text{(ただし } y\neq 0 \text{ のとき)}$$

となる．また，合成関数 $p(x)=f(x,\varphi(x))$ の導関数は $y\neq 0$ のとき

$$p'(x)=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,y)\frac{dx}{dx}+f_y(x,y)\frac{dy}{dx}=f_x(x,y)+f_y(x,y)\varphi'(x)=3x^2+\frac{4x}{y}$$

となる．さらに微分すると

$$p''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x)) = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + \frac{4x}{y}\right) = 6x + \frac{4}{y} - \frac{4x\varphi'}{y^2} = 6x + \frac{4}{y} - \frac{16x^2}{y^3}$$
$$= 6x - \frac{16}{y^3}\left(x^2 - \frac{y^2}{4}\right) = 6x - \frac{16}{y^3}$$

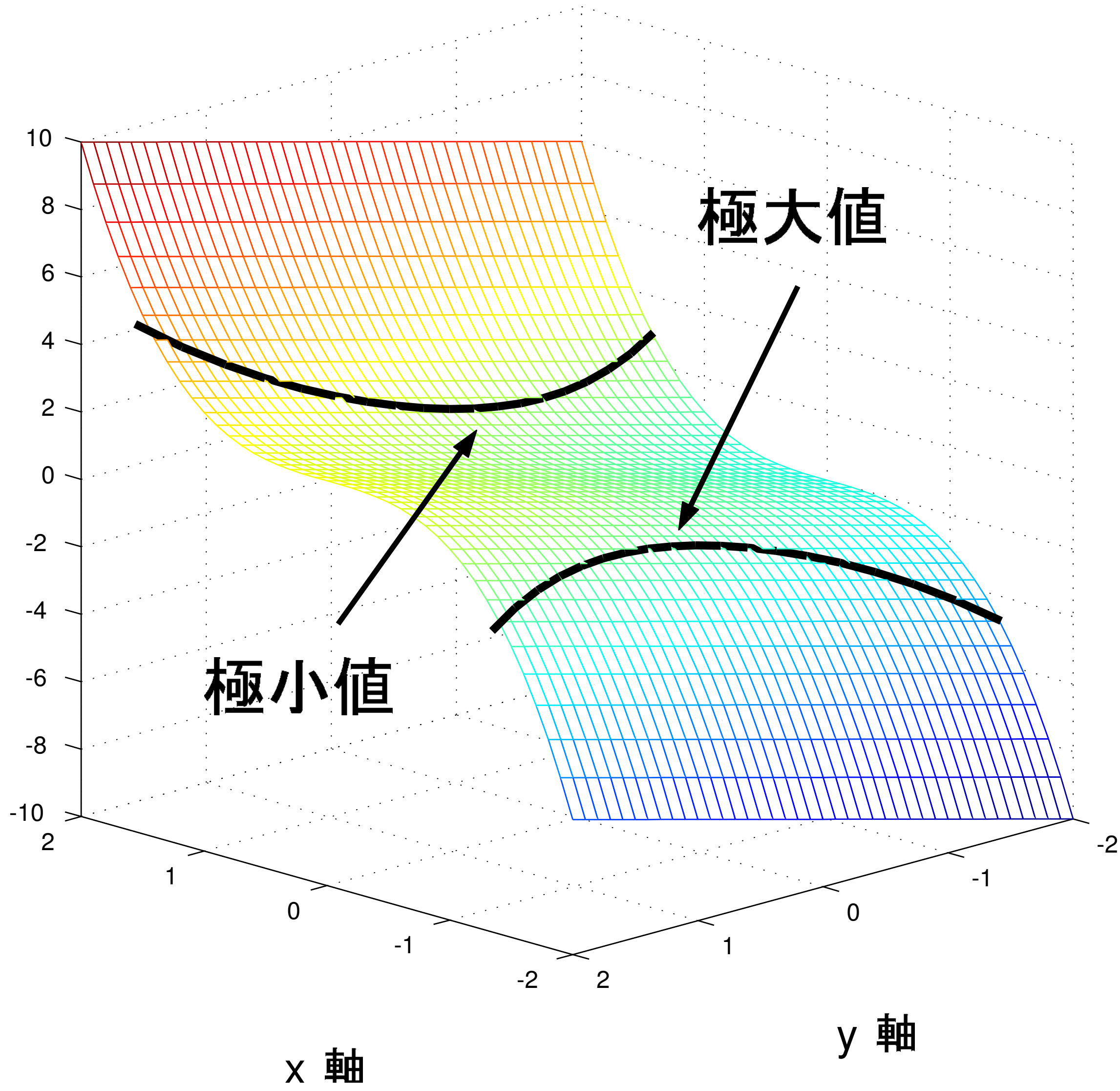
となる．よって，$(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき，

$$p'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0, \qquad p''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 10\sqrt{3} > 0$$

となるので，$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ は極小値であり，$(x,y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき，

$$p'\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0, \qquad p''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -10\sqrt{3} < 0$$

となるので，$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ は極大値である．




□

$\boxed{\textbf{例}\ 2.163}$ **（条件付き極値）** 条件 $g(x,y)=x^2+y^2-a^2=0$ $(a>0)$ のもとでの関数 $f(x,y)=2xy$ の極値を求める．まず，

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=2xy-\lambda(x^2+y^2-a^2)$$

とおく．このとき連立方程式

$$F_x=2y-2\lambda x=0,\quad F_y=2x-2\lambda y=0,\quad F_\lambda=-g=-(x^2+y^2-a^2)=0$$

を考える．これをまとめると

$$y-\lambda x=0,\quad x-\lambda y=0,\quad x^2+y^2=a^2$$

となる．第 1 式より $y=\lambda x$ を第 2 式に代入して

$$(1-\lambda^2)x=0$$

となる．$x=0$ のとき，第 1 式では $y=0$ となり，第 3 式では $y=\pm a$ となる．これは矛盾するので不適である．$\lambda=1$ のとき，$y=x$ であり第 3 式から $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ となる．$\lambda=-1$ のとき，$y=-x$ であり第 3 式から $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ となる．以上より，連立方程式の解は

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\pm\frac{a}{\sqrt{2}},1\right),\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\mp\frac{a}{\sqrt{2}},-1\right)\qquad\text{（複合同順）}$$

となる．極値の候補となる点は

$$(x,y)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

である．これらの点が極値であるか確認する．条件 $g(x,y)=0$ により定まる陰関数を $y=\varphi(x)$ とおく．この導関数は

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\frac{g_x}{g_y}=-\frac{x}{y}\quad(\text{ただし } y\neq 0 \text{ のとき})$$

となる．また，合成関数 $p(x)=f(x,\varphi(x))$ の導関数は $y\neq 0$ のとき

$$p'(x)=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,y)\frac{dx}{dx}+f_y(x,y)\frac{dy}{dx}=f_x(x,y)+f_y(x,y)\varphi'(x)=2y-\frac{2x^2}{y}$$

となる．さらに微分すると

$$p''(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=\frac{d}{dx}\left(2y-\frac{2x^2}{y}\right)=2\varphi'-\frac{4x}{y}+\frac{2x^2\varphi'}{y^2}=-\frac{6x}{y}-\frac{2x^3}{y^3}$$

となる．よって，$(x,y)=\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，

$$p'\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=0,\qquad p''\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-8<0$$

となるので，$f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=a^2$ は極大値である．$(x,y)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，

$$p'\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=0, \qquad p''\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=8>0$$

となるので，$f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-a^2$ は極小値である． $\square$

# 3 多重積分

## § 3.1 多重積分

**注意 3.1** **（定積分）** 1 変数関数 $f(x)$ を考える．区間 $[a,b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

と $N$ 個に分割し，各小区間の幅を $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ とおく．このとき，各小区間の矩形の符合付き面積は $\Delta S_n = f(\xi_n)\Delta x_n$ $(x_{n-1} < \xi_n < x_n)$ であるから，曲線 $y = f(x)$ と区間 $[a,b]$ における**符合付きの面積**は

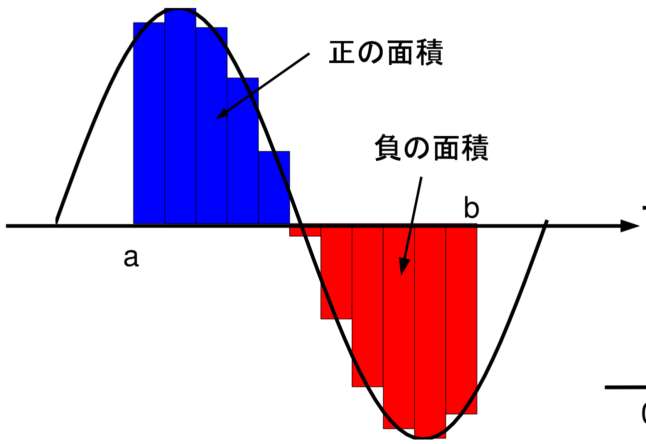
$$S = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\Delta S_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)\Delta x_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

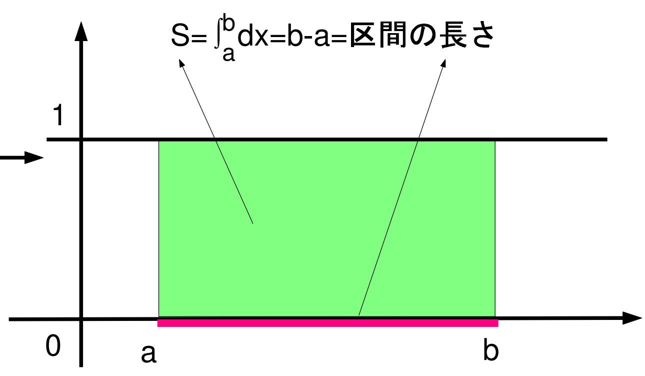
で与えられ，これが $f(x)$ の定積分である．また，定積分においては区間についても向きがあることに注意する． □

**注意 3.2** **（定積分と区間の長さ）** 被積分関数が $f(x) = 1$ のとき，定積分

$$\int_a^b dx = \Big[x\Big]_a^b = b - a$$

は区間 $I = [a,b]$ の**長さ**を表す． □



**定義 3.3** **（2 重積分）** **長方形領域**

$$D = \{\, (x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d \,\}$$

を $x$ 軸方向に $N$ 分割し，$y$ 軸方向に $M$ 分割し，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b, \qquad c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{M-1} < y_M = d$$

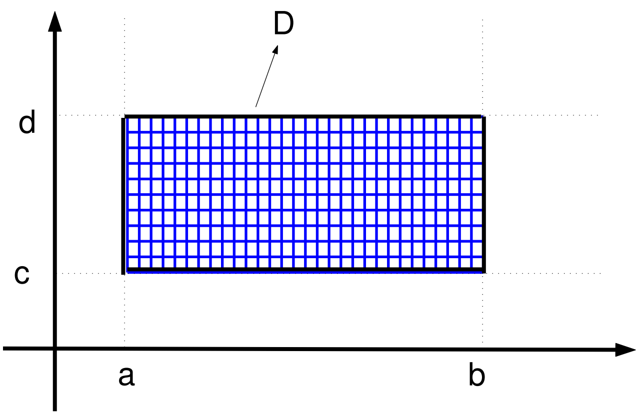
とする．各小領域

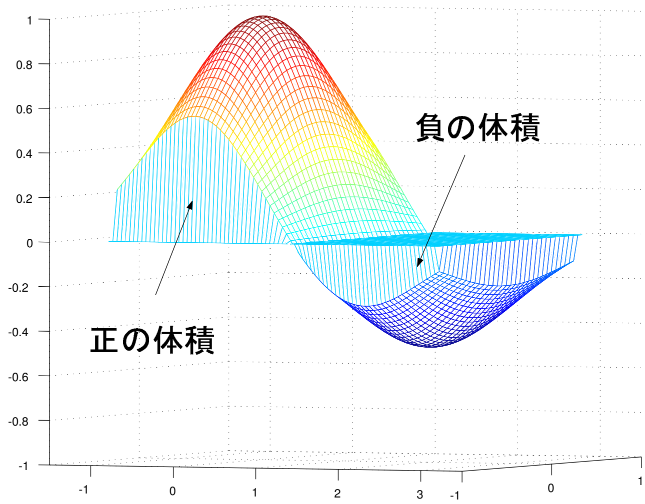
$$D_{n,m} = \{\, (x,y) \mid x_{n-1} < x < x_n, y_{m-1} < y < y_m \,\}$$

の $x$ 方向，$y$ 方向の幅を $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}, \Delta y_m = y_m - y_{m-1}$ とおくと，小領域 $D_{n,m}$ の面積は $\Delta S_{n,m} = \Delta x_n \Delta y_n$ であり，曲面 $z = f(x,y)$ と $D_{n,m}$ ではさまれた領域の体積は $\Delta V_{n,m} = f(\xi_n, \eta_m)\Delta S_{n,m} = f(\xi_n, \eta_m)\Delta x_n \Delta y_m$ である．ただし，$x_{n-1} < \xi_n < x_n, y_{m-1} < \eta_m < y_m$ とする．よって，曲面 $z = f(x,y)$ と領域 $D$ とではさまれた領域の**符合付き体積**は

$$\begin{aligned} V &= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \Delta V_{n,m} \\ &= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} f(\xi_n,\eta_m)\Delta x_n \Delta y_m = \iint_D f(x,y)\,dxdy \\ &= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} f(\xi_n,\eta_m)\Delta S_{n,m} = \iint_D f(x,y)\,dS \end{aligned}$$

で与えられる．これを 2 変数関数 $f(x,y)$ に対する **2 重積分**または**面積分**という．




□

**注意 3.4** **（領域の面積の向き）** 定積分では積分区間に向きを導入し，$\int_a^b dx = -\int_b^a dx$ となるが，多重積分では，微小領域の面積 $\Delta S_{n,m}$ は正のみである．例えば $a$ と $b$ とを入れ替えて $\Delta S_{n,m} < 0$ となることは許されない．

□

**定義** 3.5 **（2 重積分）** 任意の領域 $D$ に対する 2 重積分は，領域 $D$ を含む長方形領域 $\tilde{D}$ を考え，関数

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

を導入し，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x,y)\,dxdy$$

と定義する．

Figure. typing...

□

**注意** 3.6 **（多重積分と領域の面積）** 被積分関数が $f(x,y)=1$ のとき，

$$S = \iint_D dxdy$$

は領域 $D$ の**面積**となる．

Figure. typing...

□

**定義** 3.7 **(3 重積分)**　3 変数関数 $f(x,y,z)$ に対する **3 重積分**は

$$
\begin{aligned}
\tilde{V} &= \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{N,M,L\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} f(\xi_n,\eta_m,\lambda_l)\Delta x_n\Delta y_m\Delta z_l \\
&= \iiint_D f(x,y,z)\,dV = \lim_{N,M,L\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} f(\xi_n,\eta_m,\lambda_l)V_{n,m,l}
\end{aligned}
$$

と定義される.

□

**注意** 3.8 **(多重積分と領域の面積)**　$\tilde{V}$ は **4 次元の符合付き体積**を表す,
また，被積分関数が $f(x,y,z)=1$ のとき,

$$
V = \iint_D dxdydy
$$

は領域 $D$ の**体積**を表す.

□

**定義** 3.9 **($n$ 重積分)**　同様にして定義される $n$ 変数関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対する $\boldsymbol{n}$ **重積分**は

$$
\tilde{V}_{n+1} = \iint\cdots\int_D f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n
$$

と表記する.

□

**注意** 3.10 **(多重積分と領域の面積)**　$\tilde{V}_{n+1}$ は $\boldsymbol{n+1}$ **次元の符合付き体積**を表す,
また，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$ のとき,

$$
V_n = \iint\cdots\int_D dx_1dx_2\cdots dx_n
$$

は領域 $D$ の $\boldsymbol{n}$ **次元の体積**を表す.

□

**定義** 3.11 **(多重積分)**　2 重積分，3 重積分，$\cdots$ のことを総称して，**多重積分**または**重積分**という.

□

## § 3.2 累次積分

**定義** 3.12 **（簡単な領域）** 領域 $D$ が

$$D = \{\, (x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \,\}$$

と表されるとき，$D$ を $x$ **に関して簡単な領域**という．

$$D = \{\, (x,y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \,\}$$

と表されるとき，$D$ を $y$ **に関して簡単な領域**という． □

**定理** 3.13 **（累次積分）** 領域 $D$ が $x$ に関して単純なとき，多重積分は定積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

により与えられる．領域 $D$ が $y$ に関して単純なとき，多重積分は定積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

により与えられる．これらの積分を**累次積分**という． □

**注意** 3.14 **（累次積分）** 累次積分は省略して次のように表記する：

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\, f(x,y),$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx\, f(x,y).$$

□

Figure. typing...

$x$ に関して単純な領域

Figure. typing...

$y$ に関して単純な領域

# § 3.3 2 重積分の計算

**例 3.15** **($x, y$ 両方に単純な領域における多重積分)** 領域 $D$ を下図のような三角形の領域とする．このとき多重積分

$$I = \iint_D dxdy$$

を求める．被積分関数は 1 であるから，領域 $D$ の面積を $S = \frac{1}{2}$ とすると，$I = 1 \times S = S = \frac{1}{2}$ となる．

領域 $D$ を $x$ に関して単純な領域として表すと

$$D = \{\ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq x \}$$

となる．このとき累次積分で計算すると

$$I = \iint_D dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x dy = \int_0^1 \left\{ \Big[\, y \,\Big]_0^x \right\} dx = \int_0^1 (x - 0) dx = \int_0^1 x\, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

と得られる．

領域 $D$ を $y$ に関して単純な領域として表すと

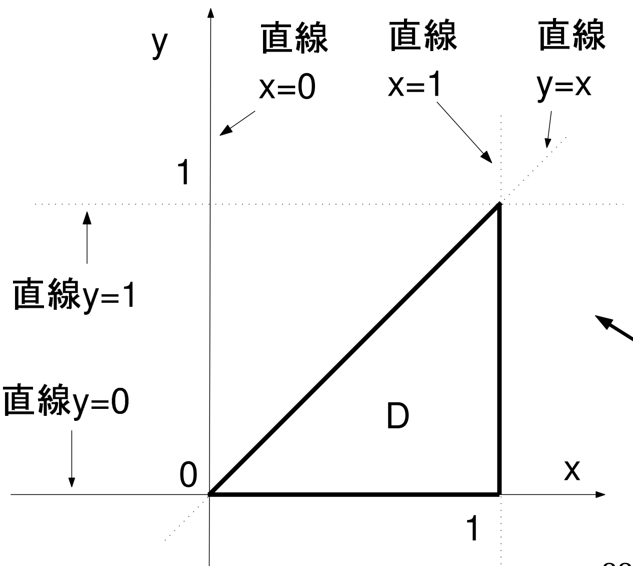
$$D = \{\ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1 \}$$

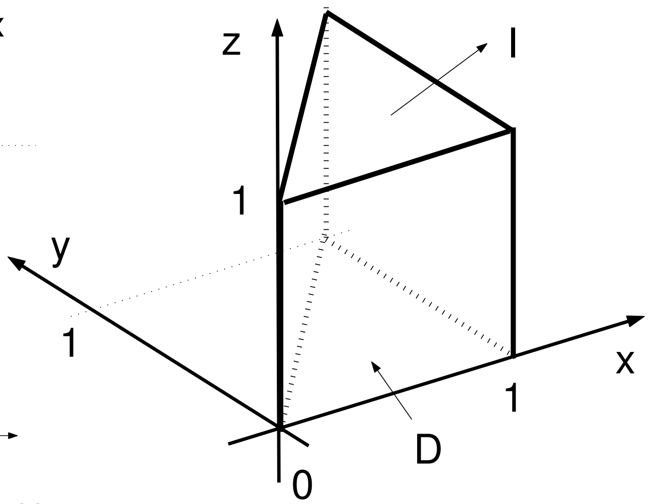
となる．このとき累次積分で計算すると

$$I = \iint_D dxdy = \int_0^1 dy \int_y^1 dy = \int_0^1 \left\{ \Big[\, x \,\Big]_y^1 \right\} dy = \int_0^1 (1 - y)\, dy = \left[ y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

と得られる． □

**注意 3.16** **($x, y$ 両方に単純な領域における多重積分)** $x, y$ の両方に関して単純な領域であれば，とちらの領域で計算しても結果は同じ． □



**例 3.17** **（累次積分）** 多重積分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 + 1)\, dxdy, \quad D = \{\, (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\, x \leq y \leq 2x \,\}$$

を求める．$D$ は $x$ に関して単純な領域だから，累次積分を用いて計算して，

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x^2 + y^2 + 1) dy = \int_0^1 \left\{ \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_{y=x}^{y=2x} \right\} dx$$
$$= \int_0^1 \left\{ \left( 2x^3 + \frac{8x^3}{3} + 2x \right) - \left( x^3 + \frac{x^3}{3} + x \right) \right\} dx = \int_0^1 \left( \frac{10x^3}{3} + x \right) dx = \left[ \frac{5x^4}{6} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}$$

と得られる． □

**問 3.18** **（累次積分）** 領域 $D$ を 2 つの $y$ に関して単純な領域

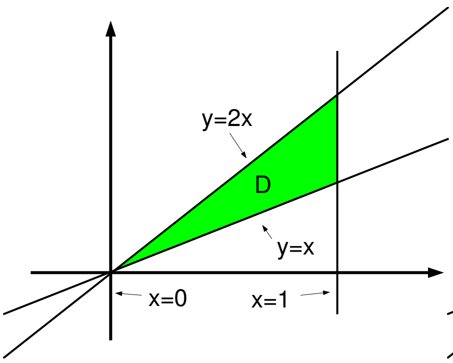
$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\, \frac{y}{2} \leq x \leq y \right\}, \quad D_2 = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq y \leq 2,\, \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \right\}$$

に $D = D_1 + D_2$ と分ける．このとき，

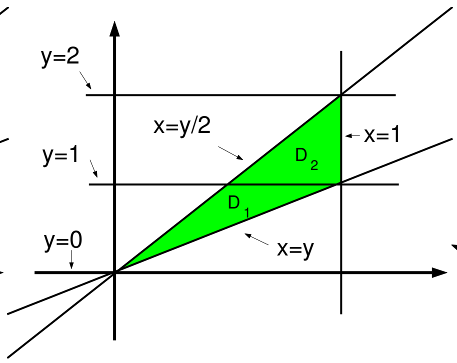
$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1) dxdy = \iint_{D_1} (x^2 + y^2 + 1) dxdy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 + 1) dxdy$$

を計算せよ． □

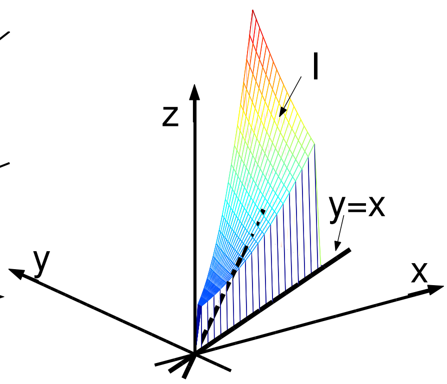
**問 3.19** **（領域の面積）** 領域 $D$ の面積 $S = \iint_D dxdy$ を求めよ． □



(a) $x$ に関して単純な領域



(b) $y$ に関して単純な領域



(c) $I$

**例** 3.20 **(累次積分)**　多重積分

$$\iint_D \frac{x}{y}dxdy, \quad D = \{\,(x,y)\mid 1 \le y \le 2,\, 0 \le x \le y^2\,\}$$

を求める．$D$ は $y$ に関して単純な領域だから，累次積分を用いて計算して，

$$I = \int_1^2 dy \int_0^{y^2} \frac{x}{y}dx = \int_1^2 \left\{ \left[ \frac{x^2}{2y} \right]_{x=0}^{x=y^2} \right\} dy = \int_1^2 \frac{y^3}{2}dy = \left[ \frac{y^4}{8} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{15}{8}$$

と得られる．□

**問** 3.21 **(累次積分)**　領域 $D$ を 2 つの $x$ に関して単純な領域

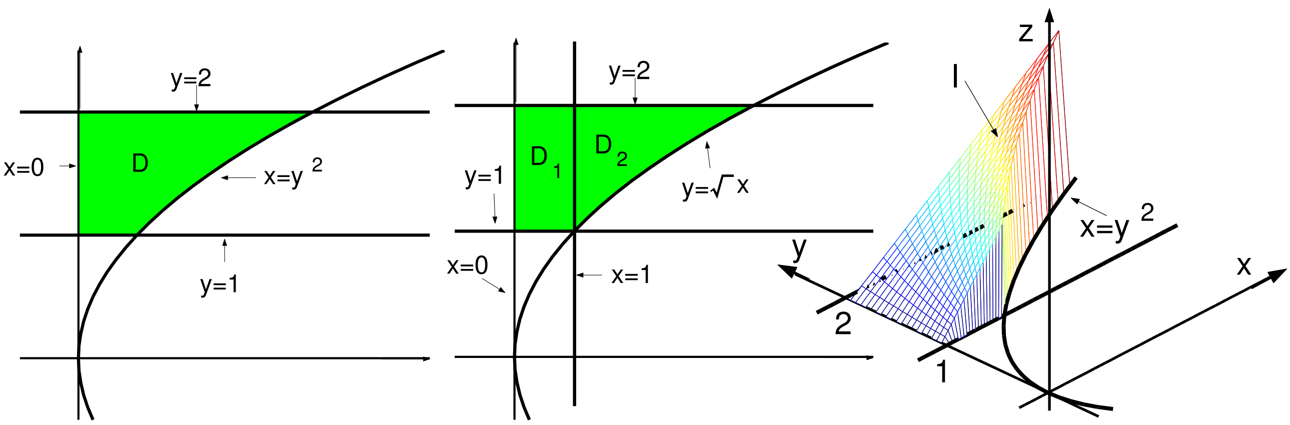
$$D_1 = \{\,(x,y)\mid 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\,\}, \quad D_2 = \{\,(x,y)\mid 1 \le x \le 4,\ \sqrt{x} \le y \le 2\,\}$$

に $D = D_1 + D_2$ と分ける．このとき，

$$\iint_D (x^2+y^2+1)dxdy = \iint_{D_1} (x^2+y^2+1)dxdy + \iint_{D_2} (x^2+y^2+1)dxdy$$

を計算せよ．□

**問** 3.22 **(領域の面積)**　領域 $D$ の面積 $S = \iint_D dxdy$ を求めよ．□




(a) $y$ に関して単純な領域　(b) $x$ に関して単純な領域　(c) $I$

**例 3.23** **（累次積分）** 多重積分

$$I = \iint_D x^2 y \, dxdy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, \, y \geq 0 \right\}$$

を求める．領域 $D$ は半円の内部の領域であり，

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

と書き直すと，$x$ に関して単純な領域とする．累次積分を用いて計算して，

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy = \int_0^1 dx \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2} dx = \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

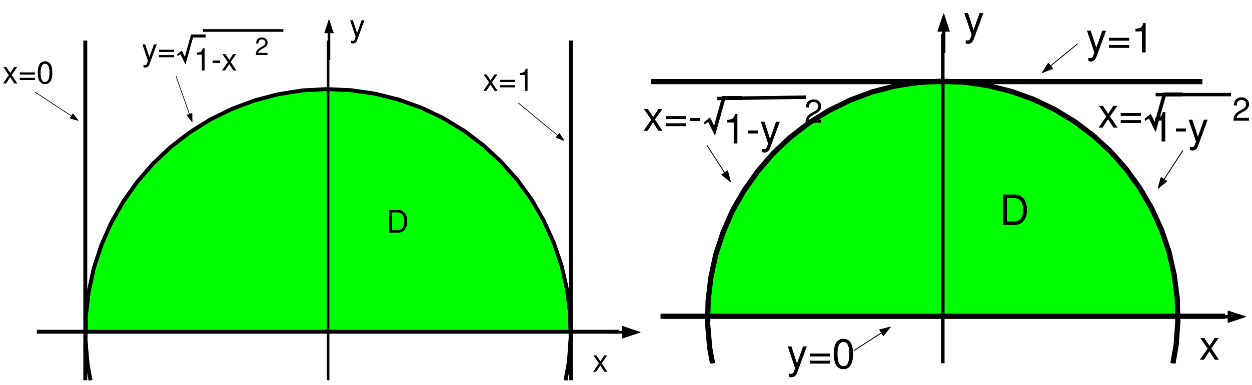
と得られる． □

**問 3.24** **（累次積分）** 領域 $D$ を $y$ に関して単純な領域として書けば

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \, -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \right\}$$

と書ける．このとき $I = \iint_D x^2 y \, dxdy$ を求めよ． □

**問 3.25** **（領域の面積）** 領域 $D$ の面積 $S = \iint_D dxdy$ を求めよ． □



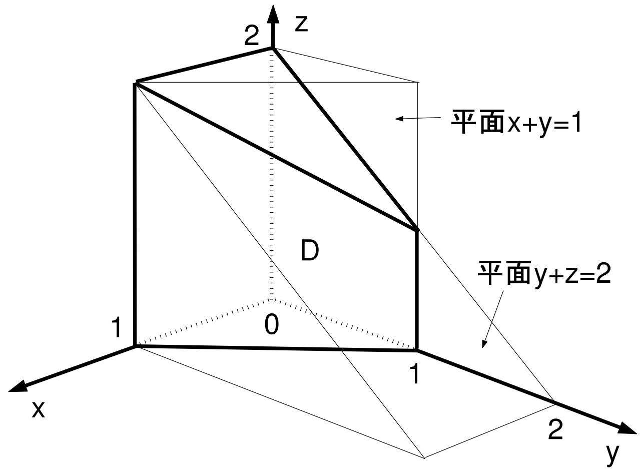

(a) $x$ に関して単純な領域　(b) $y$ に関して単純な領域

## § 3.4 3 重積分の計算

**例 3.26** **（累次積分）** 3 重積分

$$I = \iiint_D xyz\, dxdydz, \quad D = \{\ (x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 2-y\}$$

を求める．領域 $D$ は 平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, $z+y=2$ で囲まれてできる領域である．




領域 $D$ は $y$ は $x$ に関して単純であり，$z$ は $x, y$ に関して単純な領域であるから，累次積分を用いて計算して，

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{2-y} dz\, xyz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{1}{2}xyz^2\right]_{z=0}^{z=2-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{1}{2}xy(2-y)^2$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{1}{2}x(y^3 - 4y^2 + 4y) = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}x\left(\frac{y^4}{4} - \frac{4y^3}{3} + \frac{4y^2}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x}$$
$$= \int_0^1 dx \frac{1}{2}x\left(\frac{(1-x)^4}{4} - \frac{4(1-x)^3}{3} + \frac{4(1-x)^2}{2}\right) = \int_0^1 dx \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{4} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{12}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{24} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{24}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{13}{240}$$

と得られる． □

**問 3.27** **（領域の面積）** 領域 $D$ の体積 $V = \iiint_D dxdydz$ を求めよ． □

**例** 3.28 **（累次積分）** 3 重積分

$$I=\iiint_D z\,dxdydz,\quad D=\{\,(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\,0\le y\le x+1,\,0\le z\le x+y\}$$

を求める．領域 $D$ は 平面 $x=0, x=1, y=0, z=0, -x+y=1, x+y-z=0$ で囲まれてできる領域である．また，領域 $D$ は $y$ は $x$ に関して単純であり，$z$ は $x,y$ に関して単純な領域であるから，累次積分を用いて計算して，

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 dx\int_0^{x+1}dy\int_0^{x+y}z\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{x+1}dy\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x+y}=\int_0^1 dx\int_0^{x+1}dy\frac{(x+y)^2}{2}\\&=\int_0^1 dx\left[\frac{(x+y)^3}{6}\right]_{y=0}^{y=x+1}=\int_0^1 dx\left(\frac{(2x+1)^3}{6}-\frac{x^3}{6}\right)=\left[\frac{(2x+1)^4}{48}-\frac{x^4}{24}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

と得られる．

□

**問** 3.29 **（領域の面積）** 領域 $D$ を図示し，領域 $D$ の体積 $V=\iiint_D dxdydz$ を求めよ． □

**例** 3.30 **（累次積分）** 3 重積分

$$I=\iiint_D x\,dxdydz,\quad D=\left\{\,(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\,\right\}$$

を求める．領域 $D$ は原点を中心とする半径 $a$ の球の内部で $x,y,z$ が正の領域である．領域 $D$ は

$$D=\left\{\,(x,y)\mid 0\le y\le a,\ 0\le x\le a,\ 0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\right\}$$

と書き直すと，$z$ は $x,y$ に関して単純であるから，累次積分を用いて計算して，

$$\begin{aligned}I&=\int_0^a dy\int_0^a x\,dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dz=\int_0^a dy\int_0^a x\,dx\left[z\right]_{z=0}^{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\\&=\int_0^a dy\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2-y^2}dx=\int_0^a dy\left[\frac{-1}{3}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^3\right]_0^a=\frac{1}{3}\int_0^a\left(\sqrt{a^2-y^2}\right)^3dy\end{aligned}$$

となる．$y=a\cos\theta$ と置換積分すると

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\right)^3\cos\theta\,d\theta=\frac{a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$$

であり，さらに

$$\begin{aligned}&\cos^4\theta=\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)=\cos^2\theta-(\sin\theta\cos\theta)^2=\cos^2\theta-\frac{\sin^2 2\theta}{4}\\&=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4\theta}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos 4\theta}{8}\end{aligned}$$

を用いると

$$I=\frac{a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos 4\theta}{8}\right)d\theta=\frac{a^4}{3}\left[\frac{3}{8}\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\sin 4\theta}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}a^4$$

と求まる．

□

## § 3.5 積分の順番の入れ替え

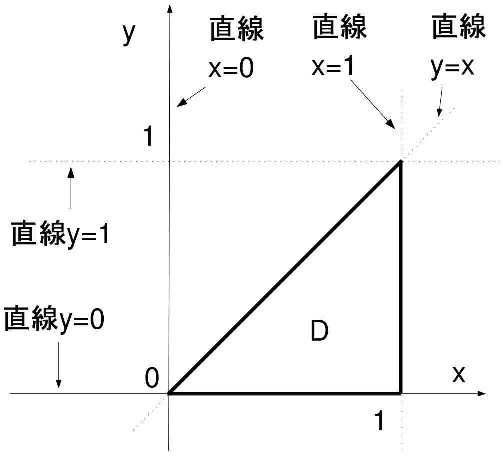
**例 3.31** **（積分の順番の入れ替え）** 領域 $D$ は $x$ と $y$ の両方に関して単純な領域であり，

$$D = \{\ (x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\ \}, \quad D = \{\ (x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$$

で与えられるとする．このとき，多重積分は

$$I = \iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x dy\, f(x, y) = \int_0^1 dy \int_y^1 dx\, f(x, y)$$

と書ける．




□

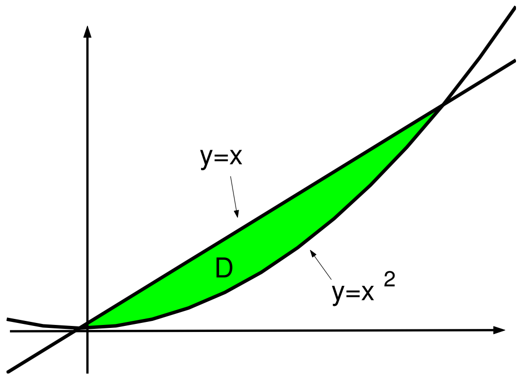
**例 3.32** **（積分の順番の入れ替え）** 領域 $D$ が $x$ と $y$ の両方に関して単純な領域であり，

$$D = \left\{\ (x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\ \right\}, \quad D = \{\ (x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le \sqrt{y}\}$$

で与えられるとする．このとき，多重積分は

$$I = \iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy\, f(x, y) = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx\, f(x, y)$$

と書ける．




□

**例** 3.33 **（積分の順番の入れ替え）** 領域

$$D = \{\,(x, y) \mid 0 \le y \le 4,\ y - 2 \le x \le \sqrt{y}\,\}$$

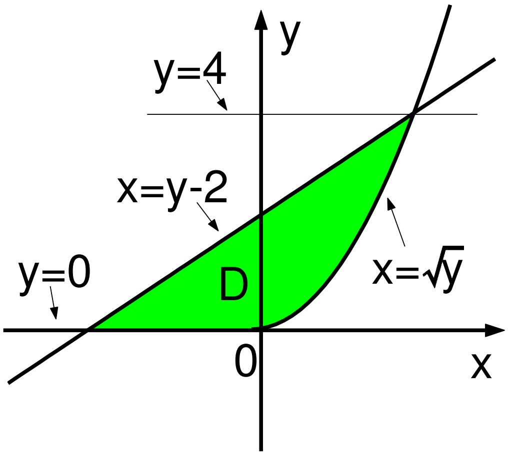
は $y$ に関して単純な領域である．$x$ に関して単純な領域に書き換えると

$$\begin{aligned}
&D = D_1 + D_2,\\
&D_1 = \{\,(x, y) \mid -2 \le x \le 0,\ 0 \le y \le x + 2\,\},\\
&D_2 = \left\{\,(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le x + 2\,\right\}
\end{aligned}$$

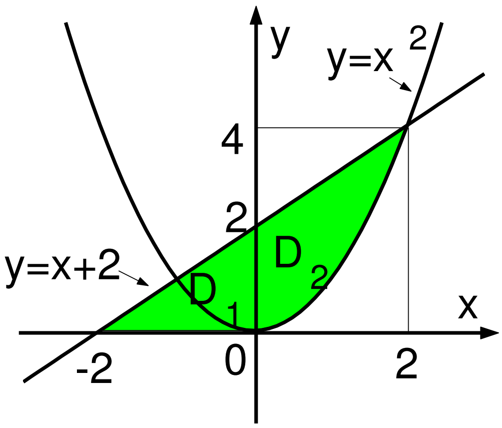
となる．このとき

$$\int_0^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx = \int_{-2}^0 dx \int_0^{x+2} f(x, y)\, dy + \int_0^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y)\, dy$$

が成り立つ．




(a) $y$ に関して単純な領域




(b) $x$ に関して単純な領域

□

## § 3.6 長方形領域における積分

**定理 3.34** **（長方形領域における多重積分）** 領域 $D$ が長方形領域

$$D = \{\ (x, y) \mid\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

のとき，

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx$$

が成り立つ． □

**注意 3.35** **（長方形領域における多重積分）** 長方形領域であれば $x$ と $y$ の積分の順が交換可能である． □

**例 3.36** **（長方形領域における多重積分）** 多重積分

$$I = \iint_D (x + y)\, dxdy, \quad D = \{\ (x, y) \mid\ 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2\}$$

を求める．$y, x$ の順で積分すると

$$I = \int_0^1 dx \int_1^2 (x + y) dy = \int_0^1 dx \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \int_0^1 dx \left( x + \frac{3}{2} \right) = \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 2$$

となる．逆に $x, y$ の順で積分すると

$$I = \int_1^2 dy \int_0^1 (x + y) dx = \int_1^2 dy \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=0}^{x=1} = \int_1^2 \left( \frac{1}{2} + y \right) dy = \left[ \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = 2$$

となる．積分の順を入れ替えても結果は同じである． □

**問 3.37** **（長方形領域における多重積分）** 多重積分

$$I = \iint_D (2x - y) dxdy, \quad D = \{\ (x, y) \mid\ 0 \leq y \leq 1,\ 1 \leq x \leq 2\}$$

を求めよ． □

**定理** 3.38 **(長方形領域における多重積分)** 領域 $D$ が長方形領域

$$D = \{\ (x, y) \mid\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

であり，被積分関数が**変数分離型** $f(x)g(y)$ のとき，

$$\iint_D f(x)g(y)\,dxdy = \int_a^b f(x)\,dx \int_c^d g(y)\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

が成り立つ. □

**例** 3.39 **(長方形領域における多重積分)** 多重積分

$$I = \iint_D xy\,dxdy, \quad D = \{\ (x, y) \mid\ 1 \leq x \leq 2,\ 3 \leq y \leq 4\}$$

を求める．長方形領域で被積分関数は変数分離型であるから，

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 x\,dx \int_3^4 y\,dy = \left(\int_1^2 x\,dx\right)\left(\int_3^4 y\,dy\right) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} \times \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=3}^{y=4} \\ &= \frac{4-1}{2} \times \frac{16-9}{2} = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

となる. □

## § 3.7 多重積分の置換積分

**注意 3.40** **（定積分の置換積分）** 定積分において積分変数を $x=\phi(t)$ と置き換えると

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

となる．ただし，$\alpha=\phi^{-1}(a), \beta=\phi^{-1}(b)$ である． □

**定理 3.41** **（多重積分の置換積分）** 多重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

において積分変数を $x=\phi(u,v), y=\psi(u,v)$ と置き換える．このとき，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(\phi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

となる．ただし，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ は**ヤコビアン**

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\phi_u(u,v) & \psi_u(u,v)\\ \phi_v(u,v) & \psi_v(u,v)\end{vmatrix}$$

であり，$E$ は $(u,v)$ の領域

$$E=\{\,(u,v)\mid x=\phi(u,v), y=\psi(u,v), \forall(u,v)\in D\,\}$$

である．

（証明） $xy$ 座標の点 $(x,y), (x+\Delta x, y+\Delta y)$ は標準基底 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ を用いて，

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y, \quad \begin{bmatrix}x+\Delta x\\ y+\Delta y\end{bmatrix} = (x+\Delta x)\boldsymbol{e}_x + (y+\Delta y)\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

と表される．$uv$ 座標に座標変換すると，

$$x=\phi(u,v), \quad y=\psi(u,v), \quad x+\Delta x=\phi(u+\Delta u, v+\Delta v), \quad y+\Delta y=\psi(u+\Delta u, v+\Delta v)$$

とおける．このとき，$\Delta x, \Delta y$ は十分小さいとすると，$\Delta u, \Delta v$ も十分小さいので，テイラー展開して

$$x+\Delta x = \phi(u,v)+\phi_u(u,v)\Delta u+\phi_v(u,v)\Delta v+\cdots,$$
$$y+\Delta y = \psi(u,v)+\psi_u(u,v)\Delta u+\psi_v(u,v)\Delta v+\cdots$$

と書ける．$x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ であることに注意すると

$$\Delta x \boldsymbol{e}_x + \Delta y \boldsymbol{e}_y = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \Delta u \begin{bmatrix} \phi_u(u,v) \\ \psi_u(u,v) \end{bmatrix} + \Delta v \begin{bmatrix} \phi_v(u,v) \\ \psi_v(u,v) \end{bmatrix} + \cdots = \Delta u \boldsymbol{e}_u + \Delta v \boldsymbol{e}_v + \cdots$$

が成り立つ．ここで，ベクトル

$$\boldsymbol{e}_u = \begin{bmatrix} \phi_u(u,v) \\ \psi_u(u,v) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_v = \begin{bmatrix} \phi_v(u,v) \\ \psi_v(u,v) \end{bmatrix}$$

は点 $(u,v)$ における $uv$ 座標の基底となる．

頂点が $A(x,y), B(x+\Delta x, y), C(x, y+\Delta y), D(x+\Delta x, y+\Delta y)$ からなる長方形の微小領域の面積は $\Delta S = \Delta x \Delta y$ である．一方，$uv$ 座標において頂点が $A'(u,v), B'(u+\Delta u, v), C'(u, v+\Delta v), D'(u+\Delta u, v+\Delta v)$ からなる領域は平行四辺形である．平行四辺形 $A'B'C'D'$ の面積は，$\overrightarrow{A'B'} = \Delta u \boldsymbol{e}_u$, $\overrightarrow{A'C'} = \Delta v \boldsymbol{e}_v$ より，

$$\Delta S = \mathrm{abs}\left(\det \begin{bmatrix} \Delta u \boldsymbol{e}_u & \Delta v \boldsymbol{e}_v \end{bmatrix}\right) = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} \Delta u \phi_u & \Delta v \phi_v \\ \Delta u \psi_u & \Delta v \psi_v \end{vmatrix}\right) = \mathrm{abs}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \Delta u \Delta v$$

となる．極限 $\Delta x, \Delta y \to 0$ においてもこれが成り立つので，

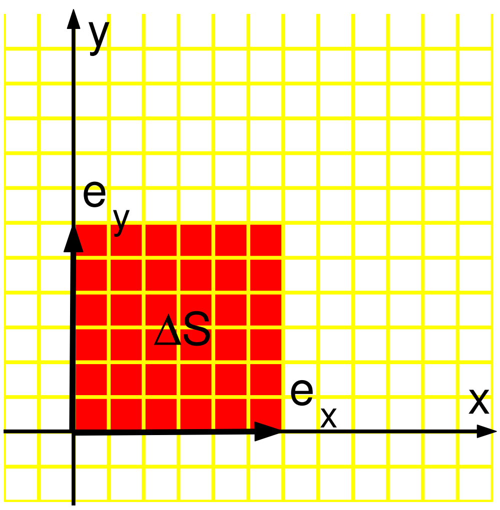
$$dS = dxdy = \mathrm{abs}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) dudv$$

を得る．

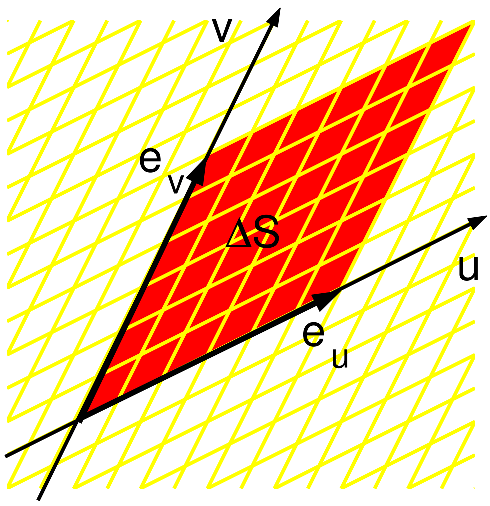
□

**注意** 3.42 **（置換積分）** 1 変数関数の定積分では $dx = \phi'(t)dt$ に絶対値はつかない．これは積分区間 $[a,b]$ に向きを考えているためである．例えば，$a > b$ のとき定積分の値の符合は反転される．多重積分では，$dxdy = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$ に絶対値がつく．これは面積要素に向きを考えないためである．

□




(a) $xy$ 座標




(b) $uv$ 座標

## § 3.8 斜交座標への置換積分

**例 3.43** **（多重積分の変数変換）** 多重積分

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy, \qquad D = \{\,(x,y) \mid |x+2y| \le 1,\, |x-y| \le 1\,\}$$

を求める．積分変数を

$$u = x+2y, \qquad v = x-y$$

とおく．この逆は

$$x = \frac{u+2v}{3}, \qquad y = \frac{u-v}{3}$$

である．このとき領域 $D$ を $(u,v)$ で表すと

$$E = \{\,(u,v) \mid |u| \le 1,\ |v| \le 1\,\}$$

となる．座標変換 $(x,y) \mapsto (u,v)$ のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

である．これらより，

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy = \iint_E \left(\frac{u+2v}{3} - \frac{u-v}{3}\right)^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \iint_E v^2 \left|\frac{-1}{3}\right| dudv$$
$$= \frac{1}{3}\iint_E v^2\,dudv = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} v^2\,dv \int_{-1}^{1} du = \frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{1} v^2\,dv\right)\left(\int_{-1}^{1} du\right) = \frac{4}{3}\left(\int_0^1 v^2\,dv\right)\left(\int_0^1 du\right)$$
$$= \frac{4}{3}\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^1 \times \Big[u\Big]_0^1 = \frac{4}{9}$$

を得る．

□

**注意 3.44** **（面素）** 置換積分により面素は $dS = dxdy = \frac{1}{3}dudv$ と変換される．直交座標 $xy$ では微小面積は，辺の長さが $dx, dy$ の長方形の面積 $dS = dxdy$ である．これに対して斜交座標 $uv$ の微小面積は，辺の長さが $du, dv$ の平行四辺形の面積 $dS = \frac{1}{3}dudv$ である．これを示す．$uv$ 座標の基底は

$$\boldsymbol{e}_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_v = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

であり，点 $O, A(\boldsymbol{e}_u), B(\boldsymbol{e}_v), C(\boldsymbol{e}_u+\boldsymbol{e}_v)$ からなる平行四辺形の面積は

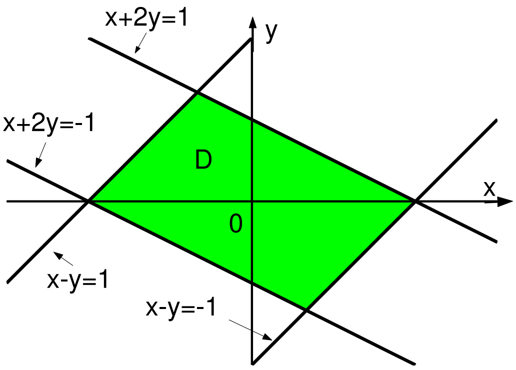
$$S_0 = \mathrm{abs}\left(\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_u & \boldsymbol{e}_v\end{bmatrix}\right) = \mathrm{abs}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}\right) = \mathrm{abs}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

である．ここで $\mathrm{abs}(x) = |x|$ とおいた．面素 $dudv$ は辺の長さが $du, dv$ で平行四辺形 $OABC$ と相似な図形であるから，面素 $dudv$ の面積 $dS$ は

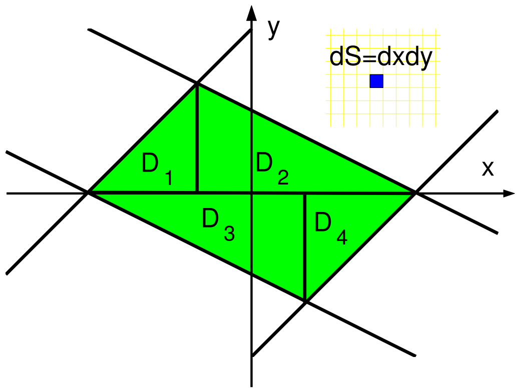
$$dS = S_0\, dudv = \frac{1}{3}\, dudv$$

と得られる． □

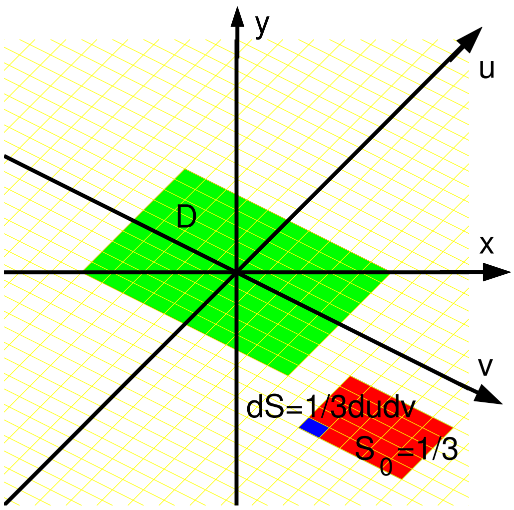
**問 3.45** **（多重積分の変数変換）** 領域 $D$ を下図 (b) のように 4 つに分割し多重積分を求めよ． □



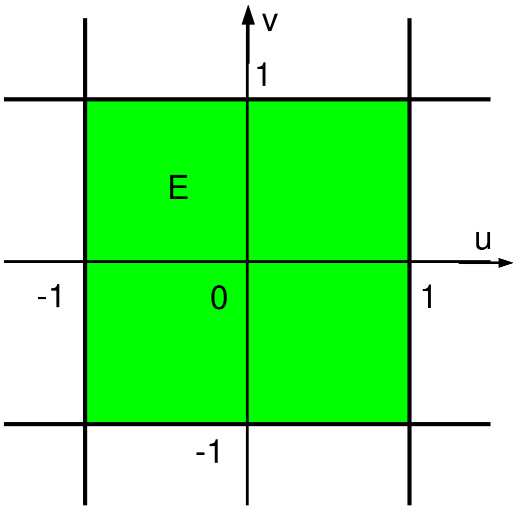
(a) 領域 $D$



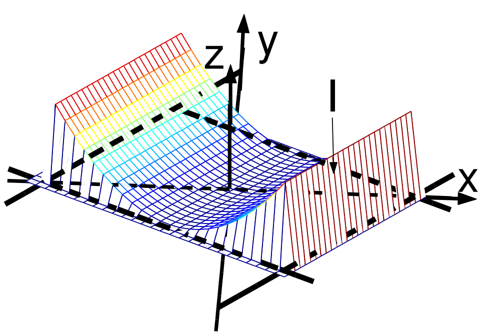
(b) 領域 $D$ の分割



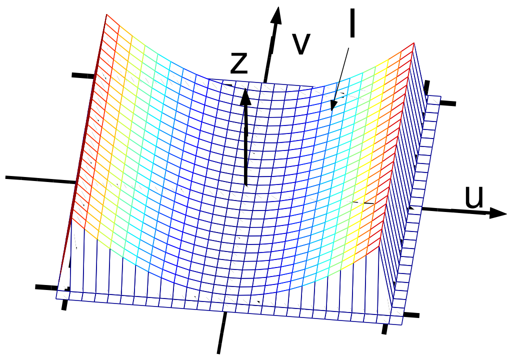
(c) $uv$ 座標



(d) 領域 $E$



(e) $xy$ 座標での $I$



(f) $uv$ 座標での $I$

## § 3.9 極座標への置換積分

**例 3.46** **（多重積分の変数変換）** 多重積分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy, \qquad D = \left\{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \,\right\} \quad (a > 0)$$

を求める．積分変数を

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

とおく．このとき極座標への座標変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

であり，領域 $D$ を $(r, \theta)$ で表すと，

$$E = \{\, (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi \,\}$$

となる．これらより，

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_E ((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| drd\theta = \iint_E r^3\, drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3\, dr = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a r^3\, dr\right) = \Big[\,\theta\,\Big]_0^{2\pi} \times \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi a^4}{2}$$

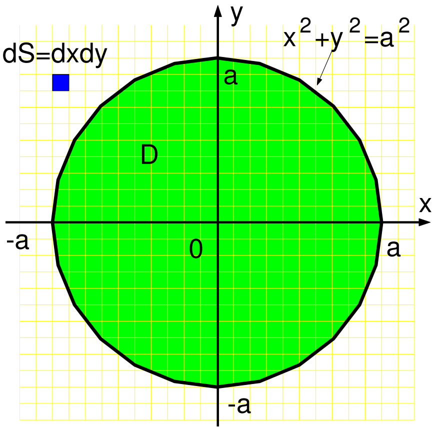
を得る． □

**注意 3.47** **（極座標の面素）** 直交座標 $xy$ から極座標 $r\theta$ への変換で，面素は $dS = dxdy = rdrd\theta$ と変換される．$xy$ 座標では辺の長さが $dx$ と $dy$ の長方形の面積であり，$r\theta$ 座標では辺の長さが $dr$ と $rd\theta$（半径 $r$，角 $d\theta$ の円弧の長さ）の長方形の面積となる． □

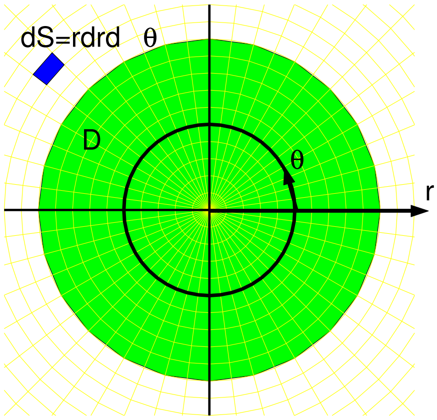
**問 3.48** **（多重積分の変数変換）** 領域 $D$ を $x$ に関して単純な領域とみなし，多重積分を

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, (x^2 + y^2)$$

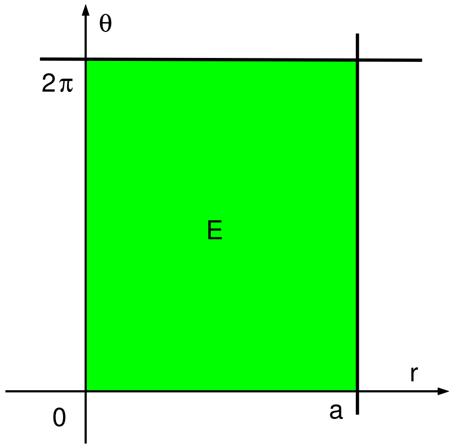
により求めよ． □



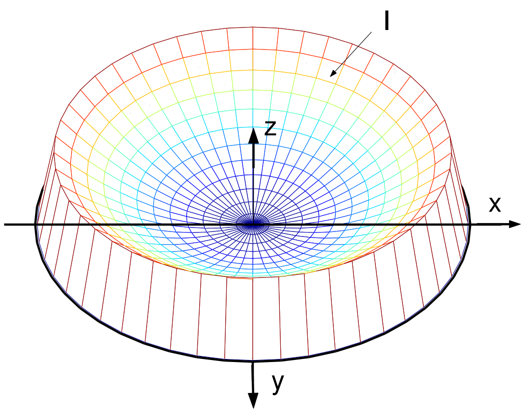
(a) 領域 $D$



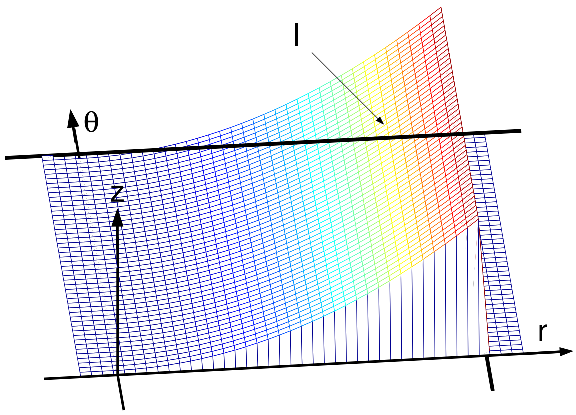
(b) $r\theta$ 座標



(c) 領域 $E$



(d) $xy$ 座標での $I$



(e) $r\theta$ 座標での $I$

## § 3.10 3 次元極座標への置換積分

**例 3.49** **（多重積分の変数変換）** 多重積分

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz, \qquad D = \left\{\ (x,y,z) \mid\ x^2+y^2+z^2 \le a^2 \right\} \quad (a>0)$$

を求める．積分変数を

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

とおく．このとき極座標への座標変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

であるから，体積素は

$$dxdydz = r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

と表される．領域 $D$ を $(r,\theta,\varphi)$ で表すと，

$$E = \{\ (r,\theta,\varphi) \mid\ 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi\ , 0 \le \varphi \le 2\pi\,\}$$

となる．これらより，

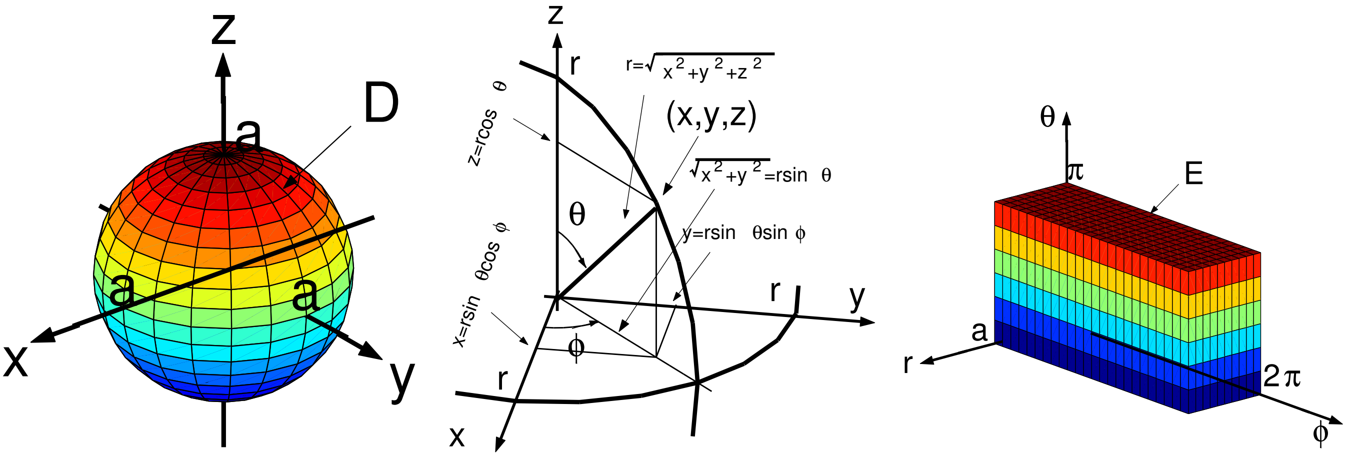
$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \iiint_E ((r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\cos\theta)^2) r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$
$$= \iiint_E r^4\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta \int_0^a r^4\,dr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^a r^4\,dr\right)$$
$$= \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \times \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} \times \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{4\pi a^5}{5}$$

を得る． □

**問 3.50** **（多重積分の変数変換）** $I$ を次の累次積分を計算して求めよ．

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,(x^2+y^2+z^2)$$

□




(a) 領域 $D$ (b) 極座標 (c) 領域 $E$

**例 3.51** **（累次積分）** 3 重積分

$$I = \iiint_D x\,dxdydz, \quad D = \left\{\, (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \right\}$$

を求める．3 次元の極座標に置き換えると領域 $D$ は

$$E = \left\{\, (r,\theta,\varphi) \;\middle|\; 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ , 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

となる．積分は

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi) r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi = \int_0^a r^3\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \\ &= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \times \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \Big[\sin\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}a^4 \end{aligned}$$

と求まる． □

## § 3.11 体積の計算

**例 3.52** **（球の体積）** 半径 $a$ の球の体積は $V = 4\pi a^3/3$ である．これを多重積分で求める．

**（その 1）** 球を 8 等分し底面が

$$D = \left\{ \, (x, y) \mid \, x^2 + y^2 \leq a^2 \; x \geq 0, \; y \geq 0 \right\}$$

であり，上面が

$$z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

の体積

$$V = 8 \iint_D f(x, y) \, dxdy = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dxdy$$

として求める．2 次元の極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，領域 $D$ と等価な領域は

$$E = \left\{ \, (r, \theta) \, \middle| \, 0 \leq r \leq a, \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

であり，面積素は $dxdy = rdrd\theta$ となるので，

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_E \sqrt{a^2 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} r dr d\theta = 8 \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= 8 \left[ \frac{2}{3(-2)} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a \times \Big[ \theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8a^3}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} a^3 \end{aligned}$$

と得られる．

**（その 2）** 球を 8 等分し，領域

$$D = \left\{ \, (x, y, z) \mid \, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0 \right\}$$

の体積

$$V = 8 \iiint_D dxdydz$$

として求める．3 次元の極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ とおくと，領域 $D$ と等価な領域は

$$E = \left\{ \, (r, \theta, \varphi) \, \middle| \, 0 \leq r \leq a, \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

であり，体積素は

$$dxdydz = r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$$

となるので，

$$\begin{aligned} V &= 8 \iiint_E r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi = 8 \int_0^a r^2 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 8 \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^a \times \Big[ -\cos\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \Big[ \varphi \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8 \times \frac{a^3}{3} \times 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

と得られる． □

**例 3.53** **(円柱の体積)**　底面の半径 $a$，高さ $h$ の円柱の体積は $V=\pi a^2 h$ である．これを多重積分で求める．

**(その 1)**　円柱の底面が $xy$ 平面にあるとし，

$$D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\,\}$$

とおく．円柱の上面は平面 $z=f(x,y)=h$ である．円柱の体積は

$$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D h\,dxdy=h\iint_D dxdy=h\iint_E r\,drd\theta=h\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta$$
$$=h\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a\times\left[\theta\right]_0^{2\pi}=\pi a^2 h$$

と求まる．ただし，

$$E=\{\,(r,\theta)\mid 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi\,\}$$

とする．

**(その 2)**　円柱の領域は

$$D=\left\{\,(x,y,z)\mid x^2+y^2\le a^2,\ 0\le z\le h\right\}$$

と表される．この領域を円筒座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$ で置き換えると，$(r,\theta,z)$ の領域は

$$E=\{\,(r,\theta,z)\mid 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le h\,\}$$

であり，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}x_r & y_r & z_r\\ x_\theta & y_\theta & z_\theta\\ x_z & y_z & z_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

であるので，

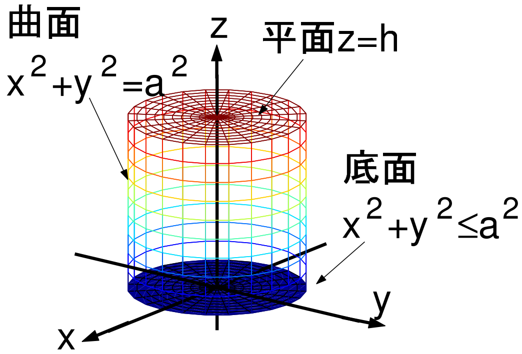
$$dxdydz=rdrd\theta dz$$

が成り立つ．円柱の体積は

$$V=\iiint_D dxdyz=\iiint_E rdrd\theta dz=\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h dz=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a\times\left[\theta\right]_0^{2\pi}\times\left[z\right]_0^h=\pi a^2 h$$

と求まる．

□



**例 3.54** **（円錐の体積）** 底面の半径 $a$，高さ $h$ の円錐の体積は $V = \dfrac{1}{3}\pi a^2 h$ である．これを多重積分で求める．円錐の底面は $xy$ 平面にあるとし，その領域を

$$D = \{\ (x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\ \}$$

とおく．$z$ 軸と点 $(x, y, z)$ との距離を $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと，円錐の斜面では図 (b) より，

$$\frac{z}{h} + \frac{r}{a} = 1$$

が成り立つ．よって，斜面は

$$z = f(x, y) = h - \frac{h\sqrt{x^2 + y^2}}{a}$$

と表される．よって円錐の体積は

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y)\, dxdy = h \iint_D \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) dxdy = h \iint_E \left(1 - \frac{r}{a}\right) r\, drd\theta \\ &= h \int_0^a \left(r - \frac{r^2}{a}\right) dr \int_0^{2\pi} d\theta = h \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}\right]_0^a \times \Big[\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\pi a^2 h \end{aligned}$$

と求まる．ただし，極座標変換を用いて

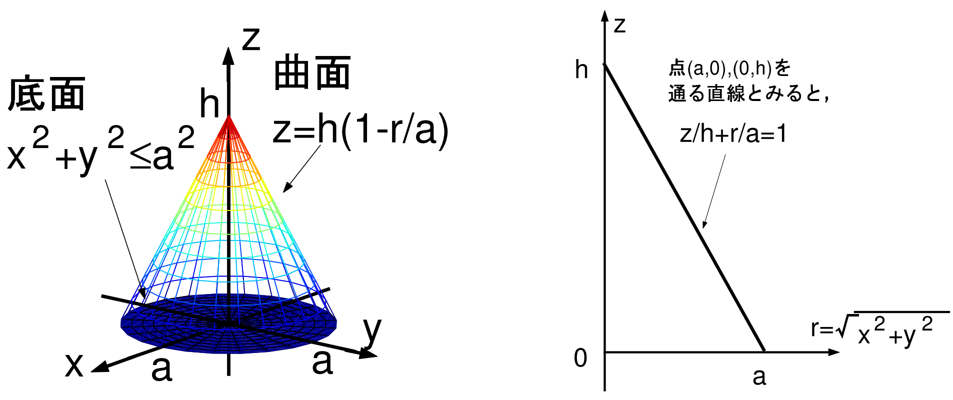
$$E = \{\ (r, \theta) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\ \}$$

とした． □

**問 3.55** **（円錐の体積）** 円錐の体積を

$$V = \iiint_D dxdydz, \qquad D = \left\{\ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le h\left(1 - \frac{r}{a}\right)\ \right\}$$

により求めよ． □




(a) 円錐　　(b) $z = f(x, y)$

**例** 3.56 **（体積の計算）** 半球

$$S = \{\ (x,y,z) \mid\ x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ z \ge 0\,\}$$

と無限にのびる円柱

$$C = \{\ (x,y,z) \mid\ x^2+y^2 \le ax\,\}$$

の共通部分 $A = S \cap C$ の体積 $V$ を求める．領域 $A$ は

$$A = \{\ (x,y,z) \mid\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x^2+y^2 \le ax\,\}$$

と表される．領域 $A$ は底面の領域を

$$D = \{\ (x,y) \mid\ x^2+y^2 \le ax\,\}$$

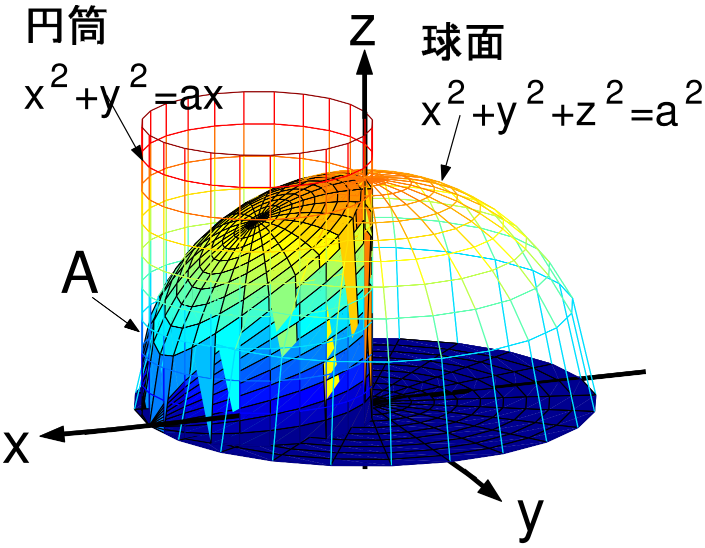
とする曲面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の体積であるから，$A$ の体積 $V$ は

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_E r\sqrt{a^2-r^2}\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{-1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta} = \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-|\sin\theta|^3)\,d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)\,d\theta \\
&= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta+\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{2a^3}{3}\left[\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)a^3
\end{aligned}$$

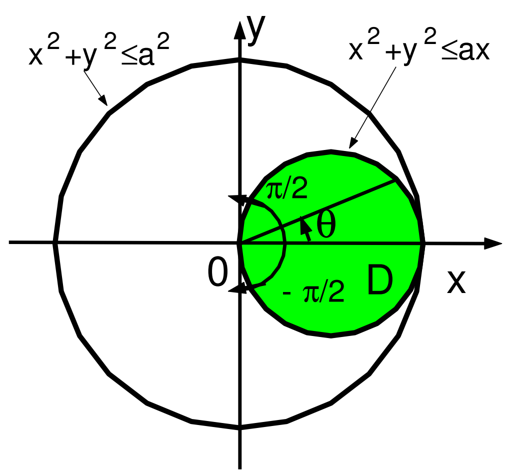
と求まる．ここで 2 次元の極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を用いた．領域は $E$ は領域 $D$ と等価な領域で

$$E = \left\{\ (r,\theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le a\cos\theta\right\}$$

である． □



(a) $A = S \cap C$



(b) 領域 $D$

**例 3.57** **（体積の計算）** 球

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \right\}$$

と円柱

$$C = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$$

の共通部分 $S \cap C$ を球 $S$ から取り除いた領域 $A = S - S \cap C$ の体積 $V$ を求める．領域 $A$ を 8 等分して体積を

$$V = 8 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy, \qquad D = \left\{ (x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$$

により求める．2 次元の極座標変換をすると底面の領域 $D$ は

$$E = \left\{ (x, y) \,\middle|\, a \leq r \leq 2a,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

であり，体積は

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_E r\sqrt{4a^2 - r^2}\, drd\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} r\sqrt{4a^2 - r^2}\, dr \\ &= 8 \Big[ \theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[ \frac{-1}{3}(4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_a^{2a} = 8\frac{\pi}{2}\frac{(\sqrt{3}a)^3}{3} = 4\sqrt{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

と求まる． □

**問 3.58** **（体積の計算）** 2 つの円柱

$$C_1 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq a^2 \right\}, \qquad C_2 = \left\{ (x, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq a^2 \right\}$$

の共通部分 $A = C_1 \cap C_2$ の体積 $V$ を求めよ． □

## § 3.12 曲面積

**定理 3.59** **（曲面積）** 関数 $z=f(x,y)$ による曲面

$$B=\{\,(x,y,z)\mid\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D\,\}$$

の**曲面積**は

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dxdy$$

で与えられる. □

**例 3.60** **（球面の表面積）** 半径 $a$ の球面は

$$B=\left\{\,(x,y,z)\mid\ x^2+y^2+z^2=a^2\,\right\}$$

である．表面積 $S$ は 8 等分して

$$\begin{aligned}&S=8\iint_D\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dxdy,\\&z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\\&D=\left\{\,(x,y)\mid\ x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\,\right\}\end{aligned}$$

により求まる．$z$ は $x^2+y^2=a^2$ により定まる陰関数であるから，

$$z_x=-\frac{x}{z},\quad z_y=-\frac{y}{z}$$

となる．被積分関数は

$$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{a}{z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

であらから，表面積は

$$\begin{aligned}S&=8a\iint_D\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=8a\iint_E\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\\&=8a\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\times\Big[-\sqrt{a^2-r^2}\Big]_0^a=4\pi a^2\end{aligned}$$

と得られる. □

**例 3.61** **（曲面積）** 曲面

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 \leq ax,\ z \geq 0 \right\} \quad (a > 0)$$

の曲面積

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq ax \right\}$$

を求める．$z$ は $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ により定まる陰関数であるから，

$$z_x = -\frac{x}{z}, \qquad z_y = -\frac{y}{z}$$

となり，

$$\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

を得る．これを用いると曲面積は

$$\begin{aligned} S &= a \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = a \iint_E \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} drd\theta = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right]_{r=0}^{r=a\cos\theta} = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin\theta|)\, d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\, d\theta \\ &= 2a^2 \left[ \theta + \cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi - 2)a^2 \end{aligned}$$

と求まる． □

**問 3.62** **（曲面積）** 次の曲面 $B$ の曲面積 $S$ を求めよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) $B = \{ (x, y, z) \mid x + y + z = a,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \}$

(2) $B = \left\{ (x, y, z) \mid z = xy,\ x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$

(3) $B = \left\{ (x, y, z) \mid z = \tan^{-1} \dfrac{y}{z},\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \right\}$

(4) $B = \left\{ (x, y, z) \mid y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$

(5) $B = \left\{ (x, y, z) \mid y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2a^2 \right\}$

(6) $B = \left\{ (x, y, z) \mid z = x^2 + y^2,\ z \leq a \right\}$

□

## § 3.13 多重積分の広義積分への応用

**例 3.63** **（多重積分の広義積分への応用）** 広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

を求める．関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ を**誤差関数**または**ガウシアン（Gaussian）**といい，正規分布関数に用いられる．

まず，円の内部の領域 $D$ と正方形の領域 $\tilde{D}$ を

$$D(a) = \left\{\ (x, y) \mid\ x^2 + y^2 \le a\ \right\}, \quad \tilde{D}(a) = \{\ (x, y) \mid\ -a \le x \le a,\ -a \le y \le a\ \}$$

とおき，多重積分

$$I = \iint_{D(a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy, \qquad \tilde{I} = \iint_{\tilde{D}(a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

を考える．$I$ を計算すると

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D(a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{E(a)} e^{-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)}rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a re^{-r^2}dr \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a re^{-r^2}dr\right) = \Big[\theta\Big]_0^{2\pi} \times \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \pi(1 - e^{-a^2}) \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$E(a) = \{\ (r, \theta) \mid\ 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\ \}$$

である．$\tilde{I}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \iint_{\tilde{D}(a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-a}^a e^{-x^2}dx \int_{-a}^a e^{-y^2}dy = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-a}^a e^{-y^2}dy\right) \\ &= \left(\int_{-a}^a e^{-x^2}dx\right)^2 \end{aligned}$$

となる．

次に，領域 $D(a)$, $\tilde{D}(a)$, $D(\sqrt{2}a)$ を考える．これらは下図 (b) のように包含関係

$$D(a) \subset \tilde{D}(a) \subset D(\sqrt{2}a)$$

があり，領域の面積には

$$S(D(a)) < S(\tilde{D}(a)) < S(D(\sqrt{2}a))$$

と大小関係がある．同じ正の関数に対する異なる領域での多重積分は，領域の面積が大きい方が多重積分の値は大きくなる．よって，

$$\iint_{D(a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint_{\tilde{D}(a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint_{D(\sqrt{2}a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

が成り立つ．これは先ほどの計算結果より

$$\pi(1-e^{-a^2}) < \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 < \pi(1-e^{-2a^2})$$

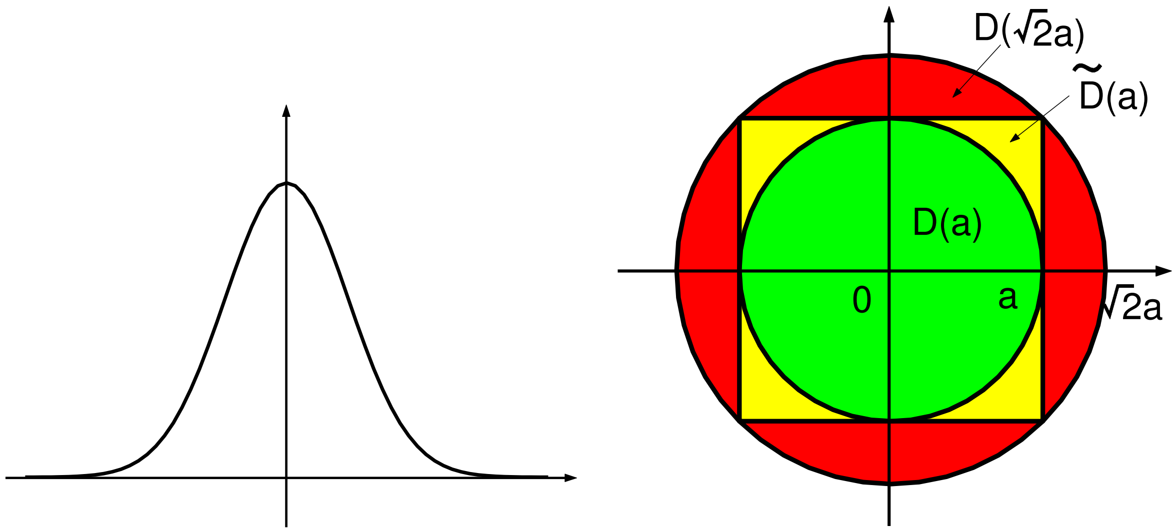
となる．$a \to \infty$ の極限をとるとはさみうちの定理より，

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$$

を得る．よって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

が成り立つ． □




(a) $e^{-x^2}$ (b) 領域 $D(a)$, $\tilde{D}(a)$, $D(\sqrt{2}a)$

# § 3.14 有向曲線

**定義 3.64** **（有向曲線）** 向き付きの曲線

$$C = \{\ (x, y) \mid x = \varphi(t), y = \psi(t),\ t : a \to b\}$$

を**有向曲線（oriented curve）**という． □

**注意 3.65** **（有向曲線）** 始点と終点が同じであり，有向曲線が一周してもよい． □

Figure. typing...

(a) 有向曲線

Figure. typing...

(b) 始点と終点が同じ有向曲線

**例 3.66** **（有向曲線）** 始点 $(1, 1)$ から終点 $(2, 3)$ まで直線的に進む有向曲線は,

$$C = \{\ (x, y) \mid x = t + 1,\ y = 2t + 1,\ t : 0 \to 1\}$$

と書ける． □

**例 3.67** **（有向曲線）** 単位円上を始点を $(1, 0)$ で反時計回りに一周するとき，$x, y$ をパラメータ表示すると

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad t : 0 \to 2\pi$$

となる．この有向曲線は

$$C = \{\ (x, y) \mid x = \cos t,\ y = \sin t,\ t : 0 \to 2\pi\}$$

と書ける．時計回りに一周するときは，有向曲線は

$$C = \{\ (x, y) \mid x = \cos t,\ y = \sin t,\ t : 2\pi \to 0\}$$

と書ける． □

**定義 3.68** **（有向曲線）** $a < c < b$ において,

$$
\begin{aligned}
C &= \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : a \to b \,\}, \\
C_1 &= \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : a \to c \,\}, \\
C_2 &= \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : c \to b \,\}
\end{aligned}
$$

であるとき,

$$C = C_1 + C_2$$

と表記する. □

Figure. typing...

**定義 3.69** **（有向曲線）** 有向曲線

$$
\begin{aligned}
C &= \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : a \to b \,\}, \\
\tilde{C} &= \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : b \to a \,\}
\end{aligned}
$$

に対して,

$$\tilde{C} = -C$$

と表記する. □

Figure. typing...

## § 3.15 線積分

**定義** 3.70 **（線積分）** 関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}$ に対する有向曲線

$$C = \{\ (x,y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : a \to b\,\}$$

に関する**線積分（line integral）**を

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} &= \int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \\ &= \int_a^b \left( f(x,y)\frac{dx}{dt} + g(x,y)\frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left( f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + g(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \right) dt\end{aligned}$$

と定義する．曲線 $C$ を**積分路（integral path）**という． □

**注意** 3.71 **（線積分）** 線積分は力学の**仕事（work）**である．typing... □

Figure. typing...

**定理** 3.72 **（線積分）** 次の関係が成り立つ：

(i) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{C_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} + \int_{C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$ (ii) $\displaystyle\int_{-C} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = -\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$

□

**例** 3.73 **（線積分）** 線積分

$$I = \int_C (x+y)\,dx + xy\,dy, \qquad C = \left\{\ (x,y) \mid x = t,\ y = t^2,\ t : 0 \to a\,\right\}$$

を求める．$\dfrac{dx}{dt} = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = 2t$ を用いて，線積分は

$$I = \int_0^a \left( (t+t^2)\frac{dx}{dt} + t \cdot t^2 \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^a \left( t + t^2 + 2t^4 \right) dt = \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} \right]_0^a = \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{5}$$

と求まる． □

## § 3.16 経路の異なる積分路における線積分

**例 3.74** **（線積分）** 点 $P(1,0)$ から点 $Q(2,1)$ への経路を $C_1$ と $C_2$ の 2 通りを考える．

(i) 積分路 $C_1$ は $P$ から $Q$ へ直線的に進むとして，

$$C_1 = \{\ (x,y) \mid x = t+1,\ y = t,\ t : 0 \to 1\ \}$$

とする．このとき線積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} (x-y)dx + y\,dy = \int_0^1 ((t+1-t)\cdot(t+1)' + t\cdot(t)')\,dt = \int_0^1 (t+1)\,dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる．

(ii) 積分路 $C_2$ は $P$ から点 $(2,0)$ を経由し $Q$ へ直線的に進むとして，

$$\begin{aligned} &C_2 = C_{21} + C_{22}, \\ &C_{21} = \{\ (x,y) \mid x = t+1,\ y = 0,\ t : 0 \to 1\ \}, \\ &C_{22} = \{\ (x,y) \mid x = 2,\ y = t,\ t : 0 \to 1\ \} \end{aligned}$$

とおく．線積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_2} (x-y)dx + y\,dy = \int_{C_{21}} (x-y)dx + y\,dy + \int_{C_{22}} (x-y)dx + y\,dy \\ &= \int_0^1 ((t+1-0)\cdot(t+1)' + 0\cdot(0)')\,dt + \int_0^1 ((2-t)\cdot(2)' + t\cdot(t)')\,dt \\ &= \int_0^1 (t+1)\,dt + \int_0^1 t\,dt = \int_0^1 (2t+1)\,dt = \left[t^2 + t\right]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

となる． □

Figure. typing...

(a) $C_1$

Figure. typing...

(b) $C_2$

**注意 3.75** **（線積分）** $P \to Q$ への積分路が異なれば積分値も異なる． □

**定義 3.76** **（線積分）** 点 $P$ から点 $Q$ への経路によらず線積分が同じとき，その線積分を

$$\int_P^Q \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$$

と書く． □

Figure. typing...

## § 3.17 線積分と多重積分

**注意** 3.77 **（周回積分）** 積分路 $C$ が一周しているとき，線積分 $\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$ を

$$\oint_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$$

と表記することがある．これを**周回積分**とも呼ぶ． □

**定義** 3.78 **（領域の境界）** 領域 $D$ の境界を $\partial D$ と表記する．このとき内部が進行方向の左手になるように向きを定める.（注意）ここで $\partial$ は偏微分の記号とは全く関係ない．単に記号の形が「ぐるっとまわる」の見えるため． □

Figure. typing...

(a) 領域 $D$ と境界 $\partial D$

Figure. typing...

(b) 穴のあいた領域 $D$

**定理** 3.79 **（グリーンの定理）** 領域 $D$ 内で関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が連続なとき,

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \oint_{\partial D} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) dxdy$$

が成り立つ. □

**注意** 3.80 **（グリーンの定理）** グリーンの定理は線積分と多重積分の移り合いを表す. □

**例** 3.81 **（グリーンの定理の使用例）** $C$ を半径 $a$ の円上を 1 周する有向曲線

$$C = \{ (x, y) \mid x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t : 0 \to 2\pi \}$$

とする．このとき $C$ の内部の領域は

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$$

である．領域 $D$ において関数 $f(x,y)=y, g(x,y)=-x$ は連続であるから，線積分

$$I=\oint_C y\,dx-x\,dy$$

はグリーンの定理が適用でき，

$$I=\iint_D(g_x-f_y)dxdy=\iint_D(-1-1)dxdy=-2\iint_D dxdy=-2\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta=-2\pi a^2$$

と計算される．

□

**例 3.82** **（グリーンの定理が使用不可な例）** 線積分

$$I=\oint_C\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy,\quad C=\{\,(x,y)\mid\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ t:0\to2\pi\,\}$$

を考える．$C$ は単位円上を 1 周する有向曲線であり，$C$ の内部の領域は

$$D=\left\{\ (x,y)\mid\ x^2+y^2\le1\right\}$$

である．関数

$$f(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad g(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

は原点で連続ではないので，領域 $D$ のすべての点において関数 $f,g$ は連続ではないからグリーンの定理は適用できない．

**誤り**ではあるが，グリーンの定理を適用して計算すると，

$$f_y=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad g_x=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad g_x-f_y=0$$

より，

$$I=\oint_C\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\iint_D(g_x-f_y)dxdy=\iint_D0\,dxdy=0$$

となる．**正しくは，**

$$I=\oint_C\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin t}{\cos^2t+\sin^2t}(-\sin t)+\frac{\cos t}{\cos^2t+\sin^2t}\cos t\right)dt$$
$$=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

と得られる．

□

## § 3.18 経路に依存しない線積分

**定理** 3.83 **（グリーンの定理の使用例）** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が $D$ で連続でかつ $g_x = f_y$ のとき,

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \iint_D (g_x - f_y) dx dy = 0$$

が成り立つ. □

**例** 3.84 **（グリーンの定理の使用例）** 任意の周回積分路 $C$ に対して,

$$I = \oint_C xy^2\, dx + x^2 y\, dy = 0$$
$$I = \oint_C \sin(x^2 + 3x + e^{x^2})\, dx + (y + y^5) e^{y^2 - y}\, dy = 0$$

が成り立つ. □

**注意** 3.85 **（経路によらない線積分）** 任意の周回積分路 $C$ に対して,

$$I = \oint_C f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy = 0$$

のとき，点 $P$ から点 $Q$ への任意の積分路 $C_1$ に対する線積分は一定となる．なぜなら，2 つの異なる点 $P$ から点 $Q$ への積分路を $C_1, C_2$ とする．このとき $C_1 - C_2 = C$ は周回する積分路となる．よって

$$I = \oint_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \oint_{C_1 - C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \oint_{C_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} - \oint_{C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = 0$$

より,

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \oint_{C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \oint_P^Q \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$$

を得る. □

**例 3.86** **（経路に依存しない線積分）** 任意の周回積分路に関して，

$$\oint_C xy^2\,dx + x^2y\,dy = 0$$

が成り立つ．よって，任意の点 $P, Q$ に対して線積分

$$I = \int_P^Q xy^2\,dx + x^2y\,dy$$

は積分の経路に依存しない．例えば $P(1,0), Q(2,1)$ とする．$P$ から $Q$ を直線的に進む経路を

$$C_1 = \{\ (x,y)\ |\ x = t+1,\ y = t,\ t : 0 \to 1\,\}$$

とする．このとき線積分は

$$\begin{aligned}
I &= \int_{C_1} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_0^1 ((t+1)t^2 + (t+1)^2t)dt = \int_0^1 (2t^3 + 3t^2 + t)dt \\
&= \left[\frac{t^4}{2} + t^3 + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2
\end{aligned}$$

となる．また，$P$ から点 $(2,0)$ を経由し $Q$ へ進む経路を

$$\begin{aligned}
&C_2 = C_{21} + C_{22}, \\
&C_{21} = \{\ (x,y)\ |\ x = t+1,\ y = 0,\ t : 0 \to 1\,\}, \\
&C_{22} = \{\ (x,y)\ |\ x = 2,\ y = t,\ t : 0 \to 1\,\}
\end{aligned}$$

とする．このとき線積分は

$$I = \int_{C_2} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_0^1 (0+0)dt + \int_0^1 (0 + 2^2t)dt = \int_0^1 4t\,dt = \Big[\,2t^2\,\Big]_0^1 = 2$$

となる．異なる積分路 $C_1, C_2$ に対して積分の値は等しい．他の経路に対しても同じ値をもつので，

$$I = \int_{(1,0)}^{(2,1)} xy^2\,dx + x^2y\,dy = 2$$

と書ける． □

## § 3.19 線積分による面積の計算

**注意** 3.87 **（線積分による面積の計算）** 領域 $D$ とのその周回 $\partial D$ に対して周回積分

$$I = \oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

を考える．$f = -y, g = x$ は $\mathbb{R}^2$ 全体で連続であるから，領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ でも連続であり，グリーンの定理が適用可能である．よって

$$I = \iint_D (g_x - f_y) dxdy = \iint_D (1 - (-1)) dxdy = 2 \iint_D dxdy = 2S(D)$$

が成り立つ．よって $I$ は領域 $D$ の面積 $S(D)$ の 2 倍となる． □

**例** 3.88 **（線積分による面積の計算）** 領域

$$D = \left\{\ (x, y) \mid\ x \leq \cos t,\ y \leq \sin^5 t,\ 0 \leq t \leq 2\pi\ \right\}$$

の面積を求める．面積は

$$S(D) = \frac{I}{2} = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

と表される．ただし，境界線は

$$\partial D = \left\{\ (x, y) \mid\ x = \cos t,\ y = \sin^5 t,\ t : 0 \to 2\pi\ \right\}$$

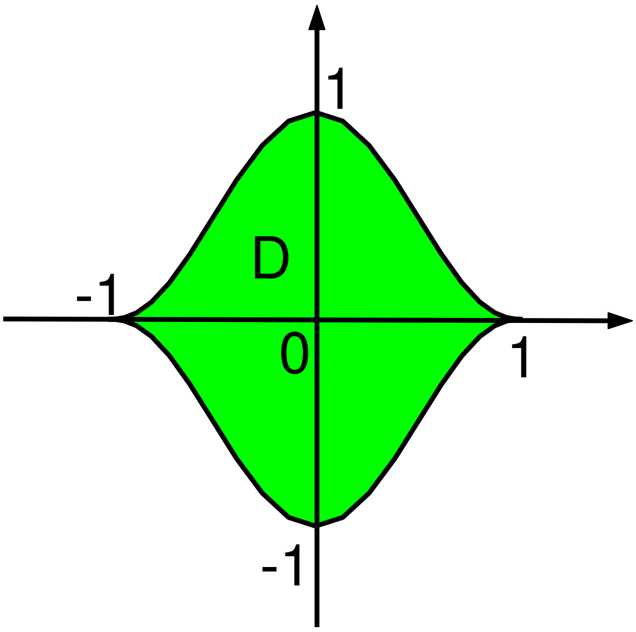
である．線積分を計算すると

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos t \times 5\sin^4 t \cos t - \sin^5 t \times (-\sin t))\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (5\sin^4 t \cos^2 t + \sin^6 t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos^2 t - 7\cos^4 t + 4\cos^6 t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{3}{4} - \cos 2t - \frac{1}{4}\cos^2 2t + \frac{1}{2}\cos^3 2t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t \sin^2 2t\right) dt \\
&= \left[\frac{5t}{8} - \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin 4t}{32} - \frac{\sin^3 2t}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}$$

となる．よって面積は

$$S(D) = \frac{I}{2} = \frac{1}{2}\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{8}$$

と求まる．


1
D
-1
0
1
-1

□