ベクトル空間

§ 体

ある集合の元に対して四則演算が定義され，その集合内で閉じているとき，その集合を体とよぶ．

定義　（体）

集合 K の任意の二つの元 a, b に対して
加法 $a+b$ と乗法 ab が定義されているとする．

(1)　$(a+b)+c = a+(b+c)$　（和の結合律）

(2)　$\forall a + \exists 0 = a = 0+a$　（零元 0 の存在）

(3)　$\forall a + \exists(-a) = 0 = (-a)+a$　（和の逆元 $-a$ の存在）

(4)　$a+b = b+a$　（和の交換律）

(5)　$(ab)c = a(bc)$　（積の結合律）

(6)　$a(b+c) = ab+ac$,
　　$(a+b)c = ac+bc$　（分配律）

(7)　$ab = ba$　（積の交換律）

(8)　$\forall a\ \exists 1 = a = 1a$　（単位元 1 の存在）

(9)　$\forall a\ \exists(a^{-1}) = 1 = (a^{-1})a$　… $a \neq 0$　（積の逆元 a^{-1} の存在）

条件(1)〜(3) をみたすとき 集合 K を群(group) と呼ぶ
条件(1)〜(4)　〃　可換群(commutative group) または アーベル群(Abel group)
条件(1)〜(6)　〃　環(ring) と呼ぶ
条件(1)〜(7)　〃　可換環(commutative ring) と呼ぶ．
条件(1)〜(9)　〃　体(field) と呼ぶ．

（特に，条件(7)をみたさない体を
非可換体(noncommutative field) と呼ぶ）

注意　○ 零元0，単位元1 は唯一つ定まる．
○和の逆元 $-a$，積の逆元 a^{-1} は 各 a に対して唯一つ定まる．

（証明）
零元

$$\begin{cases} 0+a = a+0 = a \\ 0'+a = a+0' = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0+0' = 0'+0 = 0' \\ 0'+0 = 0+0' = 0 \end{cases} \Rightarrow 0' = 0$$

逆元．

$$\begin{cases} a+b = b+a = 0 \\ a+b' = b'+a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b'+(a+b) = \underbrace{b'+0}_{b'} \Rightarrow \underbrace{(b'+a)}_{0}+b = b' \Rightarrow 0+b = b'$$

$$\Rightarrow b = b'$$

積の場合も同様

$\boxed{例}$ (体の具体例)

$\mathbb{N}$ … 自然数全体の集合 ← 加法,乗法ともに群をなさない. (∵ 和の逆元 $-a$,積の逆元 a^{-1} が存在しないので群にはならない.)

$\cap$

$\mathbb{Z}$ … 整数全体の集合 ← 可換環 (∵ 積の逆元が存在しないので体とはならない.)

$\cap$

$\mathbb{Q}$ … 有理数全体の集合 ← 体

$\cap$

$\mathbb{R}$ … 実数全体の集合 ← 体 (実数体 $\mathbb{R}$ と呼ぶ)

$\cap$

$\mathbb{C}$ … 複素数全体の集合 ← 体. (複素数体 $\mathbb{C}$ と呼ぶ)

$\boxed{例}$ (群,環,体の具体例)

(1) 0でない実数全体 $\mathbb{R}^*$ は乗法に関して可換群となる.
(∵ 積 $\times$ を和 $+$ におきかえて考える
条件 (5),(8),(9),(7) は条件 (1),(2),(3),(4) とみなせる.)

(2) $m\times n$ 型行列全体の集合 $M(m,n)$ は加法に関して可換群をなす.
(∵ (1) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (2) $A+O=A$ (3) $A+(-A)=O$ (4) $A+B=B+A$.)

(3) $n\times n$ 型行列全体の集合 $M(n,n)$ は加法と乗法に関して環となる.
(∵ 条件(1)〜(4)に加えて. (5) $(AB)C=A(BC)$ (6) $A(B+C)=AB+AC$)
(注) 集合 $M(n,n)$ は単位元 $E_n=\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}$ をもつ環である.
(注) 積に関して非可換 $AB\neq BA$ であるので $M(n,n)$ は可換環ではない.

(4) 正則な $n\times n$ 型行列全体の集合 $GL(n)$ は非可換体となる.
(∵ (8) $AE_n=A$ (9) $AA^{-1}=E_n$ (7) $AB\neq BA$)

$\boxed{\text{定理}}$ （体の性質）

体 K に対して次のことが成り立つ.

(1) 条件(2)をみたす零元 0 は唯一つである.

(2) 条件(3)をみたす和の逆元 $-a$ は各 a に対して唯一つである.

(3) $-(-a)=a$

(4) $0a=0$

(5) $(-1)a=-a$

(6) $(-1)(-1)=1$

(7) $a(-b)=-(ab)=(-a)b$

(8) $(-a)(-b)=ab$

(9) $ab=0 \Rightarrow a=0$ or $b=0$

(10) $(-a)^{-1}=-(a^{-1})$

(11) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

$\boxed{\text{問}}$ これを示せ

(1) 0 と $0'$ を零元とする このとき $0+a=a+0=a$, $0'+a=a+0'=a$ が成り立つ.
$a=0'$, $a=0$ とそれぞれおくと. $0+0'=0'+0=0'$, $0'+0=0+0'=0$ となる.
よって $0'=0$ を得る. 0 は唯一つである

(2) b, b' を a の逆元とする.

$$\begin{cases} a+b=0=b+a & \text{—①} \\ a+b'=0=b'+a & \text{—②} \end{cases} \xrightarrow{b'\text{を左から足して}} b'+(a+b)=b'$$

$(b'+a)+b=b'$
(∵条件(1))

$\xrightarrow{②} 0+b=b' \xrightarrow{\text{条件(2)}} b=b'$ //

§ ベクトル空間

定義 (ベクトル空間)

集合 V の任意の二つの元 u, v と体 K ($\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ など) の任意の元 a に対して、

和

$$u + v \in V$$

とスカラー倍

$$au \in V$$

が定義されているとする。このとき次の条件(1)〜(8)をみたすならば

V を K 上のベクトル空間 (vector space) と呼ぶ

V の元をベクトル (vector) と呼ぶ。

$u, v, w \in V,\ a, b \in K\ (\mathbb{R}$ や $\mathbb{C})$

(1) $u + v = v + u$ (交換則)

(2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (結合則)

(3) $u + {}^{\exists}0 = 0 + u = u$ (← 0 を V の零ベクトルと呼ぶ)

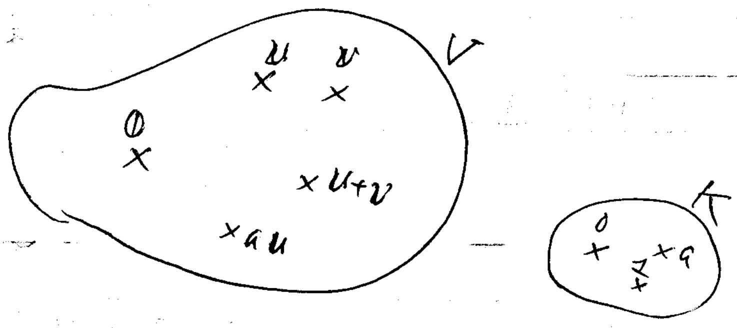
(4) $a(bu) = (ab)u$

(5) $(a+b)u = au + bu$

(6) $a(u+v) = au + av$

(7) $1u = u$

(8) $0u = 0$



特にことわらない限り

$K = \mathbb{R}$ として議論する。

$\boxed{例}$（ベクトル空間の具体例）

(1) 列ベクトル

$$\mathbb{R}^n = \left\{ a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \; a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

条件(1)〜(8)をみたす → $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

(2) 行ベクトル

$$\mathbb{R}_n = \{ a = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \mid a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

条件(1)〜(8)をみたす → $\mathbb{R}_n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

(3) 多項式

$$\mathbb{R}[x]_n = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

$f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_n$, $a \in \mathbb{R}$

和 $(f+g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$

$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \in \mathbb{R}[x]_n$

$(c_j = a_j + b_j)$

スカラー倍 $(af)(x) = (aa_0) + (aa_1)x + (aa_2)x^2 + \cdots + (aa_n)x^n$

$= c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \in \mathbb{R}[x]_n$

$(c_j = a a_j)$

条件(1)〜(8)をみたす → $\mathbb{R}[x]_n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

(4) 連続関数

$$C(a,b) = \{ f(x) \mid 区間 (a,b) で連続な実関数 \}$$

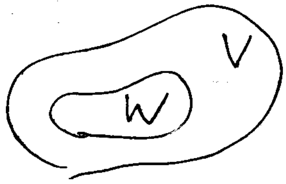
$f(x), g(x) \in C(a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

和 $(f+g)(x) = \underbrace{f(x) + g(x)}_{連続} \in C(a,b)$

スカラー倍 $(\alpha f)(x) = \underbrace{\alpha f(x)}_{連続} \in C(a,b)$

条件(1)〜(8)をみたす → $C(a,b)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

§部分空間



定義 (部分空間)

ベクトル空間 V の部分集合 W が、V と同じ和とスカラー倍の定義で、ベクトル空間となるとき、
W を V の<u>部分空間 (subspace)</u> と呼ぶ。

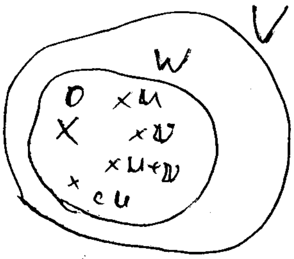
定理 (部分空間となる必要十分条件)

ベクトル空間 V の部分集合 W が部分空間となる必要十分条件は次の (i)～(iii) をみたすことである。

(i) $\mathbf{0} \in W$ (← V の零ベクトル)

(ii) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in W$

(iii) $\mathbf{u} \in W,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\mathbf{u} \in W$.



(証明) (必要条件) W が部分空間であれば、ベクトル空間の条件 (1)～(8) をみたす。
よって、条件 (i)～(iii) をみたすのは明らか。(特に $c \in \mathbb{R},\ \mathbf{u} \in W \Rightarrow 0 \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \in W$).

(十分条件) W が条件 (i)～(iii) をみたすとき、

(ii) $\Rightarrow$ (1), (2)

(iii) $\Rightarrow$ (4)～(8)

(i) $\Rightarrow$ (3)

例（部分空間の具体例）

$$V = \mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \ a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ A: m \times n \text{ 行列} \}$$

WはVの部分空間となる.

（証明）(i) $A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{0} \in W$

(ii) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \Rightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W.$

(iii) $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{x} \in W \Rightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ c \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

$A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \Rightarrow c\boldsymbol{x} \in W.$ 終

注意　同次形連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体は
$\mathbb{R}^n$ の部分空間となる.
W を方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間という.

例（解空間は部分空間か否か）

(1) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$　同次形なので W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間.

(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{array} \right\}$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. 非同次形.

$A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b}$ より. $\boldsymbol{0} \notin W$ である.
条件(i)をみたさないので W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない。

例 つづき.

(1) $W_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$

(2) $W_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{array} \right\}$

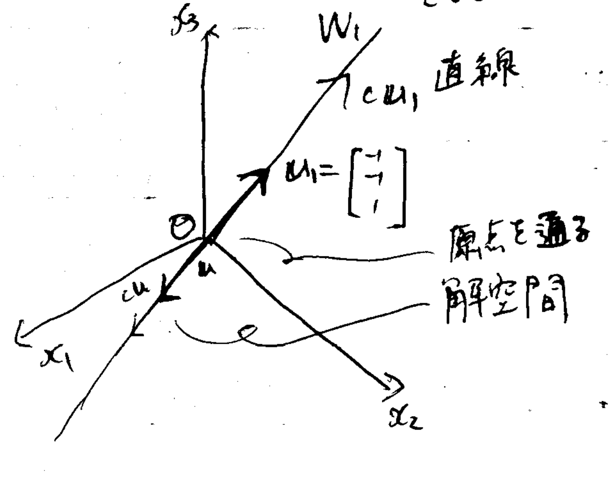
(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

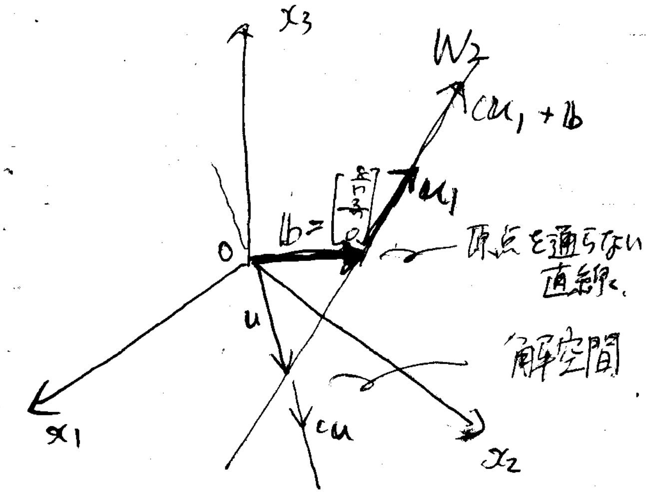
(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$

解は

(1) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = c u_1, \quad u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = b + c u_1, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$





W_1 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間.

W_2 は原点を含まないので
$\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない.
u を上図のようにとると
cu は解に含まれない.

例 （多項式からなる部分空間の具体例）

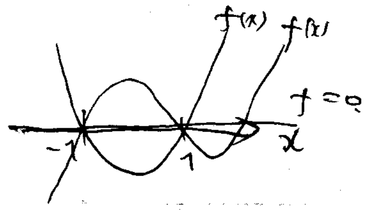
$$V = \mathbb{R}[x]_3 = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3 \}$$

(1) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0,\ f(-1) = 0 \}$

(i) Vの零ベクトルは $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ は $f(\pm 1) = 0$ をみたす.

$\Rightarrow f(x) \in W$.



(ii) $f(x), g(x) \in W \Rightarrow f(\pm 1) = 0,\ g(\pm 1) = 0$

$(f+g)(\pm 1) = f(\pm 1) + g(\pm 1) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (f+g)(x) \in W$.

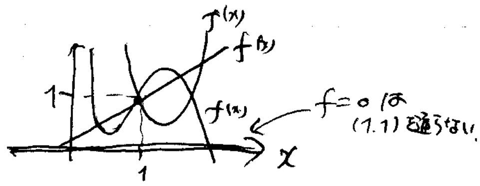
(iii) $f(x) \in W \Rightarrow f(\pm 1) = 0$

$c \in \mathbb{R}$

$(cf)(\pm 1) = c f(\pm 1) = c \times 0 = 0 \Rightarrow (cf)(x) \in W$.

以上より，(i), (ii), (iii) より Wは$\mathbb{R}[x]_3$の部分空間である.

(2) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 1 \}$



$f(x) = 0$ は $f(1) = 1$ をみたさない.

$\Rightarrow f(x) = 0 \notin W$.

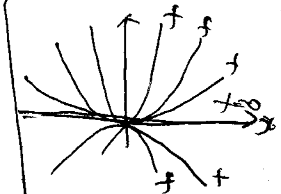
よって (i)をみたさないので Wは$\mathbb{R}[x]_3$の部分空間ではない.

(3) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid x f'(x) = 2 f(x) \}$

$$\begin{cases} x f' = a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 \\ 2f = 2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_0 = 0,\ a_1 \in \mathbb{R},\ a_2 = 0, a_3 = 0$

$\Rightarrow f = a_2 x^2$



(i) $f = 0 \Rightarrow x(0)' = 2 \times (0) \Rightarrow f = 0 \in W$.

$\rightarrow 0 = 0$ o.k.

(ii) $f, g \in W \Rightarrow x f' = 2f,\ x g' = 2g$

$x(f+g)' = x f' + x g' = 2f + 2g = 2(f+g) \Rightarrow f + g \in W$.

(iii) $f \in W \Rightarrow x f' = 2f$

$c \in \mathbb{R}$

$x(cf)' = c x f' = 2cf = 2(cf) \Rightarrow cf \in W$.

以上より (i), (ii), (iii) をみたすので

Wは$\mathbb{R}[x]_3$の部分空間である.

問 （解空間が部分空間か否か）

$V = \mathbb{R}^3$

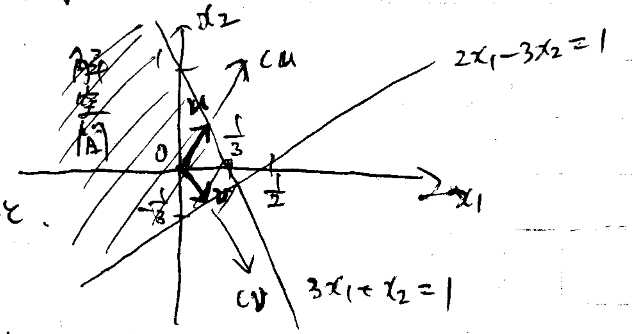
(1) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1 \end{array} \right\}$

W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない。

∵ $x_3 = 0$ のとき

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

右図のように $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ をとると、
$c\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ は
解空間に含まれない。



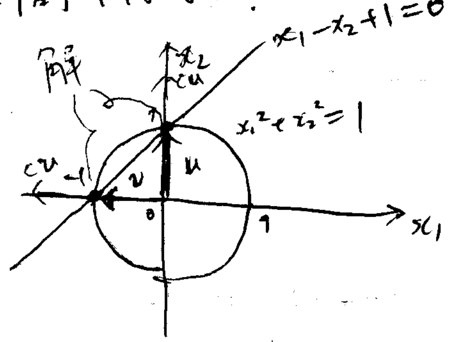
(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{array} \right\}$

W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない。

∵ $x_3 = 1$ のとき

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 - x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

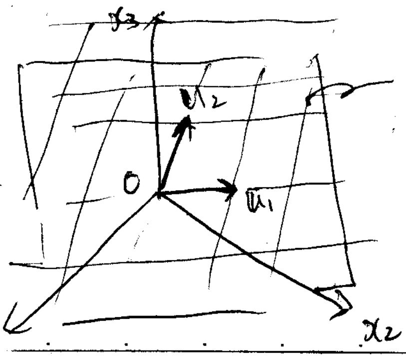
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を右図のようにとると、
$c\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ は
解に含まれない。



(3) $W = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \}$

解. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \boldsymbol{u}_1 + c_2 \boldsymbol{u}_2$

$\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R}$.



解空間
原点を含む平面

(i) $\boldsymbol{0} \in W$

(ii) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W \Rightarrow \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$

(iii) $\boldsymbol{u} \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\boldsymbol{u} \in W$.

W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間.

§ 1次独立と1次従属

定義 (1次結合)

ベクトル空間 V のベクトル v が V のベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ を用いて

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n, \quad c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$$

と表されるとき，ベクトル v は $u_1, u_2, \cdots, u_n$ の 1次結合 または 線形結合 (linear combination) で表されるという．

定義 (1次関係)

ベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0, \quad c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$$

をみたすとき，これをベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ の 1次関係 または 線形関係 という

注意 (自明な1次関係)

$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ とすると，ベクトル $u_1, \cdots, u_n$ は常に 1次関係

$$0 \times u_1 + 0 \times u_2 + \cdots + 0 \times u_n = 0$$

をみたす．これを 自明な1次関係 とよぶ．

定義 (1次独立，1次従属)

ベクトル $u_1, u_2, \cdots u_n$ の1次関係

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$$

をみたす係数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が自明なもの

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

のみであるとき，ベクトル $u_1, u_2, \cdots u_n$ は 1次独立 または 線形独立 (linealy independent) であるという． 1次独立ではないとき．1次従属 または 線形従属 (linealy dependent) であるという。

例 (1次独立の具体例)

$V=\mathbb{R}^n$ を考える.

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\in V$$

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ は1次独立である.

なぜなら.

$$c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{e}_n=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+c_n\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

をみたすのは $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ のみであるから.

例 (1次独立の具体例)

$V=\mathbb{R}[x]_n$ を考える.

$V\ni 1,x,x^2,\cdots,x^n$ は1次独立なベクトルである.

(∵) $(*)\ c_0\cdot 1+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=0$ より.

$c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n$ を定める.

$x=0$ とすると. $c_0=0$ となる.

$(*)$ を微分すると.

$(**)\quad c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots+nc_nx^{n-1}=0.$

となる. $x=0$ とおくと $c_1=0$ となる.

これを繰り返すと.

$$c_0=c_1=\cdots=c_n=0$$

を得る. よって. 1次独立である. 図

$\boxed{例}$ (1次独立か否か)

$$\mathbb{R}^4 \ni a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$ より c_1, c_2, c_3 を定める.

$$\rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A\mathbb{c} = 0$$

簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ← 解は自明なもののみである.
($\because$ rank(A) = 変数の個数 = 3)

自明なもの $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので
a_1, a_2, a_3 は1次独立である. //

例 (1次独立か否か)

$$\mathbb{R}^4 \ni \ a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \ a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$ より

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A c = 0$$

簡約化すると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} c_1 = 2c \\ c_2 = -3c \\ c_3 = c \end{cases} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

← 変数の個数 − rank(A)
= 任意定数の個数
= 3−2=1.

以上より

$$(2c)a_1 + (-3c)a_2 + (c)a_3 = 0$$

$$2a_1 - 3a_2 + a_3 = 0.$$

となるので、a_1, a_2, a_3 は1次従属である。//

定理

$V \ni u_1, u_2, \cdots u_n$

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が1次従属 $\Leftrightarrow$ $u_1, u_2, \cdots, u_n$ のうち少なくとも1個のベクトルが他の $n-1$ 個のベクトルの1次結合で表せる

(証明)

(必要条件) $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が1次従属であれば、1次関係

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$$

をみたす係数 c_i は自明なもの $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 以外にも存在する。

例えば $c_1 \neq 0$ とすると

$$u_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)u_2 + \left(-\frac{c_3}{c_1}\right)u_3 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c_1}\right)u_n$$

となる。u_1 は $u_1, u_2, \cdots, u_n$ の1次結合で表せた

他の係数が $c_j \neq 0$ の場合でも同様。

(十分条件) u_1 が他の $n-1$ 個のベクトルの1次結合で表せるとすると

$$u_1 = c_2 u_2 + c_3 u_3 + \cdots + c_n u_n$$

となる。これより

$$(-1) u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \cdots + c_n u_n$$

となる。$c_1 = -1$ とおけば、

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \cdots + c_n u_n = 0$$

を得る。$c_1 \neq 0$ であるから自明ではない $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ が存在する。

よって $u_1, u_2, \cdots, u_n$ は1次従属である

終

定理

$V \ni u_1, u_2, \cdots, u_n, u$

$$\left.\begin{array}{l} u_1, u_2, \cdots, u_n \text{ は1次独立} \\ u_1, u_2, \cdots, u_n, u \text{ は1次従属} \end{array}\right\} \Rightarrow u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n \quad (c_j \in \mathbb{R})$$

(証明)

1次関係

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n + c u = 0$$

を考える。$u_1, u_2, \cdots, u_n, u$ は1次従属なので、$c_1, c_2, \cdots, c_n, c$ のうち少なくとも一つは0でないものがある。

もし $c = 0$ とすると、$c_1, c_2, \cdots, c_n$ のうち少なくとも1つは0ではない。

しかし、$c = 0$ とおくと、

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$$

となり、$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は1次独立であることから、c_j はすべて0となるはずであり、矛盾がおこる。よって $c \neq 0$ である。

これより

$$u = \left(-\frac{c_1}{c}\right)u_1 + \left(-\frac{c_n}{c}\right)u_2 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c}\right)u_n = \tilde{c}_1 u_1 + \tilde{c}_2 u_2 + \cdots + \tilde{c}_n u_n$$

となる。u は $u_1, u_2, \cdots, u_n$ の1次結合で表せる。

$\square$

§ 1次結合の記法

定義

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad V \ni u_1, u_2, \cdots, u_m, \quad V \ni v_1, v_2, \cdots, v_n$$

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1, u_2, \cdots, u_m)A = (u_1, u_2, \cdots, u_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m,\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m,\ \cdots,\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m)$$

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \\ \vdots \\ v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m \end{cases}$$

例

$$\begin{cases} v_1 = 3u_1 + u_2 \\ v_2 = 2u_1 - u_2 \\ v_3 = u_1 + 4u_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{\text{ベクトルの組}} = (3u_1 + u_2, 2u_1 - u_2, u_1 + 4u_2)$$

$$= (u_1, u_2)\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}}_{A}$$

$$= (u_1, u_2)A.$$

あたかも v_i をスカラーのように取り扱う、

スカラの方がベクトルのように取り扱う.

定理

$V \ni v_1, v_2, \cdots, v_n \quad V \ni u_1, u_2, \cdots, u_m$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ v_1, v_2, \cdots, v_n \text{ の各ベクトルは} \\ \quad u_1, u_2, \cdots, u_m \text{ の1次結合で表される.} \\ (2)\quad n > m.\end{array}\right\} \Longrightarrow v_1, v_2, \cdots, v_n \text{ は1次従属である.}$$

(証明) 条件(1),(2)のとき 一次関係 $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$ をみたす非自明な $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が存在することを示す.

条件(1)より

$$\begin{cases} v_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \cdots + a_{m1} u_m. \\ v_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \cdots + a_{m2} u_m \\ \vdots \\ v_n = a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \cdots + a_{mn} u_m. \end{cases}$$

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1, u_2, \cdots, u_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= (u_1, u_2, \cdots, u_m) A \qquad \text{ただし } A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

と書ける. 一次関係は

$$0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\, c$$

$$= (u_1, u_2, \cdots, u_m) \underbrace{A c}_{0} \qquad \text{ただし } c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

となる. $Ac = 0$ が成り立つか示す. すなわち方程式 $Ax = 0$ の解として,
自明ではない解 c が存在するか示す. 方程式 $Ax = 0$ は同次形であるので常に解をもつ.
非自明な解であるためには, 任意定数を含む解でなければならない. 任意定数の個数は

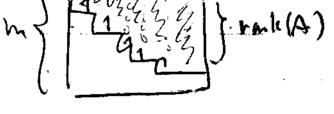
$$\text{任意定数の個数} = \text{変数の個数} - \mathrm{rank}(A) = n - \mathrm{rank}(A)$$

である. 行列の階数は行の個数を超えないので $m \geq \mathrm{rank}(A)$ であり, 条件(2) $n > m$ より

$$\text{任意定数の個数} = n - \mathrm{rank}(A) \geq n - m > 0$$

を得る. 任意定数は1個以上あるので, 非自明解をもつ. よって $c \neq 0$ が存在する.

$c \neq 0$ より $v_1, v_2, \cdots, v_n$ は1次従属である.



終

例

$$V = \mathbb{R}^2 \ni v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

v_1, v_2, v_3 は1次従属である.

(証明) まず $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

とおく. すると,

$$\begin{cases} v_1 = 2e_1 + e_2 \\ v_2 = 4e_1 + 3e_2 \\ v_3 = 5e_1 - e_2 \end{cases}$$

$$(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2)\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

と書ける. $n = 3 > m = 2$ となるから v_1, v_2, v_3 は1次従属である.

実際, v_1, v_2, v_3 の非自明な1次関係を求めてみる. $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ より

簡約化して $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & -7/2 \end{bmatrix}$

となる. 方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 19/2 \\ 0 & 1 & -7/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ を解くと $\begin{cases} c_1 = -\frac{19}{2}c_3 \\ c_2 = \frac{7}{2}c_3 \\ \forall c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$ となる.

これより 1次関係は $(v_1, v_2, v_3)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ より

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$-\frac{19}{2}\cancel{c_3} v_1 + \frac{7}{2}\cancel{c_3} v_2 + \cancel{c_3} v_3 = 0$$

$$19 v_1 - 7 v_2 - 2 v_3 = 0$$

となる. 確認してみると.

$$\begin{aligned} 19v_1 - 7v_2 - 2v_3 &= 19(2e_1 + e_2) - 7(4e_1 + 3e_2) - 2(5e_1 - e_2) \\ &= (19\times 2 - 7\times 4 - 2\times 5)e_1 + (19 - 7\times 3 - 2\times(-1))e_2 \\ &= (38 - 28 - 10)e_1 + (19 - 21 + 2)e_2 \\ &= 0\times e_1 + 0\times e_2 \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となり O.K. //

(注) ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^m \ni v_1, v_2, \cdots, v_n$.
$n > m \Rightarrow v_1, v_2, \cdots v_n$ は1次従属

定理

$V \ni u_1, u_2, \ , u_m, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

$u_1, u_2, \cdots, u_m$ は1次独立.

$(u_1, u_2, \cdots, u_m) A = (0, 0, \cdots 0)$

$\Rightarrow \quad A = O$

注意. 特に
$A = c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$
のときは
$(u_1\, u_2 \cdots u_n)\, c = 0$
$\Rightarrow c = 0$
となる.

(証明) $(u_1, u_2, \cdots, u_m) A = (0, 0, \cdots, 0)$ より

$$\begin{cases} a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \cdots + a_{m1} u_m = 0 \\ a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \cdots + a_{m2} u_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \cdots + a_{mn} u_m = 0 \end{cases}$$

となる. 各式は $u_1 \cdots u_m$ の1次関係 となっている.
$u_1, u_2, \cdots u_m$ は 1次独立なので. 係数は自明なものに限る.
よって $a_{ij} = 0 \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ である. すなわち $A = O$ を得る. ∎

定理

$(u_1, u_2, \cdots, u_m) A = (u_1\, u_2 \cdots, u_m) B \quad \Rightarrow \quad A = B$.

証明)

$(u_1\, u_2 \cdots u_n) A = (u_1\, u_2 \cdots u_m) B$
$(u_1, u_2 \cdots u_m) A - (u_1\, u_2 \cdots u_3) B = (0, 0, \cdots 0)$
$(u_1, u_2, \cdots, u_n)(A - B) = (0, 0, \cdots, 0)$
$\Rightarrow A - B = O$
$\Rightarrow A = B$ //

∎

例

$$\begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 + 3u_3 \\ v_2 = 2u_1 - u_2 + 6u_3 + u_4 \\ v_3 = 2u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4 \\ v_4 = u_1 - u_3 + 3u_4 \end{cases}$$

u_1, u_2, u_3, u_4 は1次独立.

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4)\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{= A} = (u_1, u_2, u_3, u_4) A$$

$v_1, \cdots, v_4$ の一次関係、

$$\boldsymbol{0} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}}_{= \boldsymbol{c}} = (v_1, v_2, v_3, v_4)\boldsymbol{c}$$

$$= (u_1, u_2, u_3, u_4)\underbrace{A\boldsymbol{c}}_{= \tilde{\boldsymbol{c}}} = (u_1, u_2, u_3, u_4)\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}$$

u_1, u_2, u_3, u_4 は1次独立であるから $\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}$ となる.

よって $A\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ. これを解く.

簡約化して $A \to E$, $\mathrm{rank}(A) = 4$ より.

解は自明なもの $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ に限る.

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ より. v_1, v_2, v_3, v_4 は1次独立である.

例

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{v}_4 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3 - 3\boldsymbol{u}_4 \end{cases}$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ は1次独立.

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4) \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}}_{\shortparallel \atop A} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4) A.$$

$$\boldsymbol{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}}_{\shortparallel \atop \boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)\boldsymbol{c}$$

$$= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4) \underbrace{A\boldsymbol{c}}_{\shortparallel \atop \tilde{\boldsymbol{c}}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ は1次独立であるから $\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}$ である. よって $A\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0}$ を得る.

これを解く. 簡約化して $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{rcases} c_1 + c_4 = 0 \\ c_2 - c_4 = 0 \\ c_3 + c_4 = 0 \end{rcases}$ となる.

$\mathrm{rank}(A) = 3 < 4$

よって, $c_1 = -c_4,\ c_2 = c_4,\ c_3 = -c_4,\ \forall c_4 \in \mathbb{R}$ である.

これより
$$-c_4\boldsymbol{v}_1 + c_4\boldsymbol{v}_2 - c_4\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$$
を得る. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は1次従属である.

了

§ ベクトルの1次独立な最大個数

定義 (ベクトルの1次独立な最大個数)

ベクトルの集合 X に含まれるある r 個のベクトルが1次独立であり、
X に含まれる任意の $r+1$ 個のベクトルが1次従属であるとき、
r を集合 X のベクトルの1次独立な最大個数という。

定理

ベクトルの集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$

$v_1, \cdots, v_n$ の各ベクトルが $u_1 \cdots u_m$ の1次結合で表せる. $\Longrightarrow$ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ の1次独立な最大個数 $\leq$ $\{u_1, \cdots, u_m\}$ の1次独立な最大個数.

(証明) $v_1, \cdots, v_n$ は $u_1, \cdots, u_m$ の1次結合で表せるので

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1, \cdots, u_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (u_1 \cdots u_m) A$$

と書ける. $u_1, u_2, \cdots, u_m$ の1次独立の最大個数を r 個とする.
$u_1, u_2, \cdots, u_m$ のうち $u_1, \cdots, u_r$ を1次独立な r 個のベクトルとする.

($u_1, \cdots, u_r$ 以外が1次独立な場合は、番号を入れかえる.)

このとき

$$\begin{gathered} u_1, \cdots, u_r, u_{r+1} \\ u_1, \cdots, u_r, u_{r+2} \\ \cdots\cdots \\ u_1, \cdots, u_r, u_m \end{gathered}$$

はそれぞれ1次従属となる. 定理4.2.2より $u_{r+1}, \cdots, u_m$ は $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合でそれぞれ表される. すなわち

$$\begin{cases} u_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} b_{i,r+1} u_i \\ u_{r+2} = \sum_{i=1}^{r} b_{i,r+2} u_i \\ \quad\vdots \\ u_m = \sum_{i=1}^{r} b_{im} u_i \end{cases}$$

となる. $u_1 = u_1$, $u_2 = u_2$, $\cdots$, $u_r = u_r$ と合わせて書き直すと,

$$(u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots u_m) = (u_1, \dots u_r, u_{r+1}, \dots u_m) \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{6em}}^{m} \\ \begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{2em}}^{r} & \overbrace{\hspace{3em}}^{m-r} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,m} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,m} \\ \hline & O & & & O & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array} \Big\} m$$

$$= (u_1 \cdots u_m) \left[\begin{array}{c|c} E_r & B \\ \hline O & O \end{array}\right]$$

これらより、$v_1, \dots, v_n$は

$$\begin{aligned}
(v_1, \dots, v_n) &= (u_1, \dots, u_n) A \\
&= (u_1, \dots, u_n) \left[\begin{array}{c|c} E_r & B \\ \hline O_{r,m-r} & O_{m-r,m-r} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array} \\
&= (u_1, \dots, u_n) \left[\begin{array}{c|c} A_{11} + BA_{21} & A_{12} + BA_{22} \\ \hline O & O \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array} \\
&= (u_1, \dots, u_n) \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_{11} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rr} & c_{r,m+1} & \cdots & c_{r,n} \\ \hline & O & & & O & \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array}
\end{aligned}$$

より

$$v_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ij} u_i \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

となる. $v_1, \dots, v_n$の各ベクトルはr個のベクトル$u_1, \dots, u_r$の1次結合で書ける.
定理 4.2.3より$\{v_1, \dots, v_n\}$のうち r+1 個以上のベクトルをぬき出すと.
それらは、1次従属となる. よって. 1次独立となりうるベクトルの個数は r+1 個未満である.
以上より. 証明された.

証

$\boxed{\text{定理}}$

$\{u_1, \cdots, u_m\}$ の1次独立な最大個数 $= r$

$\Longleftrightarrow$ $u_1, \cdots, u_m$ のなかに r 個の1次独立なベクトルがある。

他の $m-r$ 個のベクトルはこの r 個のベクトルの1次結合で表せる。

(証明)

($\Rightarrow$) $u_1, \cdots, u_m$ のうち1次独立な r 個のベクトルを例えば

$$u_1, \cdots, u_r$$

とする。このとき、

$$u_1, \cdots, u_r, u_t \quad (t = r+1, r+2, \cdots, m)$$

は1次従属であるから、定理 4.2.2 より u_t は $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で表せる。

($\Leftarrow$) 例えば $u_1, \cdots, u_r$ は1次独立な r 個のベクトルであり、他の $m-r$ 個のベクトル $u_{r+1}, \cdots, u_m$ は $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で書けるとする。このとき、

$$r \leq \{u_1, \cdots, u_m\} \text{ の1次独立な最大個数}$$

である。また、$u_1, \cdots, u_m$ は

$$(u_1, u_2, \cdots, u_m) = (u_1, \cdots, u_r) \left.\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} \overbrace{1 & & &}^{r} & \overbrace{a_{1,r+1} & a_{1,r+2} & \cdots & a_{1,m}}^{m-r} \\ & 1 & & & a_{2,r+1} & \vdots & & a_{2,m} \\ & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 1 & a_{r,r+1} & & & a_{r,m} \end{array}\right]}_{m}\right\} r$$

のように $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で表せるので、定理 4.3.1 より

$$\{u_1, \cdots, u_m\} \text{ の1次独立な最大個数}$$
$$\leq \{u_1, \cdots, u_r\} \text{ の1次独立な最大個数} = r$$

が成り立つ。よって、$\{u_1, \cdots, u_m\}$ の1次独立な最大個数は r である。

例

$$V=\mathbb{R}^4 \ni a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\0\end{bmatrix},\ a_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix},\ a_3=\begin{bmatrix}1\\3\\-3\\-2\end{bmatrix},\ a_4=\begin{bmatrix}-2\\-4\\1\\-1\end{bmatrix},\ a_5=\begin{bmatrix}1\\-4\\7\\0\end{bmatrix}$$

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ の1次独立なベクトルの最大個数を求めよ.
1次独立なベクトルの組を一つ求めよ.
その他のベクトルをこれらのベクトルの一次結合で表せ.

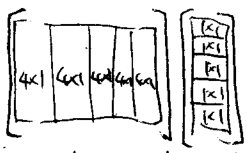
一次関係、

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4 + c_5 a_5 = 0$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{bmatrix} = 0$$

ここで, a_j は列ベクトルであることに注意すると

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{bmatrix} = 0$$



行列の分割の積.

$$A\,c = 0$$

と表される. 方程式 $Ax=0$ を求めることで
一次関係 の係数 c が定まる.
行列 A を簡約化すると

$$A \to B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\end{bmatrix}$$

となる. 方程式 $Bx=0$ の解もまた c となる.
すなわち $a_1, a_2, \dots, a_5$ の一次関係

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_5 a_5 = 0$$

と $b_1, b_2, \dots, b_5$ の一次関係

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_5 b_5 = 0$$

は同じものとなる. このことは 簡約化を $B=PA$ (Pは基本変形を行列の積で表すときの行列)(Pは正則) と表せば

$$B=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_5\end{bmatrix}=PA=P\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Pa_1 & Pa_2 & \cdots & Pa_5\end{bmatrix}$$

であるので,

$$\begin{cases} b_j = P a_j & (j=1,2,\dots,5) \\ a_j = P^{-1} b_j \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{0} &= c_1 \mathbb{a}_1 + c_2 \mathbb{a}_2 + \cdots + c_5 \mathbb{a}_5 \\
&= c_1 P^{-1} \mathbb{b}_1 + c_2 P^{-1} \mathbb{b}_2 + \cdots + c_5 P^{-1} \mathbb{b}_5 \\
&= P^{-1}(c_1 \mathbb{b}_1 + c_2 \mathbb{b}_2 + \cdots + c_5 \mathbb{b}_5)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow P\mathbb{0} = PP^{-1}(c_1 \mathbb{b}_1 + c_2 \mathbb{b}_2 + \cdots + c_5 \mathbb{b}_5)$$

$$\Rightarrow \mathbb{0} = c_1 \mathbb{b}_1 + c_2 \mathbb{b}_2 + \cdots + c_5 \mathbb{b}_5$$

が成り立つ. 同様にして. 逆も成り立つ. よって. 一次関係を考えるときは $\mathbb{a}_1, \cdots, \mathbb{a}_5$ でも.

$\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_5$ でも. どちらで議論してもよい.

$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_4$ に着目すると

$$\mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり, これらは $\mathbb{R}^4$ の基本ベクトルであり, 1次独立である.

$\mathbb{R}^4$ の任意のベクトルは基本ベクトルの1次結合で表されるので.

$$\mathbb{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2$$

$$\mathbb{b}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbb{b}_1 - \mathbb{b}_2 + \mathbb{b}_4$$

となる. これらより $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \cdots \mathbb{b}_5\}$ の1次独立な最大個数は $r=3$ である.

1次独立なベクトルは $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_4$ であり, その他のベクトルは.

$$\mathbb{b}_3 = -\mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2, \quad \mathbb{b}_5 = 2\mathbb{b}_1 - \mathbb{b}_2 + \mathbb{b}_4$$

と1次結合で表される.

よって. $\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \cdots, \mathbb{a}_5\}$ についても同じ一次関係が成り立つので.

1次独立な最大個数は $r=3$ であり.

1次独立なベクトルは $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_4$ であり. その他のベクトルは

$$\mathbb{a}_3 = -\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2, \quad \mathbb{a}_5 = 2\mathbb{a}_1 - \mathbb{a}_2 + \mathbb{a}_4$$

が成り立つ.

$\boxed{//}$

前の例題をまとめると、

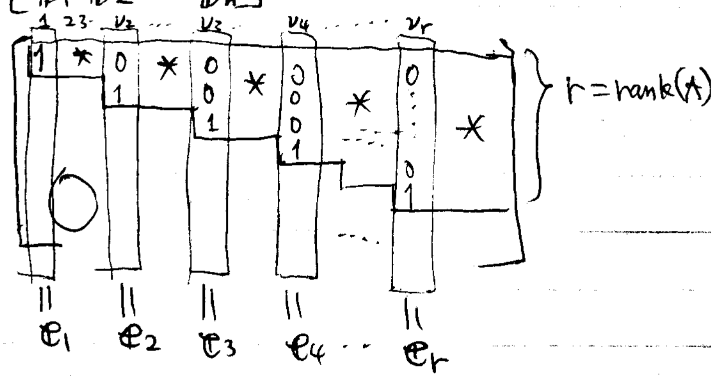
$\mathbb{R}^n \ni a_1, a_2, \cdots, a_n$.

1次独立な最大個数 r は?
1次独立なベクトルの組の一例は?
その他のベクトルを1次結合で表すには?

$$A = [a_1\ a_2 \cdots a_n] \xrightarrow{\text{簡約化}} B = [b_1\ b_2 \cdots b_n]$$

$\left(\begin{array}{c} B = PA \text{ とおく.} \\ (b_j = P a_j) \end{array} \right)$

$=$



$\{1, 2, 3, \cdots, n\} = \{1, \nu_2, \nu_3, \cdots, \nu_r\} + \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-r}\}$ ← $1 \sim n$ を r 個と $n-r$ 個の組に分ける.

$b_1, b_2, \cdots, b_n$ のうち r 個は $b_1 = e_1, b_{\nu_2} = e_2, \cdots, b_{\nu_r} = e_r$ となり
1次独立である. 残りの $n-r$ 個のベクトル $b_{\mu_1}, b_{\mu_2}, \cdots, b_{\mu_{n-r}}$ は

$$b_{\mu_i} = \left.\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} r = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_r \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_r e_r$$

$$= c_1 b_1 + c_2 b_{\nu_2} + \cdots + c_r b_{\nu_r} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-r)$$

となり, 1次独立なベクトル $b_1, b_{\nu_2}, \cdots, b_{\nu_r}$ の1次結合で表せる.

よって. $c_1 b_1 + c_2 b_{\nu_2} + c_3 b_{\nu_3} + \cdots + c_r b_{\nu_r} = 0$ をみたす係数 $c_1, \cdots, c_r$ は
自明なものだけであり. $b_j = P a_j$ より

$$c_1 P a_1 + c_2 P a_{\nu_2} + c_3 P a_{\nu_3} + \cdots + c_r P a_{\nu_r} = 0$$

$$P(c_1 a_1 + c_2 a_{\nu_2} + c_3 a_{\nu_3} + \cdots + c_r a_{\nu_r}) = 0$$

$$\underbrace{PP^{-1}}_{E}(c_1 a_1 + c_2 a_{\nu_2} + c_3 a_{\nu_3} + \cdots + c_r a_{\nu_r}) = \underbrace{P0}_{=0}$$

$$\Longrightarrow c_1 a_1 + c_2 a_{\nu_2} + c_3 a_{\nu_3} + \cdots + c_r a_{\nu_r} = 0$$

となるので. $a_1, a_{\nu_2}, \cdots, a_{\nu_r}$ の1次関係も自明なものに限る.

その他のベクトルは

$$\mathbb{b}_{\mu_i} = c_1 \mathbb{b}_1 + c_2 \mathbb{b}_{\nu_2} + \cdots + c_r \mathbb{b}_{\nu_r} \qquad (i=1,2,\cdots,n-r)$$

$$P a_{\mu_i} = c_1 P a_1 + c_2 P a_{\nu_2} + \cdots + c_r P a_{\nu_r}$$

$$P a_{\mu_i} = P(c_1 a_1 + c_2 a_{\nu_2} + \cdots + c_r a_{\nu_r})$$

$$\underbrace{P^{-1}P}_{E} a_{\mu_i} = \underbrace{P^{-1}P}_{E}(\qquad)$$

$$a_{\mu_i} = c_1 a_1 + c_2 a_{\nu_2} + \cdots + c_r a_{\nu_r}$$

となるので, $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \cdots, a_{\mu_{n-r}}$ は $a_1, a_{\nu_2}, \cdots, a_{\nu_r}$ の1次結合で表される.

以上より, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の1次独立なベクトルの最大個数は $r = \mathrm{rank}(A)$ となる.

定理

rank(A) = Aの列ベクトルの1次独立な最大個数
= Aの行ベクトルの1次独立な最大個数.

(証明) 列ベクトルについては前頁で証明済.
行ベクトルについて示す.

$$A=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} B=\left.\begin{bmatrix} \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ & & 1 & * & 0 & \vdots & * & \vdots & * \\ & & & & 1 & * & 0 & \vdots & \\ & & & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & & & 1 & \\ & O & & & & & & & \end{bmatrix}\right\} s = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ \\ b_m\end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_s\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\right\} s$$

とおく. Bの零ベクトルではない行ベクトルの個数をsとする.
零ベクトルではない行ベクトル $b_1, b_2, \cdots, b_s$ は1次独立である. なぜなら

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_s b_s = [c_1, \cdots, c_2, \cdots, c_3, \cdots, \cdots c_s, \cdots]$$
$$= [0, 0, 0, \cdots, 0]$$

主成分の位置

$$\Rightarrow c_1=0,\ c_2=0,\ \cdots,\ c_s=0$$

をみたすからである. よってBの全ての行ベクトル $b_1, b_2, \cdots, b_m$ の1次独立な最大個数は $s = \mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A)$ である.
Aの行ベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_m$ の1次独立な最大個数をrとする.
Aの行に関して基本変形を繰り返してBが得られるので:
Bの行ベクトルはAの行ベクトルの1次結合

$$b_i = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_m a_m \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

で表される. よって, $r \geq s$ が成り立つ.
一方, Bに対して行の基本変形を繰り返し行なうことでAを得ることができる.
すなわち, Aの行ベクトルはBの行ベクトルの1次結合

$$a_i = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_m b_m \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

で表される. よって $r \leq s$ が成り立つ.
以上より, $r \geq s,\ r \leq s \Rightarrow r = s = \mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A)$ が得られる.

定理

n次正方行列 A に対して

　　A の n 個の列ベクトルは1次独立である.
$\Longleftrightarrow$ A の n 個の行ベクトルは1次独立である.
$\Longleftrightarrow$ A は正則行列である（A は逆行列をもつ.）
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=n$.
$\Longleftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$.

（証明）Aの全ての列（行）ベクトルが1次独立であれば
$\mathrm{rank}(A)=n$ となる. これは前定理より明らか.
$\mathrm{rank}(A)=n \Leftrightarrow A$:正則 $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$ が成り立つのは
正方行列の性質より明らか.

終

定理

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_m)A$$

$A = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]$: $m \times n$ 行列

$u_1, u_2, \ldots, u_m$ は1次独立.

(1) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ の1次関係と $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の1次関係は同じ.

(2) $m = n$ のとき

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ A が正則行列.

(証明)

(1) $$0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)\mathbf{c}$$

$$= (u_1, u_2, \ldots, u_m)\underbrace{A\mathbf{c}}_{\mathbf{c}'} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)\mathbf{c}'$$

$u_1, \ldots, u_m$ は独立なので $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$. よって.

$$0 = A\mathbf{c} = [a_1\ a_2 \cdots a_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n.$$

(2) $m = n$ のとき A は正方行列.

$v_1, \ldots, v_n$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ $a_1, \ldots, a_n$ が1次独立

$\Longleftrightarrow$ A が正則行列.

$\boxed{例}$
$$\begin{cases} f_1(x) = 1+x+3x^2 \\ f_2(x) = 1+2x-x^3 \\ f_3(x) = 1+3x-3x^2-2x^3 \\ f_4(x) = -2-4x+x^2-x^3 \\ f_5(x) = -1-4x+7x^2 \end{cases}$$

$\mathbb{R}[x]_3 \ni f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$

$\mathbb{R}[x]_3 \ni 1, x, x^2, x^3$

$1, x, x^2, x^3$ は1次独立なベクトルである.

$f_1, \cdots, f_5$ と $1, x, x^2, x^3$ との関係は.

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (1, x, x^2, x^3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = (1, x, x^2, x^3)A.$$

$f_1, \cdots, f_5$ の1次関係は.

$$\mathbb{O} = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 + c_5 f_5 = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_5 \end{bmatrix} = (f_1, \cdots, f_5)\,\mathbb{c}$$

$$= (1, x, x^2, x^3)\underbrace{A\mathbb{c}}_{\overset{\shortparallel}{\widehat{\mathbb{c}}}} = (1, x, x^2, x^3)\,\widehat{\mathbb{c}}.$$

$1, x, x^2, x^3$ は1次独立なので $\widehat{\mathbb{c}} = \mathbb{0}$ であり, $A\mathbb{c} = \mathbb{0}$ が成り立つ.

A を簡約化して $B = [\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3, \mathbb{b}_4, \mathbb{b}_5]$ を得るとする. これを $B = PA$ とおくと.

$$A\mathbb{c} = \mathbb{0}$$
$$\to \underbrace{PA}_{\overset{\shortparallel}{B}}\mathbb{c} = \underbrace{P\mathbb{0}}_{\overset{\shortparallel}{\mathbb{0}}}$$
$$\to B\mathbb{c} = \mathbb{0}$$

が成り立つ. すなわち. $f_1, \cdots, f_5$ と. $\mathbb{a}_1, \cdots, \mathbb{a}_5$ と $\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_5$ の1次関係は全て同じもの
である.

具体的に B を計算すると.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbb{b}_1\ \mathbb{b}_2\ \mathbb{b}_3\ \mathbb{b}_4\ \mathbb{b}_5]$$

となる.

$$\mathbb{b}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbb{e}_1,\ \mathbb{b}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbb{e}_2,\ \mathbb{b}_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\0\end{bmatrix}=-\mathbb{b}_1+2\mathbb{b}_2,\ \mathbb{b}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\mathbb{e}_3$$

$$\mathbb{b}_5=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}=2\mathbb{b}_1-\mathbb{b}_2+\mathbb{b}_4$$

が成り立つから、$\mathbb{b}_1,\mathbb{b}_2,\mathbb{b}_4$は1次独立である。$\mathbb{b}_3,\mathbb{b}_5$は$\mathbb{b}_1,\mathbb{b}_2,\mathbb{b}_4$の1次結合で表される。
よって、$\mathbb{b}_1,\cdots,\mathbb{b}_5$の1次独立な最大個数は$r=3$である。

Aの列ベクトルについても同じ1次関係が成り立つので、$\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2,\mathbb{a}_4$は1次独立であり、
残りは$\mathbb{a}_3=-\mathbb{a}_1+2\mathbb{a}_2$，$\mathbb{a}_5=2\mathbb{a}_1-\mathbb{a}_2+\mathbb{a}_4$と1次結合で表される。
よって、$\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2,\cdots,\mathbb{a}_5$の1次独立な最大個数は、$r=3$となる。

$f_1,\cdots,f_5$についても同じ1次関係が成り立つので、f_1,f_2,f_4は1次独立である。
残りは$f_3=-f_1+2f_2$，$f_5=2f_1-f_2+f_4$と1次結合で表される。
よって、$f_1,\cdots,f_5$の1次独立な最大個数は$r=3$である。

图

§ ベクトル空間の基底

$\boxed{\text{定義}}$ (ベクトル空間の生成)

ベクトル空間Vの全てのベクトルが $u_1, \cdots, u_n$ の1次結合で表されるとき、ベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が<u>Vを生成する</u>という.

$\boxed{\text{例}}$ (ベクトル空間の生成の具体例)

$$\mathbb{R}^n \ni \forall a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

基本ベクトル $e_1, e_2, \cdots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ を生成する.

$\boxed{\text{定義}}$ (ベクトルの基底)

$V \supset \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$

(1) $u_1, u_2, \cdots, u_n$ は1次独立

(2) $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はVを生成する

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\{u_1, \cdots, u_n\}$ はVの<u>基</u> または <u>基底</u> (basis) という.

$\boxed{\text{例}}$ (ベクトルの基底の具体例)

$\mathbb{R}^n \supset \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 基本ベクトル

(1) $e_1, \cdots, e_n$ は1次独立

(2) $e_1, \cdots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ を生成

$\Rightarrow$ $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である.

$e_1, \cdots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の<u>標準基底</u>という.

注意 ベクトルの基底の取り方は一意ではない.

定理 (ベクトル空間の基底の個数の一意性)

ベクトル空間の基底の個数は,
基底の取り方によらず一定である.

(証明)

$V \ni u_1, \cdots, u_m$

$V \ni v_1, \cdots, v_n$

$u_1, \cdots, u_m$ と $v_1, \cdots, v_n$ が共に V の基底とする.

$v_1, \cdots, v_n$ は $u_1, \cdots, u_m$ の1次結合で書ける.

$n > m$ と仮定 $\Rightarrow$ $v_1, \cdots v_n$ は1次従属 $\Rightarrow$ $v_1, \cdots, v_n$ が基底であることと矛盾.

$\Rightarrow n \leq m$.

同様に, $u_1, \cdots, u_m$ は $v_1, \cdots v_n$ の1次結合で書ける.

$m > n$ と仮定 $\Rightarrow$ $\cdots$ $\Rightarrow m \leq n$

以上より, $n \leq m$, $n \geq m$ となり $n = m$ を得る.

すなわち基底の個数は一定.

㊧

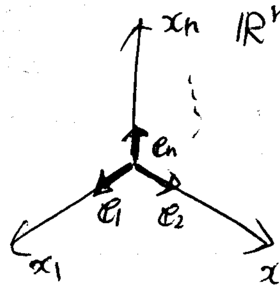
§ ベクトル空間の次元

定義 (ベクトル空間の次元)
ベクトル空間 V の基底の個数を V の次元(dimension)といい、
$\dim(V)$ と書き表す。特に K 上のベクトル空間 V の次元を
K 上の次元といい $\dim_K(V)$ と書く。

注意 零ベクトルのみからなるベクトル空間を零ベクトル空間といい、
次元は $\dim(V)=0$ とする。

定義 (有限次のベクトル空間)
ベクトル空間 V の次元 $\dim(V)$ が有限であるとき、
V を有限次のベクトル空間という。

例 (ベクトル空間の次元の具体例)
$\mathbb{R}^n \ni e_1, e_2, \cdots, e_n$ 標準基底
$\dim(V)=n$



$\mathbb{R}^n \ni x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$
$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 座標
$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 基底
[座標系の基本単位となる。

例 (ベクトル空間の次元の具体例)
$\mathbb{R}[x]_n \ni 1, x, x^2, \cdots, x^n$

(1) $1, x, x^2, \cdots, x^n$ は1次独立。
(2) $\mathbb{R}[x]_n \ni a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ より
$1, x, \cdots, x^n$ は $\mathbb{R}[x]_n$ を生成する。

$\Rightarrow$ $1, x, \cdots, x^n$ は $\mathbb{R}[x]_n$ の基底。

$\Rightarrow$ $\dim(\mathbb{R}[x]_n)=n+1$

$\boxed{\text{定理}}$ (ベクトル空間の次元と1次独立な最大個数)

ベクトル空間Vが有限次元である.

$\iff$ Vのベクトルの1次独立な最大個数が有限である.

このとき

$$\dim(V) = V\text{のベクトルの1次独立な最大個数}.$$

(証明)

$\dim(V)=n$ とする. $\Rightarrow$ n個の基底 $\Rightarrow$ 任意の$n+1$個以上のベクトルは1次従属.

n個の基底の1次結合で表されるので.

$\Rightarrow$ Vの1次独立な最大個数はnである

Vの1次独立な最大個数をnとする. $v_1, \dots, v_n$を1次独立とする.

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n, v$ は1次従属.

$\Rightarrow$ v は $v_1, \dots, v_n$ の1次結合で表せる.

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ は V の基底.

$\Rightarrow$ $\dim(V)=n$

$\boxed{\text{例}}$ (解空間の次元の具体例)

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

方程式を $Ax = 0$ とおく。

Aを簡約化すると、 $A \to B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ より

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - 3x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 - 2x_5 \end{array}\right.$$

$x_2 = c_1,\ x_4 = c_2,\ x_5 = c_3 \in \mathbb{R}$ とおく。

解は

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 - 3c_2 - c_3 \\ c_1 \\ c_2 - 2c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=a_1} + c_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=a_2} + c_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=a_3}$$

$$= c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 \in W.$$

解 x は a_1, a_2, a_3 の1次結合で表される。

a_1, a_2, a_3 が1次独立であるか調べる。

$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$ より

$$\left.\begin{array}{r} 2c_1 - 3c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{array}\right. \to \text{1次関係は自明なものに限る。}$$

よって、a_1, a_2, a_3 は1次独立である。

以上より W は a_1, a_2, a_3 により生成される。a_1, a_2, a_3 は W の基底である。

よって W の次元は

$$\dim(W) = 3 \quad \Leftarrow \text{任意定数の個数。}$$

となる。

$\boxed{\text{注意}}$ a_1, a_2, a_3 を方程式 $Ax = 0$ の<u>基本解</u>という。

$\boxed{\text{定理}}$（解空間の次元）

$$W = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0,\ A : m \times n \text{行列} \}$$

$$\dim(W) = n - \mathrm{rank}(A)$$

（証明）

方程式 $Ax = 0$ の解は，任意定数の個数は $n - \mathrm{rank}(A) =: n - r$ 個である.
よって解は，

$$x = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_{n-r} a_{n-r}$$
$$\forall c_1, \forall c_2, \cdots, \forall c_{n-r} \in \mathbb{R}$$

と表される．ここで $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r}$ は1次独立である．なぜなら

$$a_1 = \begin{bmatrix} * \\ 1 \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad a_{n-r} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$$

となるので $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r}$ の1次関係は

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_{n-r} a_{n-r} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_{n-r} = 0 \end{cases}$$

となり自明なものに限るからである．
以上より解空間 W は基底 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r}$ により生成されるベクトル空間である．
次元は

$$\dim(W) = \text{任意定数の個数} = n - \mathrm{rank}(A)$$

と得られる．

$\boxed{\text{定義}}$ (ベクトルの集合で生成される部分空間)

$V \ni u_1, u_2, \cdots, u_t$

$\langle u_1, u_2, \cdots, u_t \rangle_{\mathbb{R}} = W = \{c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_tu_t \mid c_i \in \mathbb{R}\}$

$\Longrightarrow V \supset W$　WはVの部分空間

$\langle u_1, u_2, \cdots, u_t \rangle_{\mathbb{R}}$ を $u_1, \cdots, u_t$ で生成されるVの部分空間という.

$\boxed{\text{定理}}$ (ベクトルの集合で生成される部分空間の次元)

$\dim(\langle u_1, \cdots, u_t \rangle_{\mathbb{R}}) = u_1, \cdots, u_t$ の1次独立な最大個数

$\boxed{\text{例}}$ (ベクトルの集合で生成される部分空間の次元の具体例)

$\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_1, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^3 \supset \langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\mathbb{R}}$

$A = [a_1\ a_2\ a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B = [b_1\ b_2\ b_3]$

$\begin{cases} a_1, a_2 \text{は1次独立} \\ a_3 = -5a_1 + 2a_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b_1 = e_1, b_2 = e_2 \\ b_3 = -5b_1 + 2b_2 \end{cases}$

a_1, a_2, a_3 の1次独立な最大個数は2個.

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \ni \forall x &= c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 \quad (\forall c_1, \forall c_2, \forall c_3 \in \mathbb{R}) \\ &= c_1a_1 + c_2a_2 + c_3(-5a_1 + 2a_2) \\ &= (c_1 - 5c_3)a_1 + (c_2 + 2c_3)a_2 \\ &= \tilde{c}_1 a_1 + \tilde{c}_2 a_2 \quad (\forall \tilde{c}_1, \forall \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

1次独立,基底.

$\Longrightarrow \dim(\langle a_1, a_2, a_3 \rangle) = 2$ //

$\boxed{\text{Z}}$

$\boxed{\text{定理}}$

$V \ni v_1, v_2, \cdots, v_n$

$\dim(V) = n$

(1) $v_1, v_2, \cdots, v_n$ はVの基底である

$\Longleftrightarrow$ (2) $v_1, v_2, \cdots, v_n$ は1次独立である

$\Longleftrightarrow$ (3) $v_1, v_2, \cdots, v_n$ はVを生成する

$\boxed{\text{例}}$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

$\mathbb{R}^3 \ni e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^3 \ni \forall x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$.

(1) e_1, e_2, e_3 は基底の組の1つ.

(2) e_1, e_2, e_3 は1次独立.

(3) e_1, e_2, e_3 は$\mathbb{R}^3$を生成する.

$\boxed{\text{例}}$

$\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3$

$\mathbb{R}[x]_2 \ni f_1 = x + x^2,\ f_2 = 1 - x^2,\ f_3 = x$.

$$(f_1, f_2, f_3) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix} = (1, x, x^2)A$$

$$\mathbb{R}[x]_2 \ni \forall f = a + bx + cx^2 = (1, x, x^2)\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = (1, x, x^2)\,\mathbf{a}.$$

$f = \tilde{a} f_1 + \tilde{b} f_2 + \tilde{c} f_3 = (f_1, f_2, f_3)\tilde{\mathbf{a}}$ とおくと

$$(1, x, x^2)\,\mathbf{a} = (f_1, f_2, f_3)\tilde{\mathbf{a}} = (1, x, x^2)A\tilde{\mathbf{a}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = A\tilde{\mathbf{a}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{a}} = A^{-1}\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+c\\a\\-a+b-c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{a}\\\tilde{b}\\\tilde{c}\end{bmatrix}$$

よって

$$\mathbb{R}[x]_2 \ni f = a + bx + cx^2 = (a+c)(x+x^2) + (a)(1-x^2) + (-a+b-c)(x) = \tilde{a}f_1 + \tilde{b}f_2 + \tilde{c}f_3$$

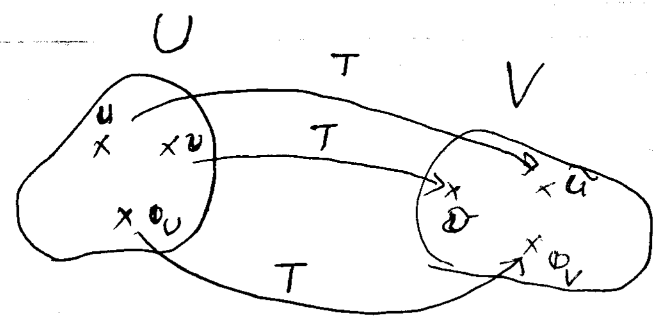
(1) f_1, f_2, f_3 は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底の組の1つ.

(2) f_1, f_2, f_3 は 1次独立である.

(3) f_1, f_2, f_3 は $\mathbb{R}[x]_2$ を生成する.

線形写像

§線形写像



定義 （線形写像）

U, V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする

T を U から V への写像とする．（$T: U \to V$）

次の条件(1),(2)をみたすとき写像 T を（$\mathbb{R}$ 上の）線形写像という．

または 1次写像（linear mapping）という．

(1) $T(u+v) = T(u) + T(v) \in V$

$(u, v \in U,\ T(u), T(v) \in V)$

(2) $T(cu) = cT(u) \in V$

$(u \in U,\ c \in \mathbb{R},\ T(u) \in V)$

注意 （線形写像における零ベクトル）

$0_U \in U,\ 0_V \in V,\ 0 \in \mathbb{R}$

$$T(0_U) = T(0 \cdot 0_U) = 0 \cdot T(0_U) = 0_V$$

より線形写像 T は 0_U を 0_V へ写す．

例 （線形写像の具体例）

関数 $y = f(x) = ax$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = ax$$

(1) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$f(x_1+x_2) = a(x_1+x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2) \in \mathbb{R}$

(2) $x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$

$f(cx) = a(cx) = c(ax) = cf(x) \in \mathbb{R}$

(1),(2)より写像 f は線形写像である．

例 （線形写像ではない具体例）

関数 $y = f(x) = ax + b$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = ax + b$$

(1) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$f(x_1+x_2) = a(x_1+x_2) + b = (ax_1+b) + (ax_2+b) - b$

$= f(x_1) + f(x_2) - b \neq f(x_1) + f(x_2)$

(2) $x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$

$f(cx) = a(cx) + b = c(ax+b) + b - cb$

$= cf(x) - b \neq cf(x)$

(1),(2)より写像 f は線形写像ではない。

例 （線形写像の具体例）

$u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$, A: $m \times n$ 行列

$v = Au = T_A(u)$

$$\begin{array}{cccc} T_A: & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \Psi & & \Psi \\ & u & \mapsto & v = Au \end{array}$$

(1) $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$

$\tilde{x} = Ax = T_A(x)$, $\tilde{y} = Ay = T_A(y)$

$T_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \tilde{x} + \tilde{y} = T_A(x) + T_A(y)$

(2) $x \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$

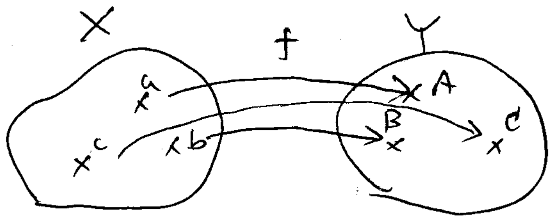
$\tilde{x} = Ax = T_A(x)$

$T_A(cx) = A(cx) = cAx = c\tilde{x} = cT_A(x)$

(1), (2) より写像 T_A は線形写像である。

定義 （写像）

集合 X, Y



Xの各元をYの各元に対応させる規則 f を写像 (mapping) という。

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \rightarrow & Y \\ & \Psi & & \Psi \\ & a & \mapsto & A = f(a) \end{array} \qquad X \xrightarrow{f} Y$$

$A = f(a)$
$B = f(b)$
$C = f(c)$
$\vdots$

写像 f を具体的な式で表したものを関数 (function) という。

特に集合 X と Y が同じ集合のときは、写像を変換 (transformation) という。

§ 線形写像の像と核

定義 (線形写像の像と核)

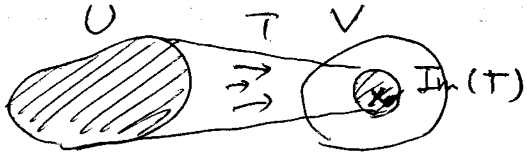
$T: U \to V$

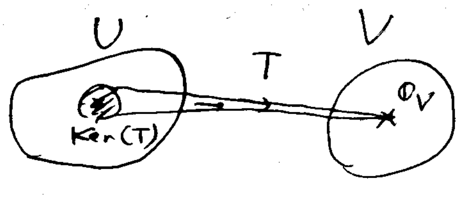
$Im(T) = \{v \mid v = T(u), \forall u \in U, v \in V\}$

$Ker(T) = \{u \mid T(u) = 0_V, u \in U\}$

集合 $Im(T)$ を T の像 (image) という

集合 $Ker(T)$ を T の核 (kernel) という





定理

$T: U \to V$

(1) $Im(T)$ は V の部分空間である.

(2) $Ker(T)$ は U の部分空間である.

(証明) (1) (i) $0_U \in U$, $T(0_U) = 0_V \Rightarrow 0_V \in Im(T)$

(ii) $u_1, u_2 \in U$, $v_1 = T(u_1)$, $v_2 = T(u_2) \in Im(T)$

$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2 \Rightarrow v_1 + v_2 \in Im(T)$

(iii) $u \in U$, $v = T(u) \in Im(T)$

$c \in \mathbb{R}$, $T(cu) = cT(u) = cv \Rightarrow cv \in Im(T)$

(i)〜(iii) より $Im(T)$ は V の部分空間となる.

(2) (i) $0_U \in U$, $T(0_U) = 0_V \Rightarrow 0_U \in Ker(T)$

(ii) $u_1, u_2 \in Ker(T)$ より $T(u_1) = 0_V$, $T(u_2) = 0_V$

$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0_V + 0_V = 0_V \Rightarrow u_1 + u_2 \in Ker(T)$

(iii) $u \in Ker(T)$ より $T(u) = 0_V$

$c \in R$, $T(cu) = cT(u) = c \cdot 0_V = 0_V \Rightarrow cu \in Ker(T)$

(i)〜(iii) より $Ker(T)$ は U の部分空間となる.

終

§ 線形写像の階数と退化次数

$\mathrm{Ker}(T)$ と $\mathrm{Im}(T)$ の次数を考える.

$\mathrm{Ker}(T_A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \} =$ 方程式 $Ax=0$ の解空間

$\dim(\mathrm{Ker}(T_A)) = \dim(Ax=0$ の解空間$) = Ax=0$ の解の任意定数の個数

$= n - \mathrm{rank}(A) =: \mathrm{null}(T_A)$

$\mathrm{Im}(T_A) = \{ y = Ax \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \}$

$A = [a_1\ a_2 \cdots a_n]$ とおく.

$y = Ax = [a_1 \cdots a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$, $\forall x_j \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(T_A) = \langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle_{\mathbb{R}}$

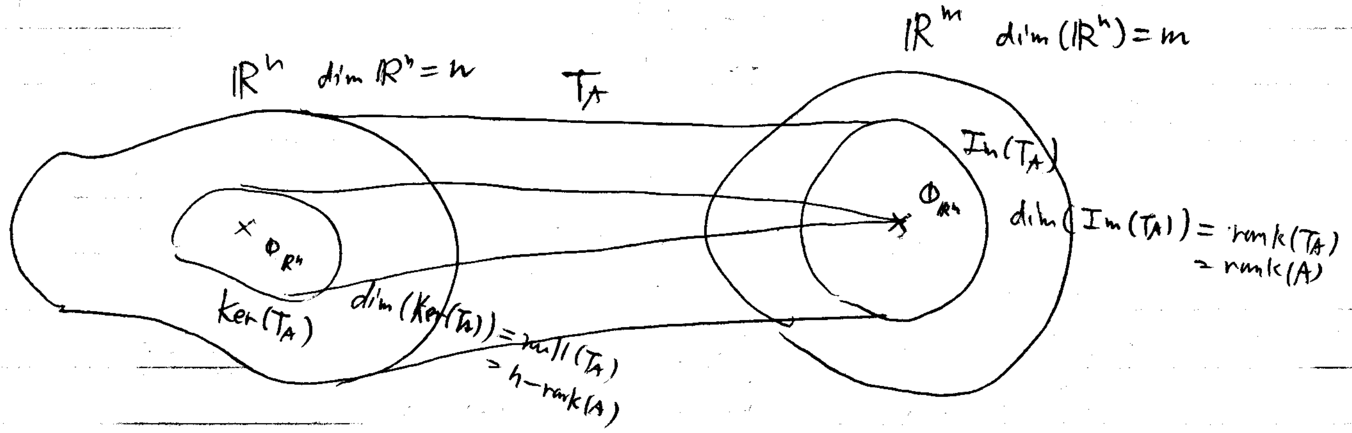
$\dim(\mathrm{Im}(T_A)) = \dim \langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle_{\mathbb{R}} = a_1 \cdots a_n$ の1次独立なベクトルの最大個数

$= \mathrm{rank}(A) =: \mathrm{rank}(T_A)$

T_A の<u>退化次数</u> $\mathrm{null}(T_A) \overset{\mathrm{def}}{=} n - \mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Ker}(T_A))$

T_A の<u>階数</u> $\mathrm{rank}(T_A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Im}(T_A))$

$\Rightarrow \mathrm{null}(T_A) + \mathrm{rank}(T_A) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$



一般的に

定義 (線形写像の階数と退化次数)

$T: U \to V$

Tの<u>階数</u>を $\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ とする.

Tの<u>退化次数</u>を $\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$ とする.

定理 (階数と退化次数の関係)

$$\mathrm{null}(T) + \mathrm{rank}(T) = \dim(U)$$

$T: U \to V$

(証明)

$r = \mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$

$s = \mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$

$\mathrm{Ker}(T) \supset \{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ 基底

$\mathrm{Im}(T) \supset \{v_1, v_2, \cdots v_s\}$ 基底

$U \supset \{u_{r+1}, \cdots, u_{r+s}\}$ ただし $T(u_{r+1}) = v_1, \cdots, T(u_{r+s}) = v_s$ とする.

$r+s$ 個のベクトル $u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_{r+s}$ が U の基底となることを示す。

このとき $\dim(U) = r+s = \mathrm{null}(T) + \mathrm{rank}(T)$ が成り立つ.

まず, $u_1 \sim u_r, u_{r+1}, \cdots u_{r+s}$ が U を生成することを示す.

$U \ni {}^\forall u$ に対して $T(u) \in \mathrm{Im}(T)$ より

$T(u) = b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s \quad (b_j \in \mathbb{R})$

と書ける. これより

$$T(u - b_1 u_{r+1} - \cdots - b_s u_{r+s}) = T(u) - (b_1 T(u_{r+1}) + \cdots + b_s T(u_{r+s}))$$

$$= (b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s) - (b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s) = 0_V$$

$\Rightarrow u - b_1 u_{r+1} - \cdots - b_s u_{r+s} \in \mathrm{Ker}(T)$

$\Rightarrow u - b_1 u_{r+1} - \cdots - b_s u_{r+s} = a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r \quad (a_j \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow u = a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r + b_1 u_{r+1} + \cdots + b_s u_{r+s}$

よって, $u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_{r+s}$ は U を生成する.

次に、$u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_{r+s}$ が1次独立であることを示す。
一次関係

$$a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r + b_1 u_{r+1} + \cdots + b_s u_{r+s} = 0_U$$

に対して T をほどこすと

$$a_1 T(u_1) + \cdots + a_r T(u_r) + b_1 T(u_{r+1}) + \cdots + b_s T(u_{r+s}) = 0_V$$

$$a_1 0_V + \cdots + a_r 0_V + b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s = 0_V$$

$$b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s = 0_V$$

となる。$v_1, \cdots, v_s$ は1次独立なので $b_1 = 0, \cdots, b_s = 0$ となる。これより

$$a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r = 0$$

を得る。$u_1, \cdots, u_r$ は1次独立であるから $a_1 = 0, \cdots, a_r = 0$ となる。
よって $u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_s$ は1次独立である。

例 (線形写像の像と核の具体例)

$$T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3 \qquad y = Ax = T(x)$$

$$x \mapsto y = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [a_1\ a_2 \cdots a_5]$$

$Ker(T)$, $Im(T)$ の基底と次元 $null(T)$, $rank(T)$ を求める.

簡約化

$$A \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_1\ b_2 \cdots b_5]$$

a_1, a_2 : 1次独立
$\begin{cases} a_3 = a_1 + a_2 \\ a_4 = 2a_1 - a_2 \\ a_5 = a_1 + 2a_2 \end{cases}$ $\longleftrightarrow$ $\begin{cases} b_1, b_2 : 1次独立 \\ b_3 = b_1 + b_2,\ b_4 = 2b_1 - b_2,\ b_5 = b_1 + 2b_2 \end{cases}$

$rank(A) = 2$.

$Ax = 0$ の解は $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - 2x_4 - x_5 \\ -x_3 + x_4 - 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \quad (\forall c_j \in \mathbb{R})$

$$Ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\dim(Ker(T)) = \dim \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{R}} = 5 - rank(A) = 5 - 2 = 3 = null(T)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^5$ に対して

$\mathbb{R}^3 \ni y = Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_5 a_5 \quad (\forall x_j \in \mathbb{R})$

$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3(a_1 + a_2) + x_4(2a_1 - a_2) + x_5(a_1 + 2a_2)$

$= (x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5) a_1 + (x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5) a_2$

$= c_1 a_1 + c_2 a_2 \quad (\forall c_j \in \mathbb{R})$

$$Im(T) = \{y = Ax \mid \forall x \in \mathbb{R}^5\} = \langle a_1, a_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\dim(Im(T)) = \dim \langle a_1, a_2 \rangle_T = rank(A) = 2 = rank(T).$$

以上より $Ker(T)$ の基底の組の一つは u_1, u_2, u_3 であり次元は $null(T) = 3$ となる.
$Im(T)$ の基底の組の一つは a_1, a_2 であり次元は $rank(A) = 2$ となる.

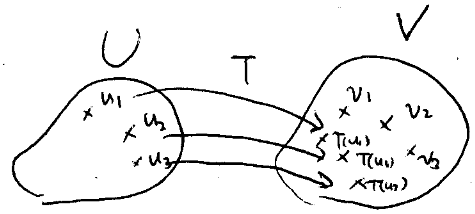
§ 線形写像の表現行列

定義 (線形写像の表現行列)

$T : U \to V$

U の基底 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$

V の基底 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$



$$(T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)) = (v_1, v_2, \cdots, v_m)A \quad (A : m \times n \text{ 行列})$$

A を U の基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ と V の基底 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ に関する<u>表現行列</u>という.

例 (表現行列の具体列)

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad y = T(x) = Ax$$

$$x \longmapsto y = Ax$$

$$\mathbb{R}^2 \ni e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdots \text{標準基底}$$

$$\mathbb{R}^3 \ni e_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ e_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ e_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{標準基底}$$

$$T(e_1) = Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2e_1' + e_2' + 4e_3'$$

$$T(e_2) = Ae_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = e_1' + 3e_3'$$

$$(T(e_1), T(e_2)) = (2e_1' + e_2' + 4e_3', \ e_1' + 3e_3') = (e_1', e_2', e_3')\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= (e_1', e_2', e_3')\underbrace{A}_{\text{表現行列}}$$

注意 $T = T_A$ において<u>標準基底</u>をとれば、表現行列は A と一致する.

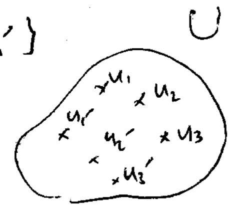
§ 表現行列と基底の変換行列

定義 （基底の変換行列）

U の2つの基底の組 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $\{u_1', \cdots, u_n'\}$

$$(u_1', \cdots, u_n') = (u_1, \cdots, u_n)P$$

行列 P を基底の変換行列という.



注意

$u_1, \cdots, u_n$ と $u_1', \cdots, u_n'$ は1次独立であるから P は正則行列となる.

定理 （基底を取りかえたときの変換行列）

$T : U \to V$

U の基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}, \{u_1', \cdots, u_n'\}$ $\quad (u_1', \cdots, u_n') = (u_1, \cdots, u_n)P$

V の基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}, \{v_1', \cdots, v_n'\}$ $\quad (v_1', \cdots, v_n') = (v_1, \cdots, v_m)Q$

$$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (v_1, \cdots, v_m)A$$

$$(T(u_1'), \cdots, T(u_n')) = (v_1', \cdots, v_m')B$$

$$\Rightarrow \quad B = Q^{-1}AP$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "P"] & U' \\
V \arrow[u, "A"] \arrow[r, "Q"'] \arrow[ur, phantom, "Q^{-1}AP"] & V' \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}$$

（証明）

$$(T(u_1'), \cdots, T(u_n')) = \left(T\left(\sum_k p_{k1}u_k\right), \cdots, T\left(\sum_k p_{kn}u_k\right)\right)$$

$$= \left(\sum_k p_{k1}T(u_k), \cdots, \sum_k p_{kn}T(u_k)\right)$$

$$= (T(u_1), \cdots, T(u_n))P$$

$$= (v_1, \cdots, v_m)AP$$

$$(T(u_1'), \cdots, T(u_n')) = (v_1', \cdots, v_m')B = (v_1, \cdots, v_m)QB$$

これらより $\quad (v_1, \cdots, v_m)AP = (v_1, \cdots, v_m)QB$

$$\Rightarrow \quad AP = QB$$

$$\Rightarrow \quad B = Q^{-1}AP$$

$\boxed{例}$ (基底を取り換えたときの変換行列の具体例)

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

$\quad\ \ \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^3$の基底 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^2$の基底 $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

T の $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ に関する表現行列 B を求める.

$\mathbb{R}^3$の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$
$\mathbb{R}^2$ 〃 $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$ $\Rightarrow$ $(T(\boldsymbol{e}_1), T(\boldsymbol{e}_2), T(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')A$

基底の変換 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\} \to \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = (2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)$$
$$= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)P$$

$P = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$

基底の変換 $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\} \to \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$

$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1' + 3\boldsymbol{e}_2'$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_2', 2\boldsymbol{e}_1' + 3\boldsymbol{e}_2') = (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')Q \quad \cdots \quad Q = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2]$$

$$(T(\boldsymbol{a}_1), T(\boldsymbol{a}_2), T(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)B = (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')QB$$
$$(T(\boldsymbol{a}_1), T(\boldsymbol{a}_2), T(\boldsymbol{a}_3)) = (T(\boldsymbol{e}_1), T(\boldsymbol{e}_2), T(\boldsymbol{e}_3))P = (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')AP$$
$$\Rightarrow QB = AP \quad \Rightarrow B = Q^{-1}AP$$

よって $\quad B = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 7 \\ -5 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ //

§ 線形変換

$\boxed{\text{定義}}$ （線形変換）

$T : U \to U$

T を<u>線形変換</u>という。

$\boxed{\text{定理}}$ （線形変換の表現行列の基底の取り換え）

U の基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$, $\{u_1', \cdots, u_n'\}$

$$(u_1', \cdots, u_n') = (u_1, \cdots, u_n) P$$

$T : U \to U$

$$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (u_1, \cdots, u_n) A$$

$$(T(u_1'), \cdots, T(u_n')) = (u_1', \cdots, u_n') B$$

$$\Rightarrow \quad B = P^{-1} A P$$

（証明） 前定理より明らか。 ⑧

$\boxed{\text{例}}$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ $y = T(x) = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$x \mapsto y = Ax$ $\quad$ $\mathbb{R}^2$ の基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(T(u_1), T(u_2)) = (u_1, u_2) B$ をみたす B をもとめる。

$$(T(e_1), T(e_2)) = (e_1, e_2) A$$

$$(u_1, u_2) = (e_1, e_2) P, \quad P = [u_1 \ u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad //$$

$\boxed{例}$

$$T: \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2 \qquad g(x) = T(f(x)) = f'(x)x + f(1)\,x^2 + f(1)$$
$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ f(x) & \mapsto & g(x) \end{array}$$

基底 $\{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}$ に関する表現行列は？

基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列 A を求める

$$(T(1), T(x), T(x^2)) = (1, x, x^2)A = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} T(1) = (1)'x + (1)(1)x^2 + (1)(1) = 1 + x^2 \\ T(x) = (x)'x + (x)(1)x^2 + (x)(1) = 1 + x \\ T(x^2) = (x^2)'x + (x^2)(1)x^2 + (x^2)(1) = 1 + 2x^2 \end{cases}$$

基底 $\{1, x, x^2\} \to \{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}$

$$(1+x,\ x+x^2,\ x^2) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1, x, x^2)P$$

基底 $\{1+x,\ x+x^2,\ x^2\}$ に関する表現行列 B を求める

$$(T(1+x), T(x+x^2), T(x^2)) = (1+x,\ x+x^2,\ x^2)B$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad //$$

§ 固有値と固有ベクトル

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \Psi & & \Psi \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{y} \end{array}$$

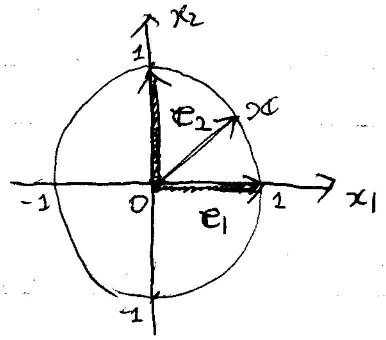
$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ のとき $\mathbf{y} = T(\mathbf{e}_1) = A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\mathbf{e}_1$

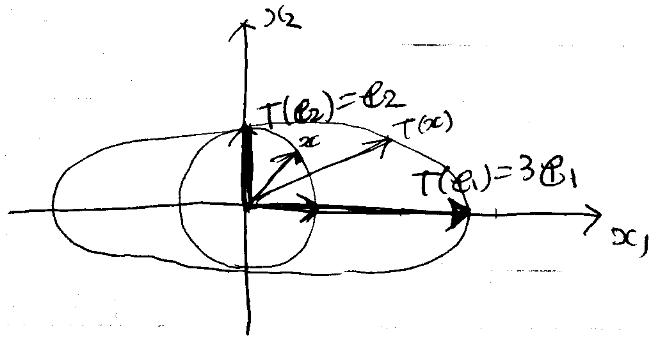
$\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$ のとき $\mathbf{y} = T(\mathbf{e}_2) = A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2$

$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 \xrightarrow{T} 3\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \xrightarrow{T} \mathbf{e}_2 \end{array}\right\}$ 線形変換 T により $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は自分自身のスカラー倍に写される.

$\mathbb{R}^2 \ni \forall \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ のとき

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 \\ &= x_1(3\mathbf{e}_1) + x_2(\mathbf{e}_2) = (3x_1)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$





$\boxed{\text{定義}}$ (固有値, 固有ベクトル)

V : ベクトル空間
$T : V \to V$

$$T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u} \quad (\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R})$$

をみたす λ を T の固有値 (eigen value) という.
$\mathbf{u}$ を固有値 λ に属する T の固有ベクトル (eigen vector) という.

$\boxed{\text{注意}}$

$T(\mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0}$ は線形変換 T によって, 必ず自分自身のスカラー倍に写される. $\mathbf{0}$ は固有ベクトルと定義しない.

$\boxed{\text{例}}$ (固有値, 固有ベクトルの具体例)

$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} T(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 \\ T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 \end{array}\right\}$ より　T の固有値は $\lambda = 3$ と $\lambda = 1$ である.
固有値 $\lambda = 3$ に属する固有ベクトルは $\mathbf{e}_1$ である.
固有値 $\lambda = 1$ に 〃 $\mathbf{e}_2$ である.

$\boxed{\text{例}}$ (固有値, 固有ベクトルの具体例)

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \qquad \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと.

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\mathbf{u}. \Rightarrow T(\mathbf{u}) = 4\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

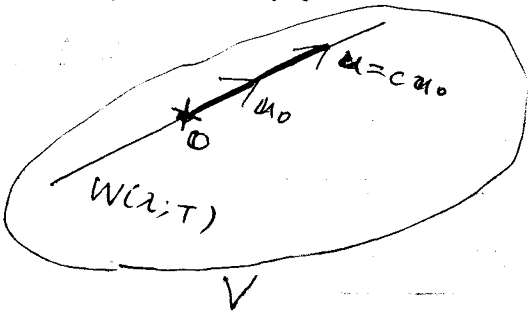
$\Rightarrow$ $\lambda = 4$ は固有値
$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda = 4$ に属する T の固有ベクトル

§ 固有空間

u_0 を固有値 λ に属する固有ベクトルとする $\Rightarrow T(u_0)=\lambda u_0$

このとき $u=cu_0$ もまた λ に属する固有ベクトルとなる．ただし $c\neq 0$ とする.

$\because$ $T(u)=T(cu_0)=cT(u_0)=c(\lambda u_0)=\lambda(cu_0)=\lambda u \Rightarrow T(u)=\lambda u$



$\boxed{\text{定義}}$ (固有空間)

$T: V\to V$

λ : T の固有値

$$W(\lambda;T)=\{u\in V \mid T(u)=\lambda u\}$$

$W(\lambda;T)$ を T の固有値 λ の固有空間 (eigen space) という.

(注) 0 を除外していないことに注意.

$\boxed{\text{定理}}$

$W(\lambda;T)$ は V の部分空間である.

(証明)

(i) $V\ni 0,\ T(0)=\lambda 0=0 \Rightarrow 0\in W(\lambda;T)$

(ii) $u,v\in W(\lambda;T)$ のとき　$T(u)=\lambda u,\ T(v)=\lambda v$.

$T(u+v)=T(u)+T(v)=\lambda u+\lambda v=\lambda(u+v) \Rightarrow u+v\in W(\lambda;T)$

(iii) $u\in W(\lambda;T)$ のとき $T(u)=\lambda u$.

$c\in R,\ T(cu)=cT(u)=c(\lambda u)=\lambda(cu) \Rightarrow cu\in W(\lambda;T)$

$\boxed{\text{注意}}$

0 以外の $u\in W(\lambda;T)$ は T の固有ベクトルである.

§ 行列の固有値

$$\begin{array}{cccc} T_A : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longmapsto & y \end{array} \qquad y = T_A(x) = Ax$$

固有値 : λ
固有ベクトル : u

$$T(u) = \lambda u$$

T_A の固有値 λ を求める.
$T_A(x) = Ax = \lambda x$ より $Ax = \lambda x = \lambda E x$
$\Rightarrow (\lambda E - A)x = 0$

同次方程式の解で自明な解 $x = 0$ 以外の解が固有ベクトル u となる.

非自明な解 $\Leftrightarrow$ 任意定数を含む解
$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\lambda E - A) < n$
$\Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0$

よって $(\lambda E - A)x = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0$.
方程式 $g_A(t) = \det(\lambda E - A) = 0$ の根が固有値 λ となる.

$\boxed{\text{定義}}$ (固有多項式)
A : 正方行列.

$$g_A(t) = \det(tE - A)$$

行列 A の固有多項式という.

$\boxed{\text{定義}}$ (行列の固有値)
A の固有多項式 $g_A(t)$ の根を.
(複素数も含めて)
行列 A の固有値という.

$\boxed{\text{定理}}$

λ が T_A の固有値 $\Leftrightarrow g_A(\lambda) = 0$.

例

$$A=\begin{bmatrix}7&-6\\3&-2\end{bmatrix}$$

$$g_A(t)=\det(tE-A)=\det\left(\begin{bmatrix}t&0\\0&t\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&-6\\3&-2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}t-7&6\\-3&t+2\end{vmatrix}=(t-7)(t+2)-6\times(-3)=t^2-5t-14+18$$

$$=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$$

$g_A(\lambda)=0$ より $\lambda=1,4$.

よって Aの固有値は $\lambda=1,\lambda=4$ である。 答

例

$$A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$g_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t&1\\-1&t\end{vmatrix}=t^2+1=0 \Rightarrow t=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

Aの固有値は $\lambda=i,\lambda=-i$ である.

$T_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ のとき, T_Aの固有値は存在しない.

$T_A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ のとき, T_Aの固有値は $\lambda=\sqrt{-1}$, $\lambda=-\sqrt{-1}$ である.

例

$$A=\begin{bmatrix}8&-10\\5&-7\end{bmatrix}$$

$T_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$T_A(u)=\lambda u$, $\lambda=?$, $u=?$

$W(\lambda;T_A)=?$

$$g_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t-8&10\\-5&t+10\end{vmatrix}=t^2-t-6=(t-3)(t+2)$$

$g_A(\lambda)=0$ より固有値は $\lambda=-2,3$ である.

$\underline{\lambda=-2 \text{ のとき}}$ $(\lambda E-A)x=0$ より $(-2E-A)x=0$ をみたす x を求める.

$$-2E-A=\begin{bmatrix}-2-8 & 10\\ -5 & -2+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 10\\ -5 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$x_1-x_2=0 \rightarrow x_1=x_2$ より

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\quad(\forall c\in\mathbb{R})$$

よって $\lambda=-2$ についての固有ベクトルは $u=c\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ $(0\neq\forall c\in\mathbb{R})$ である.

固有空間は $W(-2;T_A)=\left\{u=c\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\ \middle|\ \forall c\in\mathbb{R}\right\}$ である.

$\underline{\lambda=3 \text{ のとき}}$

$(\lambda E-A)x=0$ より $(3E-A)x=0$ をみたす解を求める.

$$3E-A=\begin{bmatrix}-5 & 10\\ -5 & 10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad(\text{簡約化})$$

$x_1-2x_2=0 \rightarrow x_1=2x_2$ より

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_2\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c\\ c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\quad(\forall c\in\mathbb{R})$$

よって $\lambda=3$ についての固有ベクトルは $u=c\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ $(0\neq\forall c\in\mathbb{R})$ である.

固有空間は $W(3;T_A)=\left\{u=c\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\ \middle|\ \forall c\in\mathbb{R}\right\}$ である.

(注意) $\dim W(-2;T_A)=1$, $\dim(3;T_A)=1$, $\dim\mathbb{R}^2=2$

$\dim W(-2;T_A)+\dim(3;T_A)=\dim\mathbb{R}^2$

$\boxed{定義}$ （行列の多項式）

$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ：多項式

A：正方行列

$\Rightarrow f(A) \overset{\text{def}}{=} a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$.

$\boxed{定理}$ （ケーレー・ハミルトンの定理）

$g_A(x)$ ：Aの固有多項式

$\Rightarrow g_A(A) = O$

$\boxed{例}$ （ケーレー・ハミルトンの定理の使用例）

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

$g_A(x) = \det(xE - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 3 & x+4 \end{vmatrix} = x^2 + 3x + 2$.

$g_A(A) = A^2 + 3A + 2E = O$ より

$A^2 = -3A - 2E$

$A^3 = AA^2 = A(-3A-2E) = -3A^2 - 2A = -3(-3A-2E) - 2A = 7A + 6E$

$A^4 = A \cdot A^3 = \cdots = -15A - 14E$.

多項式 $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$ のとき $f(A)$ をもとめる.

$f(A) = A^4 + 2A^3 + A^2 + E$

$= (-15A - 14E) + 2(7A + 6E) + (-3A - 2E) + E$

$= -4A - 3E$

$= -4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$ //

§ 一般の線形変換の固有値と固有空間の計算

$\boxed{\text{定義}}$ (固有多項式)

$T: V \to V$ 線形変換

$V \ni u_1, u_2, \cdots, u_n$ 基底

$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = A(u_1, \cdots, u_n)$

$\Rightarrow$ Aの固有多項式 $g_A(x)$ を Tの固有多項式 といい $g_T(x)$ と書く。

$\boxed{\text{定理}}$ (固有多項式は基底の取り方に依らない)

Tの固有多項式 $g_T(x)$ は基底の取り方に依らない。

(証明)

基底をとりかえて表現行列が A から B とかわるとする。

このとき $B = P^{-1}AP$ が成り立つ。

$$g_B(x) = \det(xE - B) = \det(xE - P^{-1}AP) = \det(xP^{-1}EP - P^{-1}AP)$$
$$= \det(P^{-1}(xE - A)P)$$
$$= \det(P^{-1})\det(xE - A)\det(P)$$
$$= \det(P^{-1})\det(P)\det(xE - A)$$
$$= \frac{1}{\cancel{\det(P)}}\cancel{\det(P)}\det(xE - A)$$
$$= \det(xE - A)$$
$$= g_A(x) \quad //$$

$\boxed{\S}$

定理 (線形変換の固有値)

λ は T の固有値 $\Leftrightarrow$ $g_T(\lambda)=0$

(証明)

($\Rightarrow$) $u_1,\cdots,u_n$：基底，λ：固有値，u：固有ベクトル

$u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_nu_n=(u_1,\cdots,u_n)\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=(u_1\cdots u_n)\mathbf{c}$ とおく.

$$T(u)=T(c_1u_1+\cdots+c_nu_n)=c_1T(u_1)+\cdots+c_nT(u_n)$$
$$=(T(u_1),\cdots,T(u_n))\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=(T(u_1),\cdots,T(u_n))\mathbf{c}$$
$$=(u_1,\cdots,u_n)A\mathbf{c}$$

$$T(u)=\lambda u$$
$$=\lambda(c_1u_1+\cdots+c_nu_n)=\lambda(u_1,\cdots,u_n)\mathbf{c}=(u_1,\cdots,u_n)(\lambda\mathbf{c})$$

$\Rightarrow$ $(u_1,\cdots,u_n)A\mathbf{c}=(u_1,\cdots,u_n)(\lambda\mathbf{c})$ $\Rightarrow$ $A\mathbf{c}=\lambda\mathbf{c}$ //

$\Rightarrow$ $\mathbf{c}$ は λ に関する A の固有値 $\Rightarrow$ $g_T(\lambda)=g_A(\lambda)=0$.

($\Leftarrow$). $g_T(\lambda)=0$ $\Rightarrow$ $g_A(\lambda)=0$ $\Rightarrow$ $A\mathbf{c}=\lambda\mathbf{c}$ ($\mathbf{c}\neq 0$)

$\mathbf{c}$ を用いて $u=(u_1,\cdots,u_n)\mathbf{c}=c_1u_1+\cdots+c_nu_n$ とおく.

$$T(u)=T(c_1u_1+\cdots+c_nu_n)=(T(u_1),\cdots,T(u_n))\mathbf{c}=(u_1,\cdots,u_n)A\mathbf{c}=(u_1,\cdots,u_n)\lambda\mathbf{c}$$
$$=\lambda(u_1,\cdots,u_n)\mathbf{c}=\lambda u.$$

$\Rightarrow$ $T(u)=\lambda u$ $\Rightarrow$ u は λ に関する固有ベクトル. //

終

例（固有値の計算例）

$$T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2 \qquad g(x) = T(f(x)) = f(1+2x)$$
$$f(x) \mapsto g(x)$$

Tの固有値，固有空間を求める．

基底として $\{1, x, x^2\}$ を選ぶ．（何でもよい．）

$$T(1) = 1,\ T(x) = 1+2x,\ T(x^2) = (1+2x)^2 = 1+4x+4x^2$$

より．

$$(T(1), T(x), T(x^2)) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (1, x, x^2) A$$

と表せる．固有多項式は

$$g_T(\lambda) = g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

となる．$g_T(\lambda) = 0$ より T の固有値は

$$\lambda = 1, 2, 4$$

である．$T(f(x)) = \lambda f(x)$ をみたす固有ベクトル $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ をもとめる．

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (1, x, x^2)\, a$$

$$T(f(x)) = T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 T(1) + a_1 T(x) + a_2 T(x^2)$$
$$= (T(1), T(x), T(x^2))\, a = (1, x, x^2) A a.$$

より．$Aa = \lambda a$ が成立する．a をもとめる．

よって．それぞれの固有値に対して方程式 $(\lambda E - A)x = 0$ を解く．

$\lambda = 4$ のとき

$$4E - A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{よって} \left.\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ \forall x_3 \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

A の $\lambda = 4$ に属する固有ベクトル $a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 2c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(0 \neq \forall c \in \mathbb{R})$

よって 固有空間 $T(4; T) = \{c(1+2x+x^2) \mid \forall c \in \mathbb{R}\}$ を得る．

$\underline{\lambda=2}$ のとき

$$2E-A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&-4\\0&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$ より $\left.\begin{array}{r}x_1-x_2=0\\x_3=0\\x_2={}^\forall c\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$

Aの$\underset{\underset{2}{\shortparallel}}{\lambda}$に属する固有ベクトルは $a=\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $(0\neq{}^\forall c\in\mathbb{R})$

よって固有空間 $W(2;T)=\{c(1+x)\mid{}^\forall c\in\mathbb{R}\}$ を得る.

$\underline{\lambda=1}$ のとき

$$E-A=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&-1&-4\\0&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$ より $\left.\begin{array}{r}x_2=0\\x_3=0\\x_1={}^\forall c\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$

Aの$\lambda=1$に属する固有ベクトルは $a=\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $(0\neq{}^\forall c\in\mathbb{R})$

よって固有空間 $W(1;T)=\{c\mid{}^\forall c\in\mathbb{R}\}$ を得る.

終.

例 $A=\begin{bmatrix}5&6&0\\-1&0&0\\1&2&2\end{bmatrix}$, $g_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t-5&-6&0\\1&t&0\\-1&-2&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-3)$

$g_A(\lambda)=0$ より固有値は $\lambda=2$ (重根), $\lambda=3$ である.

$\lambda=3$ のとき $\lambda E-A=3E-A=\begin{bmatrix}-2&-6&0\\1&3&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$W(3;T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}\middle|\ {}^\forall c\in\mathbb{R}\right\}$$

$\lambda=2$ のとき $\lambda E-A=2E-A=\begin{bmatrix}3&6&0\\1&+2&0\\1&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$W(2;T)=\left\{c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\ {}^\forall c_1,{}^\forall c_2\in\mathbb{R}\right\}$$

(注) $\dim W(3;T_A)=1$, $\dim W(2;T_A)=2$, $\dim\mathbb{R}^3=3$

$$\dim W(3;T_A)+\dim W(2;T)=\dim\mathbb{R}^3$$

§ 行列の対角化

定義 (同値・相似)

A, B : 正方行列.

A と B とが 同値 (equivalent) または 相似 (similar) である.

$\Longleftrightarrow$ $B = P^{-1}AP$ をみたす正則行列 P が存在する.

変換 $A \mapsto B$ を 同値変換 (equivalence transformation) または 相似変換 (similarity transformation) という.

注意

A と B との固有値は同じ. ∵ A と B は基底の変換

定義

A : 正方行列

D : 対角行列. $D = \begin{bmatrix} d_{11} & & O \\ & d_{22} \ddots & \\ O & & d_{nn} \end{bmatrix}$

行列 A を相似変換して対角行列 D で表すことを A の 対角化 という。すなわち

$$D = P^{-1}AP$$

をみたす D, P をだめることをいう.

D, P の成分が実数のとき, A は実数体上で対角化されるという.

D, P 〃 複数のとき, A は複素数体上で 〃 .

注意

正方行列 A は常に対角化できるとは限らない.

注意

A と D の固有値は同じである.

D の固有値は $g_D(x) = \det(xE - D) = \begin{vmatrix} x-d_{11} & & O \\ & x-d_{22} \ddots & \\ O & & x-d_{nn} \end{vmatrix} = (x-d_{11})(x-d_{22}) \times \cdots \times (x-d_{nn})$

より $\lambda_1 = d_{11}, \lambda_2 = d_{22}, \lambda_3 = d_{33}, \ldots, \lambda_n = d_{nn}$ が D とA の固有値である.

よって $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$ となる.

Aの固有値を$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$とする.(重複する固有値は別のものと考える.)
$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$に属する固有ベクトルをそれぞれ$p_1, p_2, \cdots, p_n$とする.
このとき

$$A p_1 = \lambda_1 p_1,\ A p_2 = \lambda_2 p_2,\ \cdots,\ A p_n = \lambda_n p_n$$

である.

$$[A p_1\ A p_2 \cdots A p_n] = A[p_1\ p_2 \cdots p_n] = AP$$

ただし $P = [p_1\ p_2 \cdots p_n]$ とおく.

$$[A p_1\ A p_2 \cdots A p_n] = [\lambda_1 p_1\ \lambda_2 p_2 \cdots \lambda_n p_n] = [p_1\ p_2 \cdots p_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$= PD$$

ただし $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ とおく.

より $PD = AP$ が成立する.
$p_1, p_2 \cdots, p_n$が1次独立であると仮定するとPは正則行列である.
P^{-1}を左からかけて

$$\underbrace{P^{-1}P}D = P^{-1}AP \rightarrow ED = P^{-1}AP \rightarrow D = P^{-1}AP$$
$$\Rightarrow D = P^{-1}AP$$

を得る.

$\boxed{\text{定理}}$ (対角化)

A:n次正方行列.
Aの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$; それぞれの固有ベクトル $p_1, p_2 \cdots p_n$.

$p_1, p_2 \cdots, p_n$が一次独立 $\Rightarrow D = P^{-1}AP$

ただし $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix}$
$P = [p_1\ p_2 \cdots p_n]$

例 (対角化の計算例)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-8 & 10 \\ -5 & \lambda+7 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3)$$

$g_A(\lambda)=0$ より固有値は $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$ である.

$\lambda=\lambda_1=-2$ のとき

$$-2E-A = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より解は $x = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\forall c \in \mathbb{R})$

固有空間 $W(-2;T_A) = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \forall c \in \mathbb{R} \right\}$, $\dim W(-2;T_A)=1$

$\lambda_1=-2$ に属する固有ベクトルとして $W(-2;T_A)$ の基底をとり $p_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W(-2;T_A)$ とする.

$\lambda=\lambda_2=3$ のとき

$$3E-A = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より解は $x = c\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\forall c \in \mathbb{R})$

固有空間 $W(3;T_A) = \left\{ c\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \forall c \in \mathbb{R} \right\}$, $\dim W(3;T_A)=1$

$\lambda_2=3$ に属する固有ベクトルとして $W(3;T_A)$ の基底をとり $p_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in W(3;T_A)$ とする.

これらより

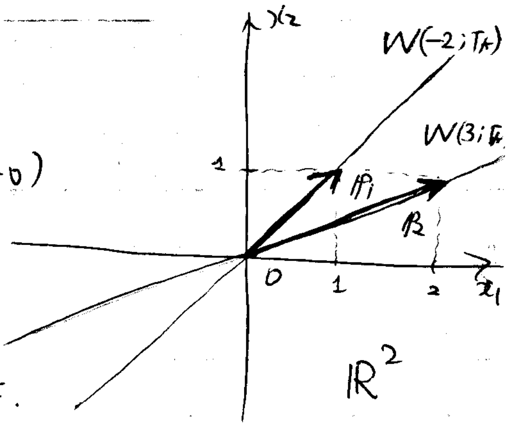
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = [\,p_1 \ \ p_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく. P は正則行列であるから ($\because \det P = -1 \neq 0$)

$$D = P^{-1}AP$$

を得る.



問 $D=P^{-1}AP$ が成立することを値を代入して確認せよ.

例 (対角化の応用例)

A が対角化可能であるとする。
$D = P^{-1}AP$ が成り立つ。このとき

$$D = P^{-1}AP \to PDP^{-1} = \underline{PP^{-1}}A\underline{PP^{-1}} \to PDP^{-1} = EAE \to PDP^{-1} = A$$

$$\Rightarrow A = PDP^{-1}$$

を得る。これより A^k を求める。

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \\ &= PD\underline{P^{-1}P}D\underline{P^{-1}}\cdots\underline{P}DP^{-1} \\ &= PDEDE\cdots EDP^{-1} \\ &= P\underbrace{DD\cdots D}_{k}P^{-1} = PD^kP^{-1}. \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

よって

$$A^k = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1}$$

を得る。

$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ のとき、$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$、$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$、$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(-2)^k + 2\cdot 3^k & 2(-2)^k - 2\cdot 3^k \\ -(-2)^k + 3^k & 2(-2)^k - 3^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A^k は、微分方程式、差分方程式の解法に用いる。

例 (対角化の具体例)

$$A=\begin{bmatrix}5&6&0\\-1&0&0\\1&2&2\end{bmatrix}$$

$$g_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t-5&-6&0\\1&t&0\\-1&-2&t-2\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t-5&-6\\1&t\end{vmatrix}$$

$$=(t-2)(t^2-5t+6)=(t-2)^2(t-3)$$

$g_A(\lambda)=0$ より固有値は $\lambda=2$ (重複)(2重), $\lambda=3$ である.

$\lambda=2$ のとき

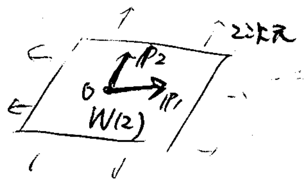
$$2E-A=\begin{bmatrix}3&6&0\\1&2&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ より

解は $$x=\begin{bmatrix}-2c_1\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad(\forall c_1,\forall c_2\in\mathbb{R}).$$

固有空間は $$W(2;T_A)=\left\{c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\ \middle|\ \forall c_1,\forall c_2\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\dim W(2;T_A)=2$ である. $W(2;T_A)$ より 1次独立な $\lambda=2$ に属する固有ベクトルを2つ取り出す. $W(2;T_A)$ の基底として

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\in W(2;T_A)$$



とする.

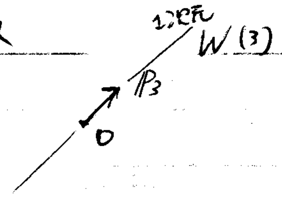
$\lambda=3$ のとき

$$3E-A=\begin{bmatrix}-2&-6&0\\1&3&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$ より解は $$x=c\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}\quad(\forall c\in\mathbb{R}).$$

固有空間は $W(3;T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}\ \middle|\ \forall c\in\mathbb{R}\right\}$, $\dim W(3;T_A)=1$.

$\lambda=3$ に属する固有ベクトルとして, $W(3;T_A)$ の基底として

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}\in W(3;T_A)$$



とおく.

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$ とおくと、これらに固有値に属する固有ベクトルは、それぞれ

$$\mathbb{p}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbb{p}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbb{p}_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$$

である。$\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \mathbb{p}_3$ は 1次独立 である。

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$P=[\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3]=\begin{bmatrix}-2&0&3\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

とおくと、Pは正則なので

$$D = P^{-1} A P$$

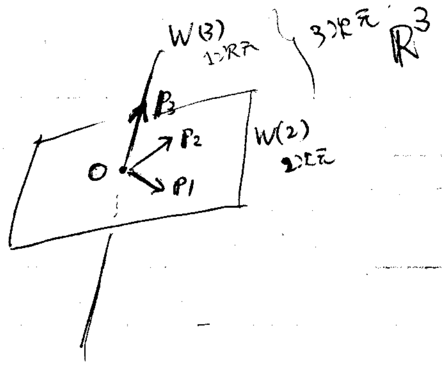
と対角化される。

$\boxed{\text{注}}$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ のとり方の順には自由度がある。固有ベクトルのとり方にも(スカラー倍等の)自由度がある。
よって D, P は一通りに定まる訳ではない。

$\boxed{\text{注}}$

$$\dim W(2;T_A) + \dim W(3;T_A) = \dim \mathbb{R}^3$$
$$2 + 1 = 3$$

が成立する。



例 (対角化できない具体例)

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&-1&0\\1&2&0\end{bmatrix}$$

$$g_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t-1&-3&-2\\0&t+1&0\\-1&-2&t\end{vmatrix}=(t+1)^2(t-2)$$

$g_A(\lambda)=0$ より固有値は $\lambda=2,\ \lambda=-1$ (2重)

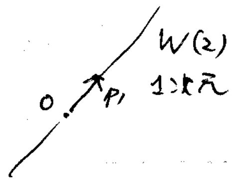
$\lambda=2$ のとき

$$2E-A=\begin{bmatrix}1&-3&-2\\0&3&0\\-1&-2&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ より解は $x=c\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ $(\forall c\in\mathbb{R})$.

固有空間は $W(2;T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\ \forall c\in\mathbb{R}\right\}$, $\dim W(2;T_A)=1$.

$\lambda=2$ に属する固有ベクトルを一つ取り出すと

$$\mathbb{P}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\in W(2;T_A)$$



である.

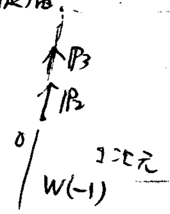
$\lambda=-1$ のとき

$$-E-A=\begin{bmatrix}-2&-3&-2\\0&0&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ より解は $x=c\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $(\forall c\in\mathbb{R})$.

固有空間は $W(-1;T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\middle|\ \forall c\in\mathbb{R}\right\}$, $\dim W(-1;T_A)=1$.

固有値 $\lambda=-1$ は実際は2個あるので, 固有ベクトルを2つ用意する必要がある. しかし. $W(-1;T_A)$ からは1次独立なベクトルを2つ取り出すことはできない.

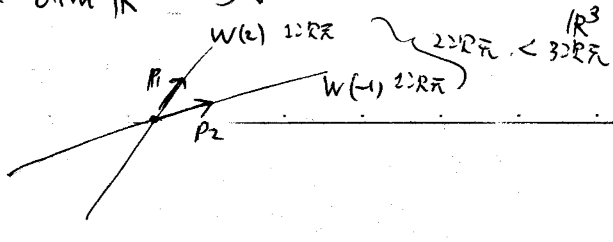
$$W(-1;T_A)\ni\mathbb{P}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbb{P}_3=\alpha\,\mathbb{P}_2 \quad\to\ \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3 \text{ は1次従属.}$$



となる. よって A は対角化できない.

注 $W(-1;T_A)+W(2;T_A)=1+1=2<\dim\mathbb{R}^3=3$.

このとき対角化はできない.



$\boxed{\text{注意}}$ (複素数体上の対角化)

複素数体上の対角化の場合でも同様に対角化できる.

$T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$g_A(\lambda_i) = 0$ より固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ に属する固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \cdots, \mathbb{p}_n \in \mathbb{C}^n$

のとき $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \cdots, \mathbb{p}_n$ が1次独立であれば,

$$D = P^{-1}AP,$$

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$P = [\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2 \cdots \mathbb{p}_n]$$

と対角化できる.

$\boxed{\text{まとめ}}$ (対角化)

n 次正方行列 : A

A の固有値 : $\overbrace{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n}^{n\text{個}}$, (重複は別のものとして)

$\underbrace{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots \bar{\lambda}_r}_{r\text{個} \leq n\text{個}}$ (重複は同じものとして)

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトル : $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \cdots, \mathbb{p}_n$

(1) $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \cdots, \mathbb{p}_n$ が1次独立のとき.

すなわち $\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\bar{\lambda}_i; T_A)) = n$ のとき.

(a) 固有値 λ_i が全て実数のとき, 実数体上で対角化可能である.

(b) 固有値 λ_i の中に複素数が含まれるとき.

(i) 複素数体上で対角化可能である.

(ii) 実数体上では対角化不可能である.

$\longrightarrow$ 実標準形に分解.

(2) $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \cdots, \mathbb{p}_n$ が1次従属のとき.

すなわち $\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\bar{\lambda}_i; T_A)) < n$ のとき.

対角化不可能である.

$\longrightarrow$ ジョルダン標準形に分解.

注意

A が対角化可能なとき

$D = P^{-1}AP$,

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad P = [\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \cdots, \mathbb{p}_n]$$

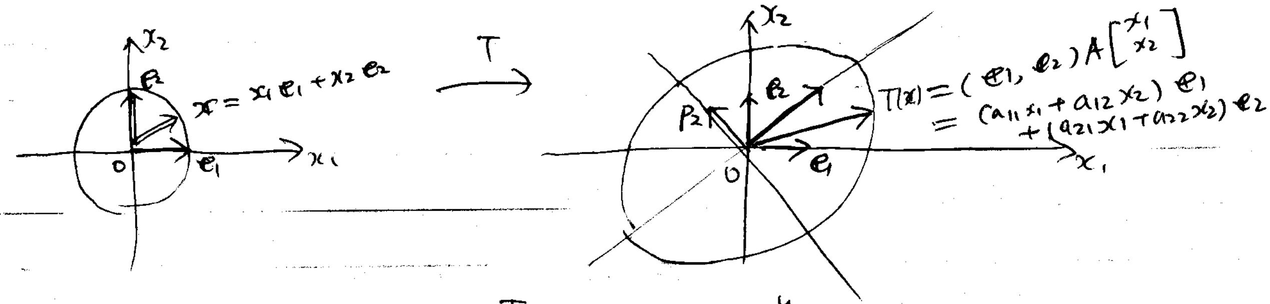
$(T(\mathbb{e}_1), \cdots T(\mathbb{e}_n)) = (\mathbb{e}_1, \cdots \mathbb{e}_n)A$

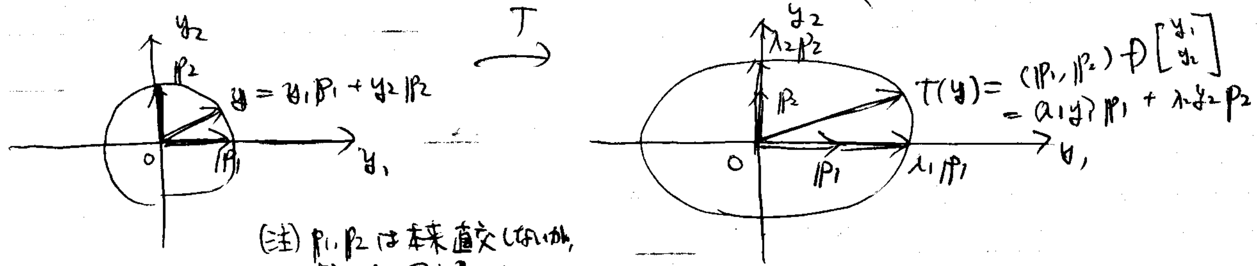
$(T(\mathbb{p}_1), \cdots T(\mathbb{p}_n)) = (\mathbb{p}_1, \cdots, \mathbb{p}_n)D$

$D = P^{-1}AP$ に着目すると……

線形変換 T の基底 $\{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \cdots, \mathbb{e}_n\}$ における表現行列を A とする。

基底変換して基底を $\{\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \cdots, \mathbb{p}_n\}$ に取り換えると表現行列は D である。





(注) $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2$ は本来直交しないが、
直交させて図を書くと
写像の性質がみやすくなる

位置ベクトル $\mathbb{x} = x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2$　　座標系 $\{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$　座標 (x_1, x_2)

$\Updownarrow$ $\mathbb{x} = \mathbb{y}$　基底のとりかえのみ

$\mathbb{y} = y_1\mathbb{p}_1 + y_2\mathbb{p}_2$　　座標系 $\{\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2\}$　座標 (y_1, y_2)

$\mathbb{x} = \mathbb{y}$ を T で写したときの位置ベクトル $T(\mathbb{x}) = T(\mathbb{y})$ は

$$T(\mathbb{x}) = T(x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2) = x_1T(\mathbb{e}_1) + x_2T(\mathbb{e}_2) = (T(\mathbb{e}_1), T(\mathbb{e}_2))\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\mathbb{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\mathbb{e}_2$$

座標系 $\{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$　座標 $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$

$T(\mathbb{x}) = T(\mathbb{y})$ $\Updownarrow$

$$T(\mathbb{y}) = T(y_1\mathbb{p}_1 + y_2\mathbb{p}_2) = y_1T(\mathbb{p}_1) + y_2T(\mathbb{p}_2) = (T(\mathbb{p}_1), T(\mathbb{p}_2))\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2)D\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda_1 y_1)\mathbb{p}_1 + (\lambda_2 y_2)\mathbb{p}_2$$

座標系 $\{\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2\}$　座標 $(\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2)$

内積空間

§ 内積

$\boxed{\text{定義}}$ (標準的な内積)

スカラーとみなす

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{a}, \mathbf{b} \qquad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{a}\,\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ の標準的な内積

$$\mathbb{C}^n \ni \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

スカラーとみなす

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{a}\,\overline{\mathbf{b}} = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \cdots + a_n \overline{b_n} = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}$$

$\mathbb{C}^n$ の標準的な内積

(注) $\mathbb{C} \ni \alpha + i\beta$, $\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$

$\mathbb{R} \ni \alpha, \beta$　　複素共役

$\boxed{\text{定義}}$ (内積)

V : $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

$V \ni u, v$

$\mathbb{R} \ni (u, v)$

(1) $(u + u', v) = (u, v) + (u', v)$

(2) $(cu, v) = c(u, v)$, $c \in \mathbb{R}$

(3) $(v, u) = (u, v)$

(4) $u \neq 0 \Rightarrow (u, u) > 0$

V : $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間

$V \ni u, v$

$\mathbb{C} \ni (u, v)$

(1)

(2) $(cu, v) = c(u, v)$, $c \in \mathbb{C}$

(3) $(v, u) = \overline{(u, v)}$

(4) $u \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R} \ni (u, u) > 0$

演算 $(\cdot, \cdot)$ を<u>内積</u> (<u>inner product</u>) という。

内積をもつベクトル空間を<u>内積空間</u> (<u>inner product space</u>) という。

$\boxed{\text{問}}$ 標準的な内積が上の性質(1)~(4) をみたすことを示せ。

$\boxed{例}$ （内積の具体例）

$C(a,b)$ ：区間 (a,b) で連続な関数の全体 $\Rightarrow$ $C(a,b)$ はベクトル空間である．

$C(a,b) \ni f(x), g(x)$

内積 $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ $\Rightarrow$ 性質(i)〜(iv)をみたす．(f,g) は内積である．
$C(a,b)$ は内積空間である．

$\boxed{問}$ これを示せ．

§ ベクトルのノルム

$\boxed{定義}$ （ノルム）

V：内積空間

$V \ni u$

$$\|u\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(u,u)}$$

u の<u>ノルム</u>（<u>norm</u>）または<u>長さ</u>という．

（注）$(u,u) \geq 0$ であることに注意．

$\boxed{注意}$

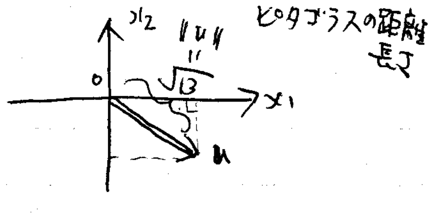
∘ $\|u\| \geq 0$

∘ $\|u\| = 0 \iff u = 0$

$\boxed{例}$

$$\mathbb{R}^2 \ni u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

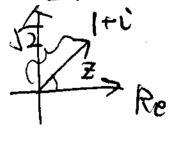
$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{3\times 3 + (-2)\times(-2)} = \sqrt{13}$$



$\mathbb{C} \ni z = 1+i$

$$(z,z) = z\bar{z} = (1+i)\overline{(1+i)} = (1+i)(1-i) = 1-i^2 = 1+1 = 2 > 0$$

$$\|z\| = \sqrt{(z,z)} = \sqrt{2}$$



$$\mathbb{C}^2 \ni z = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{bmatrix},\quad (z,z) = (1+i)\overline{(1+i)} + (2-3i)\overline{(2-3i)} = (1^2+1^2)+(2^2+3^2) = 15 > 0$$

$$\|z\| = \sqrt{(z,z)} = \sqrt{15}$$

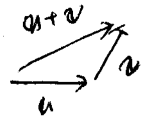
定理

V：実内積空間

(1) $\|cu\| = |c|\|u\|$

(2) $|(u,v)| \le \|u\|\|v\|$ （シュバルツの不等式）

(3) $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ （三角不等式）

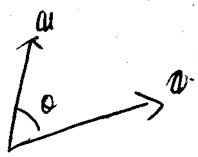


注

実内積空間 R^n において，

$|(u,v)| \le \|u\|\|v\|$ より，

$$-1 \le \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} \le 1$$ となる．



$$\cos\theta = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$$ とおく．

θ を u, v のなす角という．

§ ベクトルの直交

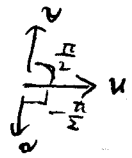
定義 (ベクトルの直交)

V : 内積空間

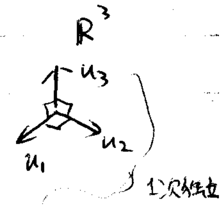
$$(u, v) = 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} u \text{ と } v \text{ は直交する}$$

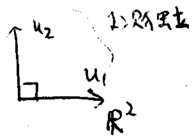
注意 $\mathbb{R}^n$ において $(u, v) = 0$ であれば

$$\cos\theta = \frac{(u, v)}{\|u\|\|v\|} = 0 \text{ より } \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$



定理





0 でない $u_1, u_2, \cdots, u_r$ が互いに直交

$\Rightarrow u_1, u_2, \cdots, u_r$ は1次独立

(証明) $\begin{cases} (u_i, u_j) = 0 & \text{for } i \neq j \\ (u_i, u_i) \neq 0 \end{cases}$

$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_r u_r = 0$ を考える.

$i = 1, 2, \cdots, r$ に対してそれぞれ

$$(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_r u_r, u_i) = (0, u_i)$$

$$c_1 \underbrace{(u_1, u_i)}_{0} + c_2 \underbrace{(u_2, u_i)}_{0} + \cdots + c_i \underbrace{(u_i, u_i)}_{\neq 0} + \cdots + c_r \underbrace{(u_r, u_i)}_{0} = 0$$

$$c_i (u_i, u_i) = 0$$

$$\Rightarrow c_i = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \cdots, r.$$

以上より $u_1, u_2, \cdots, u_r$ は1次独立である.

§ 正規直交基底

定義

$V \ni u_1, u_2, \cdots, u_n$ 基底

(1) $\|u_i\| = 1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 正規基底 (normal basis)

(2) $(u_i, u_i) \neq 1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

$(u_i, u_j) = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n)$ 直交規底 (orthogonal basis)

(3) $(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

$(1 \leq i \leq j \leq n)$ 正規直交規底 (orthonormal basis)

例

$\mathbb{R}^n \ni e_1, e_2, \cdots, e_n$ 標準基底は正規直交規底である。

∵ $\|e_i\| = \sqrt{(e_i, e_i)} = \sqrt{0+0+\cdots+1\times1+0+\cdots 0} = 1$ ← 正規性

$(e_i, e_j) = \left({\scriptstyle i}\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ 1 \\ \end{bmatrix}{\scriptstyle j} \right) = 0\times0+\cdots+1\times0+\cdots+0\times1+\cdots 0\times0 = 0.$

↑
直交性

例

$\mathbb{R}^2 \ni u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ は正規直交規底である。

∵ $\left.\begin{array}{l} \|u_1\| = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 \\ \|u_2\| = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1. \end{array}\right\}$ 正規性

$(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ← 直交性

定義

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

$\langle a_1, \cdots, a_n \rangle_{\mathbb{R}} = \{ x = c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n \mid \forall c_i \in \mathbb{R} \}$

ベクトル空間をかえずに基底を $v_1, \cdots, v_n$ から $u_1, \cdots, u_n$ へ取り換える。

$u_1, \cdots, u_n$ から正規基底となるように取り換えることを正規化 (normalize) という。

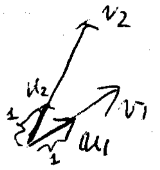
〃 直交基底 〃 直交化 (orthogonalize) という

〃 正規直交基底 〃 正規直交化 (orthonormalize) という

定理

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \quad \cdots, \quad u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \quad \text{正規化.}$$



(証明) $(u_i, u_i) = \left(\frac{v_i}{\|v_i\|}, \cdots \right) = \frac{(v_i, v_i)}{\|v_i\| \|v_i\|} = \frac{\|v_i\|^2}{\|v_i\|^2} = 1.$

定理 (グラム・シュミットの直交化法)

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

次の式より正規直交基底 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が得られる。

$$v_1' = v_1, \qquad u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|}$$

$$v_2' = v_2 - (v_2, u_1) u_1, \qquad u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$$

$$v_3' = v_3 - (v_3, u_2) u_2 - (v_3, u_1) u_1, \qquad u_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|}$$

$$v_4' = v_4 - (v_4, u_3) u_3 - (v_4, u_2) u_2 - (v_4, u_1) u_1, \qquad u_4 = \frac{v_4'}{\|v_4'\|}$$

$$\vdots$$

$$v_n' = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n, u_i) u_i, \qquad u_n = \frac{v_n'}{\|v_n'\|}$$

(証明)

$$(u_1, u_1) = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right) = \frac{1}{\|v_1\|^2} (v_1, v_1) = \frac{\|v_1\|^2}{\|v_1\|^2} = 1.$$

$$(u_1, u_2) = \left(u_1, \frac{1}{\|v_2'\|} (v_2 - (v_2, u_1) u_1) \right) = \frac{1}{\|v_2'\|} \left((u_1, v_2) - (v_2, u_1) \underbrace{(u_1, u_1)}_{1} \right) = 0.$$

以下同様

例

$\mathbb{R}^3 \ni v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$ を正規直交化する。

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} /\!/$$

$$v_2' = v_2 - (v_2, u_1)u_1 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} /\!/$$

$$v_3' = v_3 - (v_3, u_2)u_2 - (v_3, u_1)u_1$$

$$= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - \frac{-2-1+1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2-1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}12-4-3\\-6+4-3\\6+4\ \ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5\\-5\\10\end{bmatrix} = \frac{5}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

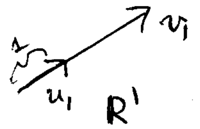
$$u_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \left(\frac{25(1+1+4)}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{5}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} /\!/$$

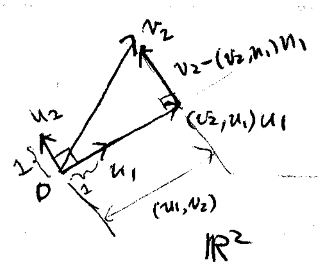
以上より　$\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle_{\mathbb{R}}$

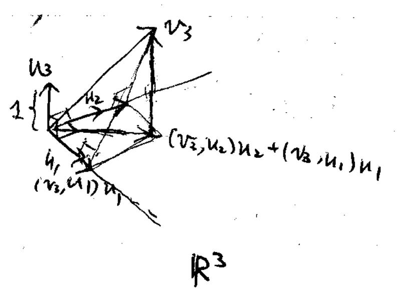
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$(u_i, v_j) = \delta_{ij}$$

が成り立つ。







§ 直交変換

定理

$V \ni u_1, \cdots, u_n$ 正規直交規底
$V \ni {}^\forall u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$, ${}^\forall v = b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n$

$$\Rightarrow (u, v) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

(証明)

$$(u, v) = \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i, \sum_{j=1}^n b_j u_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j (u_i, u_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} \leftarrow i=j \text{ のときのみ } 1$$
$$= \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

∎

定義

$T: V \to V$ 線形変換
$(T(u), T(v)) = (u, v) \quad \forall u, v \in V$

$\Leftrightarrow$ T は<u>直交変換</u>(<u>orthogonal transformation</u>)である.

定理

T: 直交変換
$V \ni u_1, \cdots, u_n$ 正規直交基底

$\Leftrightarrow$ $T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)$ は正規直交基底

(証明)

$(\Rightarrow)$ $(T(u_i), T(u_j)) = (u_i, u_j) = \delta_{ij}$

例

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

$T(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2$, $T(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$

$T: \underset{\text{正規直交}}{\{e_1, e_2\}} \to \underset{\text{正規直交}}{\{e_2, e_1\}}$

$\mathbb{R}^2 \ni e_1, e_2$ 基底

$\mathbb{R}^2 \ni {}^\forall a = a_1 e_1 + a_2 e_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^2 \ni {}^\forall b = b_1 e_1 + b_2 e_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$T(a) = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$, $T(b) = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$

$(T(a), T(b)) = a_2 b_2 + a_1 b_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a, b)$

$\Rightarrow$ Tは直交変換

§ 直交行列

定義 (直交行列)

P : n次正方行列

${}^tPP = E \iff P$は直交行列(orthogonal matrix)である.

注意

(1) Pは正則である. $\because$ ${}^tPP = E \Rightarrow \det({}^tPP) = \det(E) \Rightarrow \det({}^tP) \times \det(P) = 1$

$\Rightarrow (\det(P))^2 = 1 \Rightarrow \det P = \pm 1 \neq 0$ //

(2) $P^{-1} = {}^tP$ $\quad\because$ ${}^tPP = E \Rightarrow {}^tPPP^{-1} = EP^{-1} \Rightarrow {}^tP = P^{-1}$ //

例

直交行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = R(\theta)$

$\because$ ${}^tR(\theta)R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ //

定理

$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad T_A(x) = Ax.$

A が直交行列 $\Leftrightarrow$ T_A が直交変換

(証明) $T_A(e_j) = Ae_j = a_j$ より $T_A : \{e_1, \cdots, e_n\} \to \{a_1, \cdots, a_n\}$ である。$a_1, \cdots, a_n$ が正規直交基底であれば T_A は直交変換であることを示す。

定理

$A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$

A は直交行列 $\Leftrightarrow$ $a_1, \cdots, a_n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

(証明)

$${}^tAA = E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} {}^ta_1 \\ {}^ta_2 \\ \vdots \\ {}^ta_n \end{bmatrix} [a_1 \cdots a_n] = E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} {}^ta_1a_1 & {}^ta_1a_2 & \cdots & {}^ta_1a_n \\ {}^ta_2a_1 & {}^ta_2a_2 & \cdots & {}^ta_2a_n \\ \vdots & & & \\ {}^ta_na_1 & {}^ta_na_2 & \cdots & {}^ta_na_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}^ta_ia_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow (a_i, a_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow a_1, \cdots, a_n \text{ は正規直交基底}$$

例

グラム・シュミットの直交化法で正規直交化したベクトル $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ より

$$P = [u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$ は直交行列である。

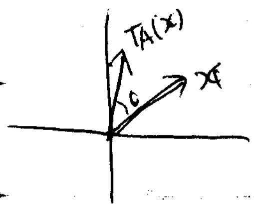
$\because \ {}^tPP = E \Leftrightarrow (u_i, u_j) = \delta_{ij}$

例

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

(1) x と $T_A(x)$ との成す角は θ である。
(2) x と $T_A(x)$ の長さは等しい。

問 これを示せ。

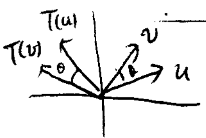


A を $\mathbb{R}^2$ の回転行列という。

注 任意の 2×2 型直交行列は回転行列で表される。

例

T：直交変換 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$　u, v の成す角と $T(u), T(v)$ の成す角は等しい。



§ 対称行列の対角化

正方行列は $A = P^{-1} D P$ と対角化される。

Pは正則行列で $P = [\mathbb{P}_1\ \mathbb{P}_2 \cdots \mathbb{P}_n]$ と表される。

$\mathbb{P}_1 \cdots \mathbb{P}_n$ は 固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ の固有ベクトルである。

実対称行列 A を直交行列 P で対角化する。

すなわち、$\mathbb{P}_1 \cdots \mathbb{P}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底にとる。

$\mathbb{R}^n$の標準的な内積を変えない。→ 直交座標系 ユークリッド空間との対応がみやすい。

定義

${}^tA = A$ をみたす行列を対称行列 (symetric matrix) という

注意

対称行列は $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ と表される。

定義

複素行列 $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$

$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} [\overline{a_{ij}}]$ 共役行列

注意

$\mathbb{C} \ni \alpha = a + i\beta \quad (i = \sqrt{-1}\ ;\ a, b \in \mathbb{R})$

$\overline{\alpha} \overset{\text{def}}{=} a - i\beta$

$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$, $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

$\mathbb{R} \ni |\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \sqrt{a^2 + \beta^2} \geq 0$.

絶対値 (absolute value)

$\overline{\alpha} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$

$\overline{\alpha} = -\alpha \iff \alpha$は純虚数

定理

実対称行列の固有値は全て実数である.

(証明)

$$\left(\begin{array}{l} x, y \in \mathbb{C}^n \text{ のとき } (x, y) \overset{\text{def}}{=} {}^t x \overline{y}. \quad (\alpha x, y) = \alpha(x, y). \quad (x, y) = \overline{(y, x)}. \\ \mathbb{R} \ni \|x\|^2 = (x, x) = {}^t x \overline{x} = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \cdots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \geq 0 \end{array} \right)$$

$\left. \begin{array}{l} Ax = \lambda x \\ x \neq 0 \end{array} \right\}$ とする. $(\lambda x, x) = \lambda (x, x) = \lambda \|x\|^2$.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$ とする. $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\lambda x, x) = \overline{(x, \lambda x)} = \overline{(x, Ax)} = \overline{{}^t x\,(\overline{Ax})} = \overline{{}^t x\,(\underset{\substack{\shortparallel \\ A}}{\overline{A}}\,\overline{x})} = \overline{{}^t x\ A \overline{x}}$$

$$= \overline{{}^t(\underset{\substack{\shortparallel \\ A}}{{}^t A}\, x)\, \overline{x}} = \overline{{}^t(Ax)\,\overline{x}} = \overline{{}^t(\lambda x)\,\overline{x}} = \overline{\lambda\, {}^t x\, \overline{x}}$$

$$= \overline{\lambda}\ \overline{({}^t x\, \overline{x})} = \overline{\lambda}\ \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{R}}}{\overline{\|x\|^2}} = \overline{\lambda}\ \|x\|^2$$

よって $\lambda \|x\|^2 = \overline{\lambda} \|x\|^2$ となる. $x \neq 0$ のとき $\|x\|^2 > 0$ より.

$\lambda = \overline{\lambda}$ である. よって λ は実数である. 図.

注意

実対称行列の固有値は実数なので. 固有ベクトルは実ベクトルとなる.

例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ 実対称行列.}$$

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)(t-1).$$

$g_A(\lambda) = 0$ より固有値は $\lambda = 1, -3 \in \mathbb{R}$ となる. 図.

定理

実対称行列の互いに異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

(証明) A: 実対称行列. ($^tA=A$)

$Au=\lambda u$, $Av=\mu v$, $\lambda\neq\mu$ とする. ($u, v\in\mathbb{R}^n$; $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$)

$$\lambda(u,v) = (\lambda u, v) = (Au, v) = {}^t(Au)v = {}^tu\,{}^tAv = (u, {}^tAv) = (u, Av)$$
$$= (u, \mu v) = \mu(u,v)$$

$\Rightarrow$ $(\lambda-\mu)(u,v)=0$ $\Rightarrow$ $\lambda\neq\mu$ なので $(u,v)=0$. $\Rightarrow$ u と v は直交する。

3

定理

実対称行列 A は

$$A = P^{-1}DP$$

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}p_1 & \cdots & p_n\end{bmatrix} \leftarrow \text{直交行列}\ (p_i, p_j)=\delta_{ij}$$

と対角化できる。

例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ 実対称行列.

固有多項式 $g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+4)$

$g_A(\lambda)=0$ より 固有値は $\lambda = 2$ (2回), -4 である.

固有空間は

$$2E-A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-4E-A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より

$$W(2; A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W(-4; A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \forall c_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

となる. 基底をえらぶ.

$W(2) \ni v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 基底　　　$\dim W(2) = 2$

$W(-4) \ni v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 基底　　　$\dim W(-4) = 1$

とおく　v_1, v_2, v_3 は1次独立であるから $\underset{3次元}{\mathbb{R}^3} = \underset{2次元}{W(2)} + \underset{1次元}{W(-4)}$ と表される. よってAは対角化可能である.

$(v_1, v_3) = 0$, $(v_2, v_3) = 0$, $(v_1, v_2) = -2 \neq 0$

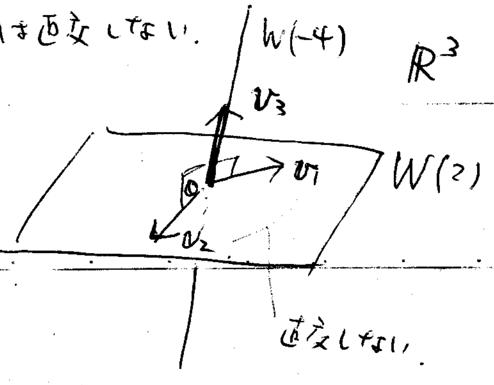
より v_1 と v_3 は直交, v_2 と v_3 は直交, v_1 と v_2 は直交しない.

$W(2)$ と $W(-4)$ は直交する.

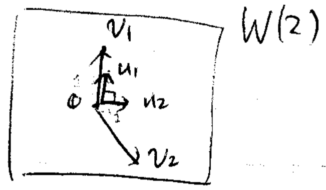
$\mathbb{R}^3 \ni \forall x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$

$\parallel$　v_1, v_2, v_3 は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底とはならない.

$W(2) \oplus W(-4)$



W(2) の基底として正規直交な基底 u_1, u_2 をえらぶ.



v_1, v_2 をグラム・シュミットの直交化法で正規直交化する

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+0}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - (v_2, u_1)u_1$$

$$= \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{-2+0+0}{\sqrt5\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\frac{1}{5}\sqrt{1+4+25}}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}$$

よって W(2) の正規直交基底として

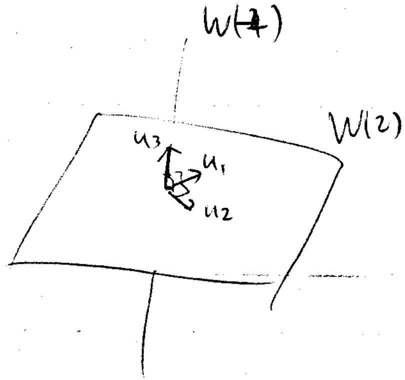
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}$$

($u_i, u_j = \delta_{ij}$ をみたす)

を得る. v_3 を正規化して W(-4) の正規直交規定

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

を得る. これらより



$$W(2)\oplus W(-4) = \mathbb{R}^3 \ni \forall x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$$

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

をみたすので u_1, u_2, u_3 は $\mathbb{R}^3$ の正規直交規定である.

以上より

$$A = P^{-1}DP$$

$$D = \begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -4\end{bmatrix},\quad P = [u_1\ u_2\ u_3] = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

と, 直交行列 P により対角化された

§ ベクトル空間の和

定義

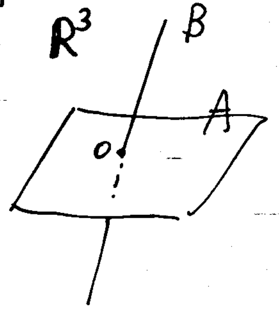
A, B：ベクトル空間

$$A+B=\{\mathbf{a}+\mathbf{b} \mid \forall \mathbf{a}\in A,\ \forall \mathbf{b}\in B\}$$

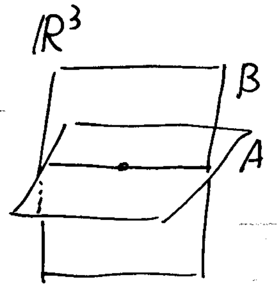
$A\cap B=\{\mathbf{0}\}$ のとき $A\oplus B$ と表す.

$\oplus$ は直和という.

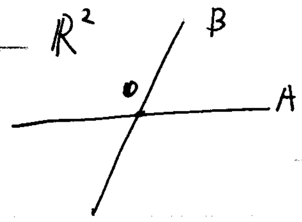
例



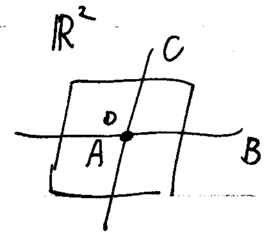
$$\underset{3次元}{\mathbb{R}^3}=\underset{2次元}{A}+\underset{1次元}{B}=A\oplus B$$



$$\underset{3次元}{\mathbb{R}^3}=\underset{2次元}{A}+\underset{2次元}{B}$$



$$\underset{2次元}{\mathbb{R}^2}=\underset{1次元}{A}+\underset{1次元}{B}=A\oplus B$$



$$\underset{2次元}{\mathbb{R}^2}=\underset{2次元}{A}+\underset{1次元}{B}+\underset{1次元}{C}$$

例

正方行列 A が対角化可能

$$\Longleftrightarrow\ \mathbb{R}^n=W(\lambda_1)\oplus W(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus W(\lambda_r)$$

§直交補空間

$\boxed{\text{定義}}$ (直交補空間)

V：内積空間

$V \supset W$：内積空間

$$W^{\perp} = \{ u \in V \mid (u, v) = 0, \ \forall v \in W \}$$

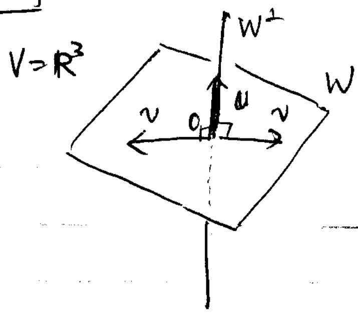
$W^{\perp}$ を W の V における直交補空間という

$\boxed{\text{定理}}$

$W^{\perp}$ は V の部分空間である.

$\boxed{\text{問}}$ これを示せ.

$\boxed{\text{例}}$ (直交補空間の具体例)



$$W = \{ (x_1, x_2, 0) \mid \forall x_1, \forall x_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$W^{\perp} = \{ (0, 0, x_3) \mid \forall x_3 \in \mathbb{R} \}$$

(証明) $v = {}^t(x_1, x_2, 0)$, $u = {}^t(0, 0, x_3)$ より

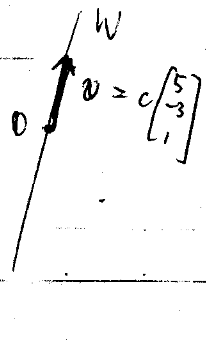
$(u, v) = 0 \times x_1 + 0 \times x_2 + 0 \times x_3 = 0 \Rightarrow u$ と v は直交. $\boxed{\text{証}}$

$\boxed{\text{例}}$ (直交補空間の具体例)

$$\mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

W は $Ax = 0$ の解空間だから $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ より

$$W = \left\{ v = c \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ \forall c \in \mathbb{R} \right\}$$



$v = {}^t(5c, -3c, c)$, $u = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ とおくと，$(u, v) = 0$ より

$5c \times x_1 + (-3c) \times x_2 + c \times x_3 = 0 \rightarrow 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$

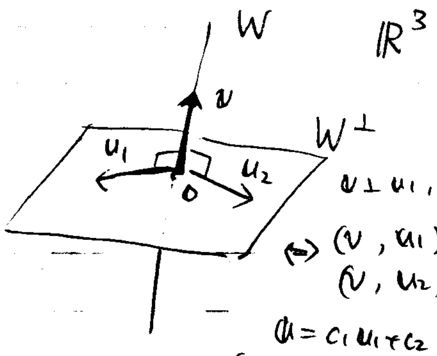
よって　$W^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$ を得る．

$W^\perp$ は方程式 $\tilde{A}x = 0$ の解空間だから，

$$\tilde{A} = [5\ -3\ 1] \rightarrow [1\ -3/5\ \ 1/5]$$

より

$$W^\perp = \left\{ c_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{= u_1} + c_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= u_2} \;\middle|\; \forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$



$v \perp u_1,\ v \perp u_2$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(v, u_1) = 0 \\ (v, u_2) = 0.\end{array}\right\}$

$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ とおく．

$(v, u) = (v, c_1 u_1 + c_2 u_2)$

$= c_1(v, u_1) + c_2(v, u_2)$

$= c_1 \times 0 + c_2 \times 0 = 0.$

$\Leftrightarrow v \perp u.$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim W + \dim W^\perp$$
$$3 = 1 + 2$$

$$\mathbb{R}^3 = W \underset{\text{直和}}{\oplus} W^\perp \quad (W \cap W^\perp = \{0\} \text{ より})$$

$\boxed{\text{定義}}$ （ベクトル空間の和，直和）

A, B：ベクトル空間

ベクトル空間の和：$A + B = \{a + b \mid \forall a \in A, \forall b \in B\}$

$A \cap B = \{0\}$ のとき $A + B$ は特に $A \oplus B$ と表す．

$\oplus$ は直和と呼ぶ．

$\boxed{\text{例}}$

A：実対称行列

$$\mathbb{R}^n = W(\lambda_1) \oplus \underbrace{W(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r)}_{\mathbb{R}^n \text{における } W(\lambda_1) \text{ の直交補空間}}$$

§ エルミート行列の対角化

$\boxed{\text{定義}}$

$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \overline{{}^tA} = {}^t(\overline{A})$　共役転置行列

Aを複素行列とする．

$\boxed{\text{定義}}$

$A^* = A$　をみたす行列を エルミート行列 (Hermite matrix) という

$A^* = -A$　〃　歪エルミート行列 (skew Hermite matrix) という．

$A^*A = E$　〃　ユニタリー行列 (unitary matrix) という．

$\boxed{\text{注意}}$

(1) エルミート行列の対角成分は全て実数である

(2) 歪エルミート行列の対角成分は全て純虚数である．

$\boxed{\text{問}}$　これを示せ．

$\boxed{\text{注意}}$

Aの要素が全て実数のときは　$A^* = {}^tA$ であるので．

エルミート行列は 対称行列，

歪エルミート行列は 歪対称行列，

ユニタリー行列は 直交行列 と なる．

$\boxed{\text{定理}}$

エルミート行列の固有値は全て実数である.

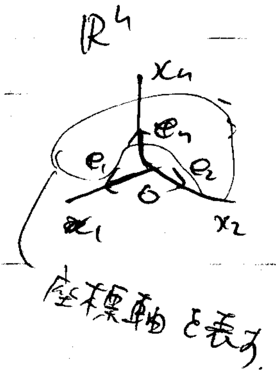
問 これを示せ.

$\boxed{\text{定理}}$

エルミート行列はユニタリー行列 P により $A = P^{-1}DP$ と対角化される。

§ 基底と座標変換

$\mathbb{R}^n$ 内の点 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ は



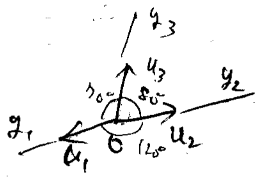
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

と表せる. x は $e_1, e_2, \cdots, e_n$ の線形結合で表せる.

$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ は座標軸を表している.

ここで, 異なる座標軸 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ を考える.



$\boxed{\text{定義}}$ (基底)

$\mathbb{R}^n$ の任意の元 x に対して

$$x = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_n u_n$$

と線形結合で表せるとき, $u_1, u_2, \cdots, u_n$ を $\mathbb{R}^n$の基底という.

$\boxed{\text{注意}}$

基底の取り方はさまざまである.

$e_1, e_2, \cdots, e_n$ も基底の組の1つであり, 自然な基底という.

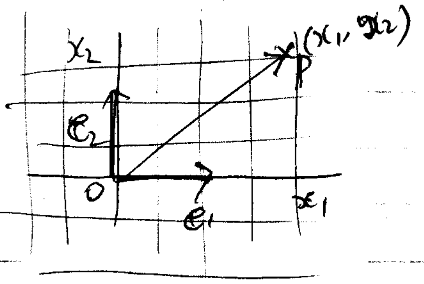
例

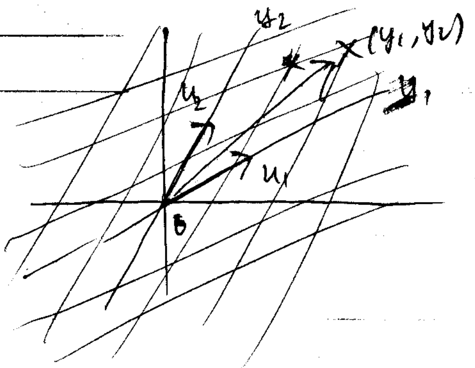
$\mathbb{R}^2$内の点 $p=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ を考える。

このとき　$p=x_1 e_1+x_2 e_2=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x$　と表せる。

$u_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ u_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ が　$\mathbb{R}^2$の基底となるか調べる。

$p=y_1u_1+y_2u_2$ とおき、任意の x に対して y_1, y_2 が定まるか調べ





$$y_1u_1+y_2u_2=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$y_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+y_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$Ay=x$$

$$\Rightarrow y=A^{-1}x=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}y_1=\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2\\ y_2=-\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2\end{cases}}$$　座標変換

よって任意の x に対して y が定まる。

定義　$\mathbb{R}^2$内の任意の点 p に対して $\boxed{}$ と表されるとき

$$p=x_1e_1+x_2e_2=(e_1, e_2)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=(e_1, e_2)x$$

$$p=y_1u_1+y_2u_2=(u_1, u_2)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=(u_1, u_2)y$$

<u>座標系</u> $\{e_1, e_2\}$ における<u>座標</u>　$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$,

<u>座標系</u> $\{u_1, u_2\}$ における<u>座標</u>　$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ と呼ぶ。

同じベクトル p に対して

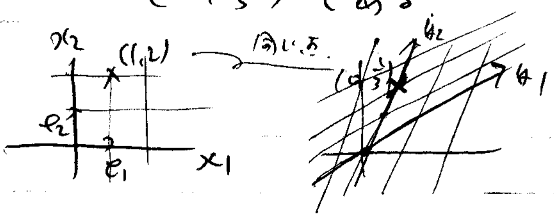
　座標系を取り換えて $\{e_1, e_2\}\to\{u_1, u_2\}$ とする。

これを　<u>座標変換</u>　$x\to y$　と呼ぶ。

例

座標系 $\{e_1, e_2\}$ における点 $(1,2)$ は
斜交座標系 $\{u_1, u_2\}$ で表すと、
$$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3}\times 1 - \frac{1}{3}\times 2 = 0 \\ y_2 = -\frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times 2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$
より
$(y = A^{-1}x)$

$(0, \frac{1}{3})$ である



定理

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底

$$\Longleftrightarrow \det(u_1, u_2, \cdots, u_n) \neq 0$$

(証明)

$$p = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = x$$
$$= y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_n u_n$$
$$= \underbrace{[u_1\ u_2 \cdots u_n]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{y}$$
$$= Ay$$

$\Longleftrightarrow$ $Ay = x$

$\Longleftrightarrow$ 任意の x に対して y が定まる

$\Longleftrightarrow$ 任意の x に対して 方程式 $Ay = x$ は一意な解 y をもつ,

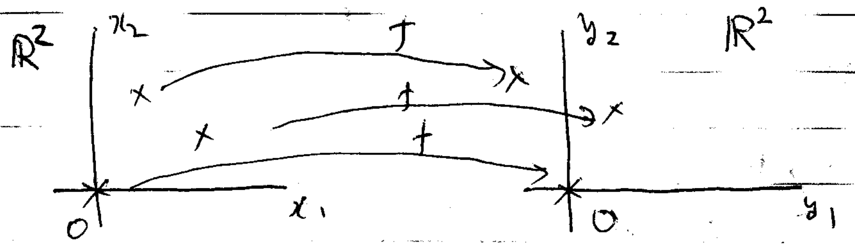
$\Longleftrightarrow$ $\det(A) = \det(u_1\ u_2 \cdots u_n) \neq 0$

§ 線形変換

定義 (線形変換)

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \quad : \underline{\text{線形変換}}$$

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$



例 (線形変換の具体例)

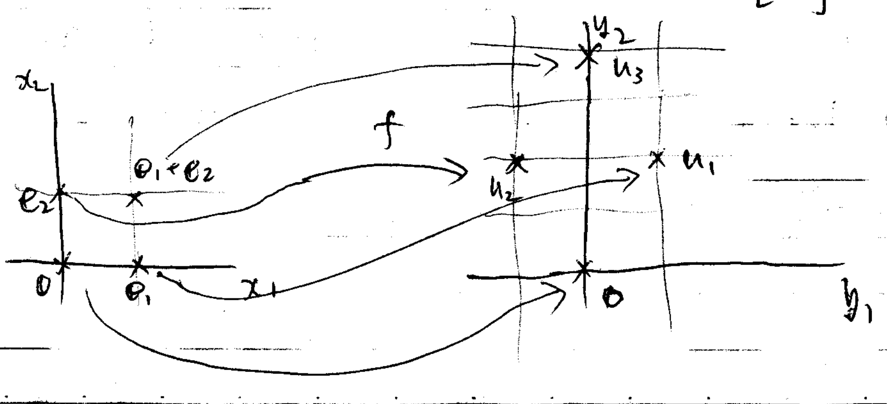
$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$f(\mathbf{0}) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = A\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$f(\mathbf{e}_1) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1$$

$$f(\mathbf{e}_2) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_2$$

$$f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_3$$



$\boxed{\text{注意}}$ 線形変換は原点を原点へ写す。($\because$ $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$)

任意の点 $\boldsymbol{x}$ がどこに写されるか考える。

$$A=[\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2]$$

とする。このとき

$$\begin{array}{ccccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & \boldsymbol{x} & \mapsto & \boldsymbol{y} & =A\boldsymbol{x} \end{array}$$

を考える。任意の $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$$

と書ける。このとき $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ が基底である。基底のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ がそれぞれどこに写されるか考える。

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1)=A\boldsymbol{e}_1=[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1\times\boldsymbol{u}_1+0\times\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_1, \\ f(\boldsymbol{e}_2)=A\boldsymbol{e}_2=[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=0\times\boldsymbol{u}_1+1\times\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f: \boldsymbol{e}_1\mapsto\boldsymbol{u}_1 \\ f: \boldsymbol{e}_2\mapsto\boldsymbol{u}_2 \end{cases}$$

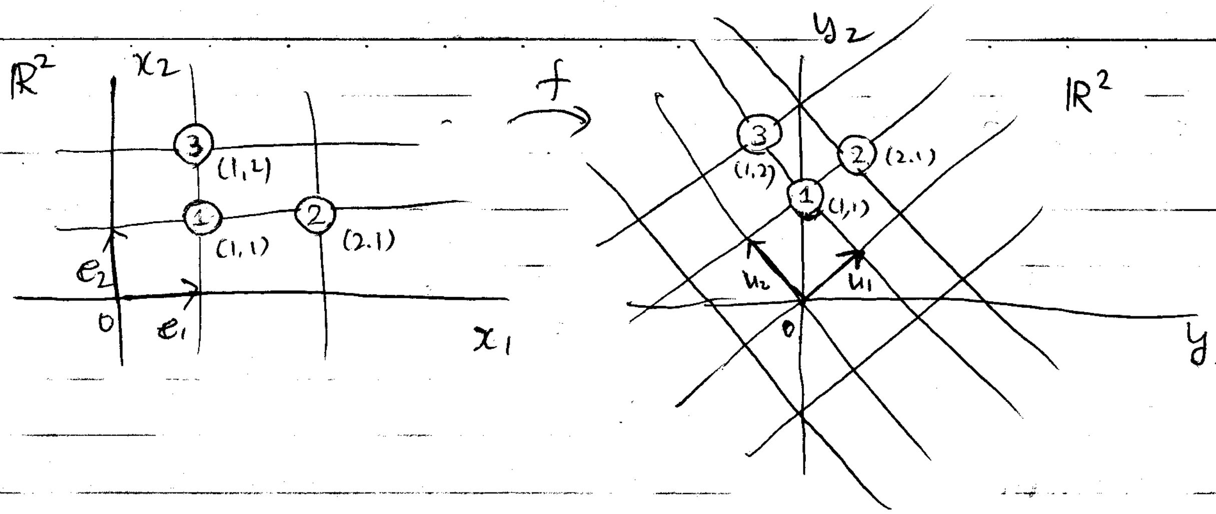
となる。$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ に写すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})&=f(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)=A(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)=x_1(A\boldsymbol{e}_1)+x_2(A\boldsymbol{e}_2)\\ &=x_1f(\boldsymbol{e}_1)+x_2f(\boldsymbol{e}_2)\\ &=x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2.\end{aligned}$$

である。よって

$$f: \boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}=x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2$$

と表される。$\boldsymbol{y}$ は座標系 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ で座標が (x_1,x_2) となる点である。



例 (線形変換の基底表記の具体例)

$y = f(x) = Ax$

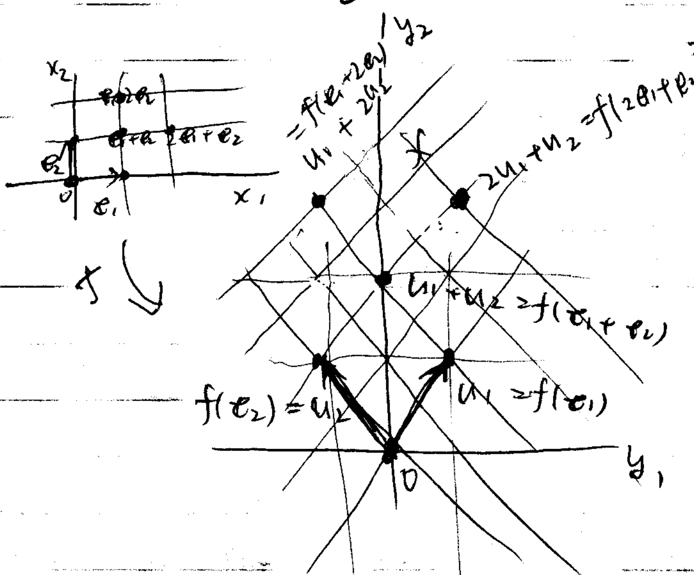
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$f(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{u_1}$, $f(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{u_2}$

$f(e_1 + e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \boxed{u_1 + u_2}$

$f(2e_1 + e_2) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{2u_1 + u_2}$

$f(e_1 + 2e_2) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \boxed{u_1 + 2u_2}$



任意の点 $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ は

$y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) = x_1 u_1 + x_2 u_2$
$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$

に写される.

$\det([u_1\ u_2]) \neq 0$ であるから u_1, u_2 は $\mathbb{R}^2$ の基底となる.
よって任意の点 x に対して $y = x_1 u_1 + x_2 u_2$ は $\mathbb{R}^2$ 平面を生成する.

注 $\det(A) \neq 0$ のとき. $f : \mathbb{R}^2$平面 $\rightarrow$ $\mathbb{R}^2$平面

例

$y = f(x) = Ax$, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$f(e_1) = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = u_1$.

$f(e_2) = Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = u_2 = -u_1$.

$\forall x \in \mathbb{R}^2$ に対して

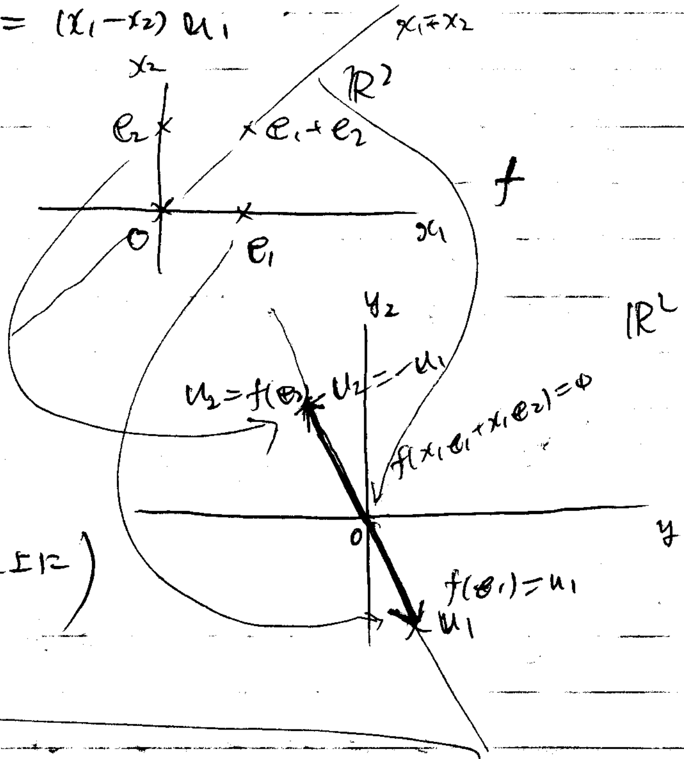
$y = f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) = x_1 u_1 + x_2 u_2$

$= x_1 u_1 + x_2(-u_1) = (x_1 - x_2) u_1$

$x_1 - x_2 = t$ とおくと.

$y = t u_1$.

となり，直線を表す.



$\det([u_1\ u_2]) = \det([u_1\ -u_1])$
$= 0$

であるから u_1, u_2 は $\mathbb{R}^2$ の基底とはならない．（u_1, u_2 は同一直線上にあるため）

注

$\det(A) = 0$ のとき

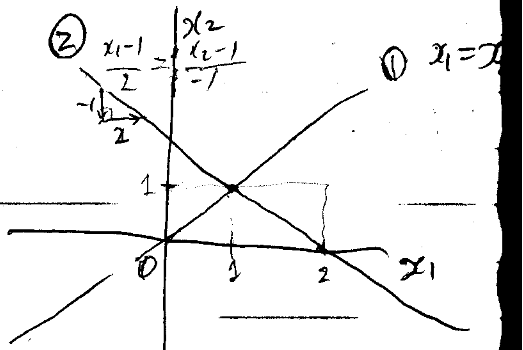
f : $\mathbb{R}^2$ 平面 $\rightarrow$ 直線（1次元）

§ 直線の線形変換

例 　det(A)≠0 の場合

直線 ① $\boldsymbol{x}(t) = t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t\\t\end{bmatrix} = t\boldsymbol{p}$ 　　① $x_1 = x_2$

② $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2t+1\\-t+1\end{bmatrix} = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p}$ 　　② $\dfrac{x_1-1}{2} = \dfrac{x_2-1}{-1}$



を線形変換

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

で写す.

①の場合

$$\boldsymbol{y}(t) = f(\boldsymbol{x}(t)) = A\boldsymbol{x}(t) = A(t\boldsymbol{p})$$

$$= t(A\boldsymbol{p}) = t\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} = t\boldsymbol{p}'$$

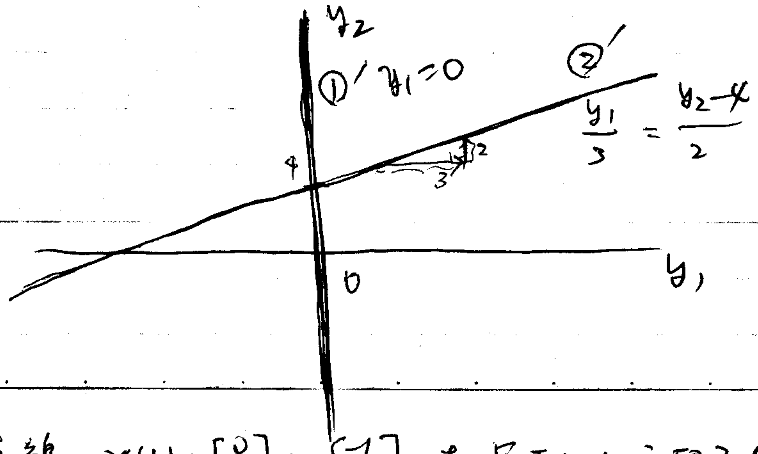
$\Rightarrow$ ①' $\boldsymbol{y}(t) = t\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} = t\boldsymbol{p}'$ 　　①' $y_1 = 0$, y_2: 任意

②の場合

$$\boldsymbol{y}(t) = f(\boldsymbol{x}(t)) = A\boldsymbol{x}(t) = A(\boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{q} + tA\boldsymbol{p}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \boldsymbol{q}' + t\boldsymbol{p}'$$

$\Rightarrow$ ②' $\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \boldsymbol{q}' + t\boldsymbol{p}'$ 　　②' $\dfrac{y_1}{3} = \dfrac{y_2-4}{2}$



問 　直線 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ を写すとどうなるか.

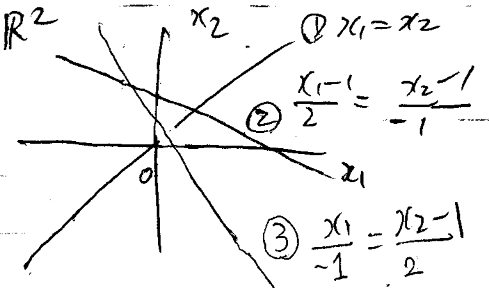
例 $\det(A)=0$ の場合

$$y = f(x) = Ax, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = [u_1 \ u_2] = [u_1 \ -u_1]$$

① $x(t) = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = t p$

② $x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = q + t p$.

③ $x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = q + t p$



① $y(t) = f(x(t)) = A(tp) = t(Ap) = t\left([u_1 \ -u_1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = t(u_1 - u_1) = 0$.

② $y(t) = f(x(t)) = A(q + tp) = (Aq) + t(Ap) = \left([u_1 \ -u_1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + t\left([u_1 \ -u_1]\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

$= (u_1 - u_1) + t(2u_1 + u_1) = 0 + t(3u_1) = \underbrace{\boxed{3t}}_{=\tilde{t}} u_1 = \tilde{t} u_1$

③ $y(t) = f(x(t)) = A(q + tp) = (Aq) + t(Ap) = \left([u_1 \ -u_1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + t\left([u_1 \ -u_1]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

$= (-u_1) + t(-u_1 - 2u_1) = -u_1 - 3t u_1 = \underbrace{-(1+3t)}_{=\tilde{\tilde{t}}} u_1 = \tilde{\tilde{t}} u_1$.