線形代数学 II (2)（近藤）
中間試験 2004年12月6日

I.　ベクトル

$$(\star)\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\ \in\mathbb{R}^5$$

を考える．ベクトル ($\star$) を列ベクトルにもつ行列を $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4\end{bmatrix}$ とおく．また，ベクトル ($\star$) から生成される部分空間を $W_1=<\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4>$ とおく．さらには方程式 $A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間を $W_2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\,|A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ とおく．次の問 (1)–(8) に答えよ.（60 点）

(1) 行列 A を簡約化し，A の階数を求めよ.

(2) ベクトル ($\star$) の 1 次独立なベクトルの最大個数を求め，最大となるベクトルの組をひとつ示せ．また，1 次従属となるベクトルすべてを他の 1 次独立なベクトルの線形結合で表せ.

(3) 部分空間 W_1 の基底と次元を述べよ.

(4) 部分空間 W_1 の正規直交基底を求めよ.

(5) 行列 A^T を簡約化し，A^T の階数を求めよ.

(6) 方程式 $A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解と一般解を求めよ.

(7) 解空間 W_2 の基底と次元を述べよ.

(8) $\mathbb{R}^5=W_1\oplus W_2$ となることを示せ.

II.　線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は条件 $f\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ をみたすとする．このとき f を行列表示し表現行列を求めよ．また，正則変換であるか述べよ.（10 点）

III.　行列 $\begin{bmatrix}c & -b & a\\ b & c & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$ が直交行列となるように各要素を定めよ.（10 点）

IV.　次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $W_1,W_2,\cdots,W_5$ のうち部分空間となるものはどれか.（10 点）

$$W_1=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & & & =0\\ & & x_2 & + & x_3 & =0\\ x_1 & & & - & x_3 & =0\end{array}\right\}$$

$$W_2=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & =1\\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & =2\\ -x_1 & & & + & 3x_3 & =3\end{array}\right\}$$

$$W_3=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & & & \geqq 0\\ & & 5x_2 & - & 4x_3 & \geqq 0\\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & \geqq 0\end{array}\right\}$$

$$W_4=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2\leq 1\right\}$$

$$W_5=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=0\right\}$$

V.　次の写像 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_5$ のうち線形写像となるものはどれか.（10 点）

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 + 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 \end{bmatrix}$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \end{bmatrix}$$

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} \right)$$

$$f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$