線形代数学 II

近藤弘一

最終更新：平成 16 年 12 月 13 日

目 次

1　ベクトル空間

1.1　集合

定義 1.1 (集合) ある一定範囲にある対象物の集まりを１つの全体として考えるとき，これを**集合（set）**という．その範囲内の個々の対象物を**元**または**要素（element）**という．x が集合 X の元であることを x は X に**属する（belong）**，または X は x を**含む（包含する）（contain）**といい，$x \in X$ と表記する．その否定を $x \notin X$ と表記する．

ある元 x が条件 $C(x)$ をみたすとする．このとき条件をみたす x 全体の集合を

$$X = \{x \,|\, C(x)\}$$

と表記する．

定義 1.2 (数の集合)

- **自然数（natural number）**全体の集合：
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$
- **整数（integer）**全体の集合：
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$
- **有理数（rational number, rational integer）**全体の集合：
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$
- **実数（real number）**全体の集合：
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \{\,\text{有理数と}\textbf{無理数（irrational number）}\text{全体の集合}\,\} \\ &= \{\, a.b_1b_2b_3b_4\cdots \,|\, a \in \mathbb{Z},\ b_1, b_2, \cdots \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}\,\}. \end{aligned}$$
- **複素数（complex number）**全体の集合：
$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}.$$

定義 1.3 (行列の集合)

- 実列ベクトル全体の集合：
$$\mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \,\middle|\, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$
- 複素列ベクトル全体の集合：
$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \,\middle|\, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

- 実行ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{R}_n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \middle| a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 複素行ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \middle| a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

- 実行列全体の集合：

$$\mathbb{R}^{m\times n} = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n) \right\}.$$

- 複素行列全体の集合：

$$\mathbb{C}^{m\times n} = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{C}\ (i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n) \right\}.$$

定義 1.4 (その他の集合)

- 高々 n 次の実係数多項式全体の集合：

$$\mathbb{R}[x]_n = \left\{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \middle| a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- 区間 (a, b) で連続な関数全体の集合： $C(a, b)$.
- n 回微分可能でかつ n 階導関数が連続な関数全体の集合： C^n.
- 無限回微分可能な関数全体の集合： C^∞.

1.2 部分集合

定義 1.5 (集合の包含関係)

- 元を１つも含まない集合を**空集合（empty set）**といい，$X = \emptyset$ と表記する．
- 集合 X と Y に含まれる元が全て等しいとき $X = Y$ と表記する．$X = Y$ ではないとき $X \neq Y$ と書く．
- X に含まれる全ての元が Y に含まれるとき，Y は X を**含む（contain）**，または，X は Y の**部分集合（subset）**といい，$X \subset Y$ と表記する．$X \subset Y$ ではないとき $X \not\subset Y$ と書く．

注意 1.6 (真部分集合) $X \subset Y$ は定義より $X = Y$ の意味も含む．$X \subset Y$ で $X \neq Y$ のときは，X は Y の**真部分集合（proper subset）**という．これを $X \subsetneq Y$ と表記する．書物によっては部分集合に $\subseteq$ を用い，真部分集合に $\subset$ を用いる場合もあるので注意が必要である．

例 1.7 (包含関係の具体例)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

例 1.8 (包含関係の具体例)

$$X = \{(x, y) \,|\, x + y \leq 1\}\,, \qquad Y = \{(x, y) \,|\, x + y \leq 0\}$$

のとき

$$X \supset Y$$

が成立する.

1.3 集合算

定義 1.9 (和，積)

- X と Y の**合併集合（union, join）**または**和集合（sum）**:

$$X \cup Y = \{x \,|\, x \in X \text{ または } x \in Y\}$$

- X と Y の**共通部分（intersection）**または**積集合（product）**：

$$X \cap Y = \{x \,|\, x \in X \text{ かつ } x \in Y\}$$

定理 1.10 (和集合，積集合の性質)

- **可換則（commutative law）**：

$$X \cup Y = Y \cup X, \qquad X \cap Y = Y \cap X$$

- **結合則（associative law）**：

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \qquad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

- **分配則（distributive law）**：

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \qquad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

- **吸収則（absorption law）**：

$$X \cup (X \cap Y) = X, \qquad X \cap (X \cup Y) = X$$

問 1.11 (和集合，積集合の性質) これを図を書いて示せ.

定義 1.12 (互いに素) $X \cap Y = \emptyset$ のとき X と Y は**互いに素（disjoint）**であるという.

注意 1.13 (直和集合) X と Y が互いに素のとき，すなわち $X \cap Y = \emptyset$ をみたすとき，和集合を $X \cup Y = X + Y$ と書き，**直和集合（disjoint union）**という.

注意 1.14 (直積集合) **直積集合**:

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X,\, y \in Y\}$$

1.4 体

ある集合の元に対して四則演算が定義され，その集合内で閉じているとき，その集合を体と呼ぶ．正確には次のように定義される．

定義 1.15 (体) 集合 K の任意の 2 つの元 a, b に対して，加法 $a+b$ と乗法 ab が定義されているとする．

(1)	$(a+b)+c = a+(b+c)$.	（和の結合則）
(2)	$\forall a + \exists 0 = a = 0 + a$.	（零元 0 の存在）
(3)	$\forall a + \exists(-a) = 0 = (-a)+a$.	（和の逆元 $-a$ の存在）
(4)	$a+b = b+a$.	（和の交換則）
(5)	$(ab)c = a(bc)$.	（積の結合則）
(6)	$a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$.	（分配則）
(7)	$ab = ba$.	（積の交換則）
(8)	$\forall a \exists 1 = a = 1a$.	（単位元 1 の存在）
(9)	$\forall a \exists (a^{-1}) = 1 = (a^{-1})a$．ただし，$a \neq 0$ とする．	（積の逆元 a^{-1} の存在）

- 条件 (1)–(3) を満たすとき，集合 K を**群（group）**と呼ぶ．
- 条件 (1)–(4) を満たすとき，集合 K を**可換群（commutative group）**または**アーベル群（Abel group）**と呼ぶ．
- 条件 (1)–(6) を満たすとき，集合 K を**環（ring）**と呼ぶ．
- 条件 (1)–(7) を満たすとき，集合 K を**可換環（commutative ring）**と呼ぶ．
- 条件 (1)–(9) を満たすとき，集合 K を**体（field）**と呼ぶ．ただし，条件 (7) を満たさない体を**非可換体（noncommutative field）**と呼ぶ．

定理 1.16 (零元，単位元，逆元の一意性)

(1) 零元 0，単位元 1 は唯一つに定まる．

(2) 和の逆元 $-a$ は各 a に対して唯一つに定まる．

(3) 積の逆元 a^{-1} は各 a に対して唯一つに定まる．

問 1.17 (零元，単位元，逆元の一意性) これを示せ．

（証明） (1) 零元が $0, 0'$ と二つ存在するとする．すなわち

$$0 + a = a = 0 + a\,,\quad 0' + a = a = 0' + a \tag{1}$$

とする．この式は全ての元 a で成立するので，第一式の a を $0'$ とし，第二式の a を 0 とすると

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0'\,,\quad 0' + 0 = 0 + 0' = 0 \tag{2}$$

となる．$0 + 0' = 0', 0 + 0' = 0$ より，$0 = 0'$ を得る．零元は唯一つに定まる．

(2) a の和の逆元が b, b' と二つ存在するとする．すなわち

$$a + b = b + a = 0\,,\quad a + b' = b' + a = 0 \tag{3}$$

とする．$a+b=0$ に左から b' を加えると

$$b' + (a+b) = b' + 0 \tag{4}$$

となる．和の結合則より左辺の和の順を変える．右辺は零元を加えているので

$$(b' + a) + b = b' \tag{5}$$

が成り立つ．$b' + a = 0$ を用いると

$$0 + b = b' \tag{6}$$

である．よって

$$b = b' \tag{7}$$

を得る．a に対する和の逆元は唯一つに定まる．
(3)　(2) と同様に示される．

例 1.18 (体の具体例) 数の集合

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \tag{8}$$

を考える．

- 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を考える．$\mathbb{N}$ は加法，乗法ともに群をなさない．なぜなら，和の逆元 $-a$，積の逆元 a^{-1} は自然数の範囲内で存在しないからである．
- 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を考える．$\mathbb{Z}$ は可換環である．積の逆元が存在しないので体とはならないことに注意する．
- 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を考える．$\mathbb{Q}$ は体である．
- 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を考える．$\mathbb{R}$ は体である．$\mathbb{R}$ を**実数体**と呼ぶ．
- 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を考える．$\mathbb{C}$ は体である．$\mathbb{C}$ を**複素数体**と呼ぶ．

例 1.19 (体の具体例)

- 0 でない実数全体の集合 $\mathbb{R}^*$ は乗法に関して可換群となる.（積 $\times$ を和 $+$ に置き換えて考える．条件 (5),(8),(9),(7) は条件 (1),(2),(3),(4) とみなせる.）
- 行列の集合 $\mathbb{R}^{m\times n}$ は加法に関して可換群となる.（(1) $(A+B)+C = A+(B+C)$. (2) $A+O=A$. (3) $A+(-A)=O$. (4) $A+B=B+A$.）
- 正方行列の集合 $\mathbb{R}^{n\times n}$ は加法と乗法に関して環となる.（条件 (1)–(4) と (5) $(AB)C = A(BC)$. (6) $A(B+C) = AB+AC$. (注意) 単位元は単位行列 E である．$AB \neq BA$ であるから可換環ではない.）
- 正則な $n \times n$ 型行列の集合 $GL(n)$ は非可換体となる．（(8) $AE = A$. (9) $AA^{-1} = E$. (7) $AB \neq BA$.）

1.5　数ベクトル空間

定義 1.20 (n **次元実ベクトル空間**) 要素が実数の列ベクトル全体の集合

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

に次の演算が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を n **次元実ベクトル空間**（n**-dimensional real vector space**）という.

(i) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して**スカラー倍**を次のように定義する：

$$\alpha\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

(ii) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して**ベクトルの和**を次のように定義する：

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

定義 1.21 (n **次元複素ベクトル空間**) 要素が複素数の列ベクトル全体の集合

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

に次の演算が定義されているとき，$\mathbb{C}^n$ を n **次元複素ベクトル空間**（n**-dimensional complex vector space**）という.

(i) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して**スカラー倍**を次のように定義する：

$$\alpha \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

(ii) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して**ベクトルの和**を次のように定義する：

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

定義 1.22 (数ベクトル空間) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ を**数ベクトル空間**という.

注意 1.23 (零ベクトル) $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の**零ベクトル（zero vector）**を

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

と定義する．零ベクトルは

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}, \qquad \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

をみたす.

注意 1.24 (逆ベクトルと差) $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**を

$$-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

と定義する．また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**差**を

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-1)\boldsymbol{a}$$

と定義する.

定理 1.25 (ベクトルの演算の性質) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ （または $\mathbb{C}^n$）とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ （または $\mathbb{C}$）に対して次の性質が成立する：

(i) **（交換則）** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

(ii) **（結合則）** $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

(iii) **（スカラー倍に関する結合則）** $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$.

(iv) **（スカラー倍に関する分配即）** $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$.

(v) **（スカラー倍に関する分配即）** $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$.

問 1.26 (ベクトルの演算の性質) この定理をスカラー倍とベクトルの和の定義を用いて証明せよ.

1.6 ベクトル空間

定義 1.27 (ベクトル空間) 集合 V の任意の元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ と体 K ($\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ など) の任意の元 α に対して，**和**

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V \tag{9}$$

と**スカラー倍**

$$\alpha\boldsymbol{u} \in V \tag{10}$$

が定義されていて，次の性質 (i)–(viii) をみたすならば，V を K 上の**ベクトル空間（vector space）**と呼び，V の元 $\boldsymbol{v} \in V$ を**ベクトル（vector）**と呼ぶ.

(i) **（交換則）** $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

(ii) **（結合則）** $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$.

(iii) **（零元の存在）** $\boldsymbol{u} + \exists\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

(iv) **（スカラー倍に関する結合則）** $a(b\boldsymbol{u}) = (ab)\boldsymbol{u}$.

(v) **（スカラー倍に関する分配即）** $(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$.

(vi) **（スカラー倍に関する分配即）** $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$.

(vii) **（スカラー倍に関する単位元）** $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

(viii) **（スカラー倍に関する零元）** $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

例 1.28 (ベクトル空間の例)

- 実列ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

  条件 (1)–(8) をみたすので $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である.

- 複素列ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

条件 (1)–(8) をみたすので $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．

- 実行ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{R}_n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

条件 (1)–(8) をみたすので $\mathbb{R}_n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．

- 複素行ベクトル全体の集合：

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

条件 (1)–(8) をみたすので $\mathbb{C}_n$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．

- 高々 n 次の実係数多項式全体の集合：

$$\mathbb{R}[x]_n = \left\{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \,\middle|\, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbb{R}[x]_n$ の元は多項式であり

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x]_n \ni f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \\ \mathbb{R}[x]_n \ni g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \end{aligned}$$

と表される．これらの和は

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \in \mathbb{R}[x]_n \end{aligned}$$

となり，スカラー倍は

$$\begin{aligned} (\alpha f)(x) &= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \cdots + (\alpha a_n)x^n \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \in \mathbb{R}[x]_n \end{aligned}$$

となる．$\mathbb{R}[x]_n$ は和とスカラー倍の演算について閉じている．また，条件 (1)–(8) をみたすので，$\mathbb{R}[x]_n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．

- 区間 (a, b) で連続な関数全体の集合： $C(a, b)$．$C(a, b)$ の元は関数であり $f(x), g(x) \in C(a, b)$ とおく．これらの和は

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in C(a, b)$$

であり連続関数となる．スカラー倍は

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in C(a, b)$$

であり連続関数となる．$C(a, b)$ は和とスカラー倍に関して閉じている．また，条件 (1)–(8) をみたすので，$C(a, b)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．

1.7 内積

定義 1.29 (内積) $\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} = \sum_k^n a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{11}$$

なる二項演算を**内積（inner product）**という．また，$\mathbb{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対しては

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T \overline{\boldsymbol{b}} = \sum_k^n a_k \bar{b}_k = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \cdots + a_n \bar{b}_n \tag{12}$$

と定義する．

例 1.30 (内積の具体例) ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{13}$$

の内積は

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 1 \tag{14}$$

である．また

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{15}$$

の内積は

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 2 \tag{16}$$

である．

定理 1.31 (内積の性質) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

(i) **（内積の交換則）** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(ii) **（内積の分配則）** $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

(iii) **（内積のスカラー倍の結合則）** $(\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}, \alpha \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

(iv) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$

問 1.32 (内積の性質) これを示せ.

定理 1.33 (内積の性質) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

(i) **(内積の交換則)** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$.

(ii) **(内積の分配則)** $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

(iii) **(内積のスカラー倍の結合則)** $(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

(iv) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\mathbb{R} \ni (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$

問 1.34 (内積の性質) これを示せ.

定義 1.35 (内積空間) 内積が定義されたベクトル空間を**内積空間（inner product space）**という.

注意 1.36 (行列の積と内積) $l \times m$ 型行列 A を行ベクトルに分割し，$m \times n$ 型行列 B を列ベクトルに分割し

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^T \\ \boldsymbol{a}_2{}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l{}^T \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_i$ は $m \times 1$ 型の列ベクトルである．このとき積は

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^T \\ \boldsymbol{a}_2{}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^T\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1{}^T\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1{}^T\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2{}^T\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2{}^T\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2{}^T\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_l{}^T\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_l{}^T\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_l{}^T\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と表される.

1.8 ノルム

定義 1.37 (ノルム) ベクトル $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{a}$ または $\mathbb{C}^n \ni \boldsymbol{a}$ に対して

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \tag{17}$$

をベクトルの**ノルム（norm）**または**長さ（length）**という.

例 1.38 (ノルムの具体例)

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

のノルムはそれぞれ

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{1 \times 1 + 1 \times 1} = \sqrt{2}, \tag{19}$$

$$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} = \sqrt{2 \times 2 + (-1) \times (-1)} = \sqrt{5} \tag{20}$$

である．

$$\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

のノルムはそれぞれ

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} |a_k|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \tag{22}$$

$$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} |b_k|^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \tag{23}$$

である．

定理 1.39 (ノルムの性質) シュバルツの不等式（Schwartz' inequality）：

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \tag{24}$$

三角不等式：

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \tag{25}$$

定義 1.40 (ノルム) ノルムはシュバルツの不等式と三角不等式をみたすものであればよい．次に定義される式もノルムとなる．

$$\|\boldsymbol{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2}$$

$$\|\boldsymbol{a}\|_3 = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^3}$$

$$\vdots$$

$$\|\boldsymbol{a}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^p}$$

$$\|\boldsymbol{a}\|_\infty = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)$$

1.9　単位ベクトル

定義 1.41 (単位ベクトル) ノルムが 1 のベクトルを**単位ベクトル（unit vectar）** という．

例 1.42 (単位ベクトルの具体例)

$$\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

は $\|\boldsymbol{e}_j\| = 1$ であり全て単位ベクトルである．

定義 1.43 (正規化) あるベクトルを向きが同じで長さが 1 のベクトルに変換することを**正規化（normalization）**という．

例 1.44 (正規化の具体例) ベクトル $\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = [1\ 1]^T$ を正規化し $\boldsymbol{e}$ とする．すなわち

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{27}$$

と得られる．

1.10　ベクトルのなす角

定義 1.45 (ベクトルの成す角) $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \tag{28}$$

により得られる θ をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**成す角（angular）**という．$\cos\theta$ を**方向余弦（direction cosine）**という．

注意 1.46 (内積とノルムの比) シュバルツの不等式より

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \leq 1 \tag{29}$$

となることに注意する．

例 1.47 (成す角の具体例)

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

を考える．このとき方向余弦は

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \tag{31}$$

となるので，成す角は

$$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0.4\pi \simeq 72^\circ \tag{32}$$

である．

1.11　ベクトルの直交

定義 1.48 (ベクトルの直交) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する（orthogonal）**という．このとき $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ と表記する．

例 1.49 (ベクトルの直交の具体例)

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

を考える．このとき

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0 \tag{34}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は互いに直交する．

例 1.50 (ベクトルの直交の具体例)

$$\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

を考える．このとき $i, j = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{36}$$

が成り立つ．よって $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は互いに直交する．

1.12　基本ベクトル

定義 1.51 (基本ベクトル) $\mathbb{R}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{37}$$

を $\mathbb{R}^n$ の**基本ベクトル（elemental vector）**という．

定理 1.52 (基本ベクトルと任意のベクトル) $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

は

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n$$

と表される．

1.13　1 次独立と 1 次従属

定義 1.53 (1 次結合，1 次従属) ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ に対して，ベクトル

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_1\boldsymbol{u}_m \in V, \qquad c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$$

を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の **1 次結合**または**線形結合（linear combination）**という．またこのとき，ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ に **1 次従属**または**線形従属（linearly dependent）**という．

定義 1.54 (1 次関係，1 次独立，1 次従属) ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$ に対して，条件式

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_1\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}, \qquad c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$$

を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の **1 次関係**という．

1 次関係をみたす係数が $c_1 = 0, c_2 = 0, \cdots, c_n = 0$ ときのみであるとき，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は **1 次独立**または**線形独立（linearly independent）**という．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立ではないしき，**1 次従属**または**線形従属**という．

注意 1.55 (自明な 1 次関係) 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_1\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0},$$

において

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

とおくと，明らかに 1 次関係は成立する．このとき**自明な 1 次関係**という．自明な 1 次関係のときベクトルは 1 次独立である．また，自明な 1 次関係ではないとき**非自明な 1 次関係**という．非自明な 1 次関係のときベクトルは 1 次従属である．非自明な場合は例えば

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0\\
c_1 &= 0, \quad c_2 = 1, \quad \cdots, \quad c_n = 0\\
c_1 &= 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 1\\
c_1 &= 1, \quad c_2 = 1, \quad \cdots, \quad c_n = 1
\end{aligned}$$

等々がある．

例 1.56 (ベクトルの 1 次独立，1 次従属の具体例) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ を考える．

(i) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が同じ向きのときを考える．向きが同じなので $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a}$ と書ける．また，

$$\alpha\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となので，非自明な 1 次関係である．よって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は 1 次従属である．

(ii) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の向きが異なるときを考える．このとき 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

は自明なもののみである．もし非自明であれば同時には $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ とはならないので，$c_1 \neq 0$ とおく．このとき

$$\boldsymbol{a} = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{b}$$

と表される．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は同じ向きとなる．これは与えられた条件と矛盾する．よって 1 次関係は自明なものに限る．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は 1 次独立である．

(iii) $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ となるときを考える．条件を書き換えると

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

となる．非自明な 1 次関係であるから，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次従属である．

例 1.57 (基本ベクトルの 1 次独立性) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である．なぜなら，1 次関係は

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

となるので，係数は自明

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

なものに限るからである．

例 1.58 (1 次独立の具体例) $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

は 1 次独立であるか考える．これらの 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

をみたす c_1, c_2, c_3 を定める．1 次関係を変形して

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

であり，

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，

$$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

と表される．行列 A を簡約化すると

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である．よって

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る．係数は自明なもの

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

に限るので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．

例 1.59 (1 次従属の具体例) $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

は 1 次独立であるか考える．1 次関係より，

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{0} \\ c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{0} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となる．簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるから，

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ -3c \\ c \end{bmatrix}, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

を得る．1 次関係は

$$\begin{aligned} (2c)\boldsymbol{a}_1 + (-3c)\boldsymbol{a}_2 + (c)\boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{0} \\ 2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となる．非自明な 1 次関係であるから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属である．

まとめ 1.60 (1 次独立性の判定) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ の 1 次独立性を考える．これらのベクトルを列ベクトルにもつ行列を

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} : m \times n$$

とおく．このとき $\boldsymbol{c}$ に関する方程式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

の解の任意定数の個数は $n - \mathrm{rank}\,(A)$ であるから，次の関係が成り立つ：

$$\begin{array}{lcl} n = \mathrm{rank}\,(A) & \Leftrightarrow & \text{自明解 } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \text{ のみをもつ} & \Leftrightarrow & \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{ は 1 次独立} \\ n > \mathrm{rank}\,(A) & \Leftrightarrow & \text{自明解と非自明解をもつ} & \Leftrightarrow & \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{ は 1 次従属} \end{array}$$

定理 1.61 (1 次独立の性質)

定理 1.62 (1 次独立の性質)

定理 1.63 (1 次独立の性質)

1.14 1 次結合の記法

1.15 1 次独立なベクトルの最大個数

定義 1.64 (ベクトルの 1 次独立な最大個数) ベクトルの集合 X が，ある r 個のベクトルでは 1 次独立となり，任意の $r+1$ 個のベクトルでは 1 次従属となるとき，r を集合 X の **1 次独立なベクトルの最大個数**という．

例 1.65 (ベクトルの 1 次独立な最大個数の具体例) $\mathbb{R}^n$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は n である．

（証明） $n = 2$ のときを考える．まず明らかに $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ は 1 次独立であるので，1 次独立なベクトルの最大個数は 2 以上である．ここで，3 個のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 \quad \in \mathbb{R}^2$$

を 1 次独立と仮定する．このとき 1 次関係

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

を考える．これより

$$\begin{gathered}
(\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1)\boldsymbol{e}_1 + \\
(\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0} \\
\begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \\
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}
\end{gathered}$$

となる．係数行列の階数は 2 以下であるから (α, β, γ) は任意定数を含む解であり，1 次関係は非自明係数となる．よって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次従属である．以上より，$\mathbb{R}^2$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は 2 である．

$n \geq 3$ のときも同様に示される．

定理 1.66 (簡約化行列の 1 次関係) 行列

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

を簡約化した行列を

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

とする．このとき A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に関する 1 次関係と B の列ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ に関する 1 次関係とは等価である．

（証明）　行列 A を簡約化して B となるとき，基本変形を表す行列 P を用いて

$$B = PA$$

と表される．これは

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P\boldsymbol{a}_1 & P\boldsymbol{a}_2 & \cdots & P\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となるので，各列ベクトルは

$$\boldsymbol{b}_j = P\boldsymbol{a}_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

と表される．また P は正則行列であるから，

$$\boldsymbol{a}_j = P^{-1}\boldsymbol{b}_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

とも表される．ここで $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に関する 1 次関係を

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

とする．これより，

$$\begin{aligned} c_1P^{-1}\boldsymbol{b}_1 + c_2P^{-1}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_nP^{-1}\boldsymbol{b}_n &= \mathbf{0} \\ P^{-1}(c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n) &= \mathbf{0} \\ PP^{-1}(c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n) &= P\mathbf{0} \\ c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

を得る．これは $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ に関する 1 次関係であり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に関する 1 次関係と等しい．

例 1.67 (ベクトルの 1 次独立な最大個数の具体例) ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^4$$

の 1 次独立なベクトルの最大個数とそのときベクトルの組の一つを求める．また，その他のベクトルを 1 次独立なベクトルの 1 次結合で表す．

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 + c_5\boldsymbol{a}_5 = \mathbf{0}$$

を考える．これは

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$$

と表される．方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解を求めることで，1 次関係の係数 $\boldsymbol{c}$ が定まる．行列 A を簡約化すると

$$A \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_4 & \boldsymbol{b}_5 \end{bmatrix}$$

となる．方程式 $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解もまた $\boldsymbol{c}$ となる．なすわち，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係とベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_5$ の 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 + c_4\boldsymbol{b}_4 + c_5\boldsymbol{b}_5 = \mathbf{0}$$

は同じものである．まず，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_5$ の 1 次独立なベクトルの最大個数を考える．$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ に着目すると，

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_3$$

であり，$\mathbb{R}^4$ の基本ベクトルである．明らかにこれらは 1 次独立であるので，1 次独立なベクトルの最大個数は少なくとも 3 である．他のベクトル $\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_5$ について見ると

$$\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2,$$

$$\boldsymbol{b}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4$$

である．b_3, b_5 は 1 次従属である．よってベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_5$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は $r = 3 = \operatorname{rank} A$ であり，その 1 次独立なベクトルの組の一つは $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ である．またその他のベクトルは

$$\boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \qquad \boldsymbol{b}_5 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4$$

と 1 次結合で表される．これらの結果はベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係にも適用される．1 次独立なベクトルの最大個数は $r = \operatorname{rank} A = 3$ であり，そのベクトルの組は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ である．また，その他のベクトルは

$$\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{a}_5 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$$

が成り立つ．

定理 1.68 (行列の列ベクトルと行ベクトルの 1 次独立な最大個数)

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(A) &= A \text{ の列ベクトル 1 次独立な最大個数} \\ &= A \text{ の行ベクトル 1 次独立な最大個数} \end{aligned}$$

定理 1.69 (行列と 1 次独立性) 正方行列 $A : n \times n$ に対して次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} & A \text{ の } n \text{ 個の列ベクトルは 1 次独立} \\ \Leftrightarrow\ & A \text{ の } n \text{ 個の行ベクトルは 1 次独立} \\ \Leftrightarrow\ & A\text{: 正則行列（}A\text{ は逆行列をもつ）} \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{rank}(A) = n \\ \Leftrightarrow\ & \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

1.16 部分空間

定義 1.70 (部分空間) ベクトル空間 V の部分集合 W がベクトル空間となるとき，W を V の**部分空間（subspace）**という．

定理 1.71 (部分空間) V の部分集合 W が V の部分空間となるための必用十分条件は，すべての $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \in W$ をみたすことである．

注意 1.72 (部分空間と零ベクトル) 部分空間 W は零ベクトル $\mathbf{0}$ を含む．なぜなら，部分空間の必用十分条件で $\alpha = \beta = 0$ とおくと

$$0\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{b} = \mathbf{0} \in W$$

となるからである．

例 1.73 (部分空間の具体例) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．一方，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,(\neq \mathbf{0})$ の解の集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間ではない．

（証明）　解空間の節を参照.

例 1.74 (部分空間ではない具体例) 集合

$$W = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．なぜなら，

$$W \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{R} \ni \alpha = 1, \quad \beta = 1$$

に対して

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$$

となるからである．

例 1.75 (部分空間ではない具体例) 集合

$$W = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0\right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．なぜなら，

$$W \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{R} \ni \alpha = -1, \quad \beta = 0$$

に対して

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W$$

となるからである．

1.17　ベクトルで張られる空間

定義 1.76 (ベクトルによって生成される空間) ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ の線形結合全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \{ c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n | \, c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R} \}$$

と定義する．この集合をベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ によって**生成される（張られる）空間**という．

定理 1.77 (ベクトルにより生成される空間と部分空間) ベクトルにより生成される空間

$$W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle, \qquad \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$$

は V の部分空間である．

（証明）　W の任意の 2 つのベクトルは

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n, \qquad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{u}_1 + b_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$$

と表される．これらと任意のスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ との線形結合は

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} &= (\alpha a_1 + \beta b_1)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\alpha a_n + \beta b_n)\boldsymbol{u}_n \\ &= c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \in W \end{aligned}$$

となる．よって W は部分空間である．

例 1.78 (ベクトルによって生成される空間の具体例) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ により生成される空間

$$W =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n >$$

を考える．W の任意のベクトルは

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

となる．係数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ はすべての実数であるから，ベクトル $\boldsymbol{x}$ のなす集合は $\mathbb{R}^n$ と等しい．よって，

$$< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n >= \mathbb{R}^n$$

が成り立つ．

例 1.79 (ベクトルによって生成される空間の具体例) ベクトルにより生成される空間

$$W =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を考える．W の任意のベクトルは

$$y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

である．2 つのスカラー y_1, y_2 はすべての実数をとる．ここで $y_1, y_1 + y_2$ を新たな 2 つのスカラーと見なしてもよい．すなわち，任意の実数 x_1, x_2 を用いて $y_1 = x_1$, $y_1 + y_2 = x_2$ とおく．このとき，

$$y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

と表される．ベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体のなす集合は $\mathbb{R}^2$ と等しい．以上より，

$$W =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >= \mathbb{R}^2$$

が成立する．

1.18　基底

定義 1.80 (基底) ベクトル空間 V が 1 次独立な基底 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_n$ により生成される空間

$$V =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_1 >$$

として表されるとき，ベクトルの組

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$$

を V の**基底（basis）**という．

例 1.81 (基底の具体例) $\mathbb{R}^n$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を用いて

$$\mathbb{R}^n =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n >$$

と表される．また，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立であるから，

$$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の基底である．これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底（standard basis）**という．

注意 1.82 (基底の取り方の非一意性) 基底の取り方は一意ではない．

例 1.83 (基底の具体例) $\mathbb{R}^2$ の基底を考える．$\mathbb{R}^2$ は標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をもち，

$$\mathbb{R}^2 =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 >$$

と表される．他の基底を考える．例えば，

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

は基底となり得るか調べる．まず，

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

であるから，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立である．次に，

$$\mathbb{R}^2 = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >$$

となるか調べる．すなわち $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = y_1 \boldsymbol{u}_1 + y_2 \boldsymbol{u}_2$$

をみたす y_1, y_2 が一意に定まるか調べる．この式を書き換えると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= y_1 \boldsymbol{u}_1 + y_2 \boldsymbol{u}_2 \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x} &= P\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

となる．これは $\boldsymbol{y}$ についての非同次連立方程式 $P\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ である．$\det(P) \neq 0$ より P は正則であるから

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

であり，

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \qquad y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

となる．y_1, y_2 は任意の x_1, x_2 に対して一意に定まる．よって，$\mathbb{R}^2 = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >$ が成り立つ．以上より

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の基底である．

1.19 次元

定理 1.84 (ベクトル空間の基底の個数) ベクトル空間の基底の個数は取り方に依らず一意に定まる．その個数は，ベクトル空間に含まれる 1 次独立なベクトルの最大個数と等しい．

定義 1.85 (次元) ベクトル空間 V の基底の個数が n 個であるとき，これをベクトル空間 V の**次元（dimension）**と呼び，

$$\dim(V) = n$$

と表記する．

例 1.86 (ベクトル空間の次元の具体例) $\mathbb{R}^n$ は標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を用いて

$$\mathbb{R}^n = < \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n >$$

と表されるので，次元は

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

となる．

定理 1.87 (ベクトル空間の次元と階数) 部分空間

$$W = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n >$$

の次元は

$$\dim(W) = \operatorname{rank} A, \qquad A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

である.

定理 1.88 (部分空間の次元) ベクトル空間 V, W が

$$V \supset W$$

であるとき,

$$\dim V \geq \dim W$$

が成り立つ.

例 1.89 (部分空間の次元の具体例) ベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

を用いて生成される部分空間

$$W_1 = < \boldsymbol{u}_1 >, \quad W_2 = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >, \quad W_3 = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 >,$$
$$W_4 = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4 >, \quad W_5 = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5 >$$

の次元を求める.

(1) W_1 の基底は $\{\boldsymbol{u}_1\}$ である．よって

$$\dim W_1 = 1$$

となる．W_1 は原点 $O(\boldsymbol{0})$ と点 $P(\boldsymbol{u}_1)$ を通る直線である.

(2) W_2 の基底をまず求める．$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ が 1 次独立であるか調べる.

$$A_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから，$\operatorname{rank} A_2 = 2$ であり，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立となる．よって W_2 の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ であり,

$$\dim W_2 = \operatorname{rank} A_2 = 2$$

を得る．W_2 は原点 $O(\boldsymbol{0})$ と点 $P_1(\boldsymbol{u}_1)$, $P_2(\boldsymbol{u}_2)$ を通る平面である.

(3) W_3 の基底をまず求める．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるか調べる．

$$A_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから，$\operatorname{rank} A_3 = 3$ であり，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立となる．よって W_3 の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ であり，

$$\dim W_3 = \operatorname{rank} A_3 = 3$$

を得る．W_3 は 3 本の軸がそれぞれ点 $P_1(\boldsymbol{u}_1)$, $P_2(\boldsymbol{u}_2)$, $P_3(\boldsymbol{u}_3)$ を通る 3 次元空間である．

(4) W_4 の基底をまず求める．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立であるか調べる．

$$A_4 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから，$\operatorname{rank} A_4 = 2 < 3$ であり，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_4$ は 1 次従属となる．最大個数となる 1 次独立なベクトルは $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ であり，その他のベクトルは $\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ と表される．よって W_4 の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ であり，

$$\begin{aligned} W_4 &= < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4 > = \{\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 + \gamma \boldsymbol{u}_4 \,|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 > = \{\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 + \gamma(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \,|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha + \gamma)\boldsymbol{u}_1 + (\beta - \gamma)\boldsymbol{u}_2 \,|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \left\{ \tilde{\alpha} \boldsymbol{u}_1 + \tilde{\beta} \boldsymbol{u}_2 \,\middle|\, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 > = W_2 \end{aligned}$$

となる．以上より

$$\dim W_4 = \operatorname{rank} A_4 = 2$$

を得る．W_4 は平面 W_2 と等しい．点 $P_4(\boldsymbol{u}_4)$ は平面 W_2 に含まれる点であるためである．

(5) W_5 の基底をまず求める．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5$ が 1 次独立であるか調べる．

$$A_5 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

であるから，$\operatorname{rank} A_5 = 3 < 4$ であり，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_5$ は 1 次従属となる．最大個数となる 1 次独立なベクトルは $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ であり，その他のベクトルは $\boldsymbol{u}_5 = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3)/2$ と表される．よって W_5 の基底は $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ であり，

$$\begin{aligned} W_5 &= < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5 > = \{\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 + \gamma \boldsymbol{u}_3 + \delta \boldsymbol{u}_5 \,|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3 \right\rangle \\ &= \left\{ \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 + \gamma \boldsymbol{u}_3 + \delta \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3 \right) \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right) \boldsymbol{u}_1 + \left(\beta + \frac{\delta}{2}\right) \boldsymbol{u}_2 + \left(\gamma + \frac{\delta}{2}\right) \boldsymbol{u}_3 \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \tilde{\alpha} \boldsymbol{u}_1 + \tilde{\beta} \boldsymbol{u}_2 + \tilde{\gamma} \boldsymbol{u}_3 \,\middle|\, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 > = W_3 \end{aligned}$$

となる．以上より

$$\dim W_5 = \operatorname{rank} A_5 = 3$$

を得る．W_5 は W_3 と等しい．$W_5 \subset \mathbb{R}^3$ であるから，

$$\dim W_5 \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

となることを注意する．

1.20 正規直交基底

定義 1.90 (正規直交基底) ベクトル空間の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に対して次の名称を定義する：

- **正規基底（normal basis）**：

$$\|\boldsymbol{u}_i\| = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

- **直交基底（orthogonal basis）**：

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = 0, \qquad 1 \leq i < j \leq n$$

- **正規直交基底（orthonormal basis）**：

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq j \leq n$$

例 1.91 (基本ベクトルの正規直交性) $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は正規直交基底である．

（証明）

例 1.92 (基本ベクトルの正規直交性) $\mathbb{R}^2$ の基底

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

は

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = 1\,, \quad \|\boldsymbol{u}_2\| = 1\,, \quad (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$$

をみたすので正規直交基底である．

例 1.93 (正規直交系の具体例) $\mathbb{R}^2$ の基底

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

は

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = 1\,, \quad \|\boldsymbol{u}_2\| = 1\,, \quad (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$$

をみたすので正規直交基底である．

定理 1.94 (正規直交基底における 1 次結合) 正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ により定まるベクトル

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

の係数は

$$c_i = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

により定まる．

（証明）　ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ と

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

の両辺との内積をとると

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i) &= (c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_i\boldsymbol{u}_i + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_i) \\
&= (c_1\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_i) + (c_2\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_i) + \cdots + (c_i\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i) + \cdots + (c_n\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_i) \\
&= c_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_i) + c_2(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_i) + \cdots + c_i(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i) + \cdots + c_n(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_i) \\
&= c_1 \times 0 + c_2 \times 0 + \cdots + c_i \times 1 + \cdots + c_n \times 0 \\
&= c_i
\end{aligned}$$

を得る．

1.21　グラム・シュミットの直交化法

定義 1.95 (正規直交化) ベクトル空間

$$V = < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n >$$

の基底を取り替えて

$$V = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n >$$

とする．このとき $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ が正規基底となるとき，この操作を**正規化（normalize）**という．直交基底となるとき，**直交化（orthogonalize）**という．正規直交基底となるとき，**正規直交化（orthonormalize）**という．

定理 1.96 (正規化) ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対して次の式で定まる $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は正規基底となる：

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}, \qquad \cdots, \qquad \boldsymbol{u}_n = \frac{\boldsymbol{v}_n}{\|\boldsymbol{v}_n\|}.$$

定理 1.97 (グラム・シュミットの直交化法) ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対して次の式で定まる $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の正規直交基底となる．この手法を**グラム・シュミットの直交化法**と

いう．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1' &= \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{u}_1 &= \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|},\\
\boldsymbol{v}_2' &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1, & \boldsymbol{u}_2 &= \frac{\boldsymbol{v}_2'}{\|\boldsymbol{v}_2'\|},\\
\boldsymbol{v}_3' &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1, & \boldsymbol{u}_3 &= \frac{\boldsymbol{v}_3'}{\|\boldsymbol{v}_3'\|},\\
\boldsymbol{v}_4' &= \boldsymbol{v}_4 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{u}_3 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1, & \boldsymbol{u}_4 &= \frac{\boldsymbol{v}_4'}{\|\boldsymbol{v}_4'\|},\\
&\vdots & &\vdots\\
\boldsymbol{v}_n' &= \boldsymbol{v}_n - \sum_{k=1}^{n-1}(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{u}_k, & \boldsymbol{u}_n &= \frac{\boldsymbol{v}_n'}{\|\boldsymbol{v}_n'\|}.
\end{aligned}
$$

（証明）

例 1.98 (グラム・シュミットの直交化法の具体例) $\mathbb{R}^3$ の基底

$$
\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}
$$

を正規直交化する．グラム・シュミットのの直交化法より，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{v}_2' &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{u}_2 &= \frac{\boldsymbol{v}_2'}{\|\boldsymbol{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{v}_3' &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1\\
&= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{5}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{u}_3 &= \frac{\boldsymbol{v}_3'}{\|\boldsymbol{v}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．以上よりベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

は

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$$

をみたし，$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となる．

1.22 解空間

定義 1.99 (解空間) 同次系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

を**解空間（solution space）**という．

定理 1.100 (解空間と部分空間) 解空間 W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

（証明） $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とする．すなわち，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解であり，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

をみたすとする．このとき，

$$A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha(A\boldsymbol{x}) + \beta(A\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{0} + \beta\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

となるので $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ もまた解である．よって $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in W$ となり，W は部分空間である．

注意 1.101 (非同次系の解空間) 非同次系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}(\neq \boldsymbol{0})$ の解空間 W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間ではない．なぜなら，$A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b}$ より非同次系は原点 $\boldsymbol{0}$ を解にもたない．よって W は $\boldsymbol{0}$ を含まず，部分空間とはならない．つまり，

$$W \ni \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \quad \mathbb{R} \ni \alpha = 0, \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \notin W$$

である．

定理 1.102 (解空間の次元) 同次系の解空間 W の次元は一般解の任意定数の個数と等しく，

$$\dim(W) = n - \operatorname{rank}(A)$$

で与えられる．

定義 1.103 (一般解) 解空間 W の基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ を方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解**という．このとき W の任意のベクトルは基本解の線形結合で

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{u}_k$$

と表される．これを方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**一般解**という．

例 1.104 (解空間の具体例) 解空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

を考える．方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とおく．A を簡約化して

$$A \to B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる．これより，方程式は

$$x_1 = 2x_2 - 3x_4 - x_5, \qquad x_3 = x_4 - 2x_5$$

と書き換わる．$\operatorname{rank} A = 2$ より任意定数の個数は $5 - \operatorname{rank} A = 3$ となり，任意定数を $x_2 = c_1, x_3 = c_2, x_5 = c_3 \in \mathbb{R}$ とおく．よって一般解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$$

と得られる．ここで $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_3$ は基本解である．解空間は

$$W = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\} =< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 >$$

となる．W の基底を求める．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立であるか調べる．1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

より

$$\left. \begin{array}{r} 2c_1 - 3c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{array} \right\}$$

となる．よって条件をみたすのは $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ のときのみである．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．W の基底は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ となる．以上より

$$\dim W = 3$$

を得る．これは解の任意定数の個数に等しい．

1.23 連立 1 次方程式の図形的イメージ

1.24 ベクトル空間の和

定義 1.105 (ベクトル空間の和) ベクトル空間 U, V に対して

$$U+V=\{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{u}\in U,\boldsymbol{v}\in V\}$$

を**ベクトル空間の和**という．特に,

$$U\cap V=\{\boldsymbol{0}\}$$

のとき

$$U+V=U\oplus V$$

と表記し，**直和**という.

注意 1.106 (直和) ベクトル空間 U, V, W が

$$W=U\oplus V$$

であるとする．このとき，W のあるベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して,

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\qquad \boldsymbol{u}\in U,\quad \boldsymbol{v}\in V$$

をみたす $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ はただ一つ定まる.

定理 1.107 (ベクトル空間の和の次元) ベクトル空間 U, V, W が

$$W=U+V$$

をみたすとき,

$$\dim W\leq \dim U+\dim V$$

である.

$$W=U\oplus V$$

をみたすとき,

$$\dim W=\dim U+\dim V$$

である.

定理 1.108 (部分空間の共通部分) ベクトル

$$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$$

が 1 次独立であるとき，これらのベクトルで生成される空間

$$W_1=<\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n>,\qquad W_2=<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m>$$

の共通部分は

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$$

となる．

（証明） W_1 と W_2 の任意のベクトルは

$$W_1 \ni \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n, \qquad W_2 \ni \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ともに $W_1 \cap W_2$ のベクトルとする．すなわち， $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
&a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m \\
&a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n + (-b_1)\boldsymbol{v}_1 + (-b_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (-b_m)\boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

と 1 次関係を得る．ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立なので係数は

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \cdots, \quad a_n = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad \cdots, \quad b_m = 0$$

と自明なものに限る．よって共通のベクトルは零ベクトル $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ に限る．

定理 1.109 (部分空間の共通部分) ベクトル

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_l$$

が 1 次独立であるとき，これらのベクトルで生成される空間

$$W_1 =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m >, \qquad W_2 =< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_l >$$

の共通部分は

$$W_1 \cap W_2 =< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m >$$

となる．

例 1.110 (ベクトル空間の和の具体例) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 A, B の和を考える．

(1) 原点を通る直線 A と平面 B を考える．直線 A が原点以外で平面 B と交わらないとき，$A \cap B = \{\mathbf{0}\}$ であり，

$$\mathbb{R}^3 = A + B = A \oplus B, \qquad 3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim A + \dim B = 1 + 2$$

が成り立つ．直線 A が平面 B 上にあるとき，$A \subset B$ であるので，

$$A + B = B$$

が成り立つ．

(2) 原点を通る平面 A と平面 B を考える．$A \neq B$ であるとき A と B とが交わる点の集合は直線 C となる．$A \cap B = C \neq \{\mathbf{0}\}$ である．このとき，

$$\mathbb{R}^3 = A + B, \qquad 3 = \dim \mathbb{R}^3 \leq \dim A + \dim B = 2 + 2 = 4$$

が成り立つ．$A = B$ であるときは，

$$A + B = A = B$$

が成り立つ．

例 1.111 (ベクトル空間の和の具体例) $\mathbb{R}^2$ の部分空間 A, B, C の和を考える．

(1) 原点を通る直線 A, B を考える．$A \neq B$ であるとき，$A \cap B = \{\mathbf{0}\}$ であるから，

$$\mathbb{R}^2 = A + B = A \oplus B, \qquad 2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim A + \dim B = 1 + 1$$

が成り立つ．

(2) 原点を通る直線 A, B と平面 C を考える．$A \subset C$, $B \subset C$ であり，$C = \mathbb{R}^2$ であるから，

$$\mathbb{R}^2 = A + B + C$$

が成り立つ．

例 1.112 (ベクトル空間の和の具体例) ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を 1 次独立とする．これらで生成される部分空間

$$W_1 =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >, \quad W_2 =< \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 >, \quad W_3 =< \boldsymbol{u}_1 >$$

を考える．これらの和は

$$\begin{aligned}
W_{12} &= W_1 + W_2 =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 > + < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 >=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 >=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 >, \\
W_{13} &= W_1 + W_3 =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 > + < \boldsymbol{u}_1 >=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >, \\
W_{23} &= W_2 + W_3 =< \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 > + < \boldsymbol{u}_1 >=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 >= W_1 \oplus W_3, \\
W_{123} &= W_1 + W_2 + W_3 =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 > + < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 > + < \boldsymbol{u}_1 > \\
&=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1 >=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 >
\end{aligned}$$

と表される．

1.25 直和分解

定義 1.113 (直和分解) ベクトル空間 V とその部分空間 W_1, W_2 が

$$V = W_1 \oplus W_2$$

をみたすとき，V を W_1 と W_2 に**直和分解**するという．

例 1.114 (直和分解の具体例) ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を 1 次独立とする．このとき

$$\begin{aligned}
W &=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 > \\
&=< \boldsymbol{u}_1 > \oplus < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 >=< \boldsymbol{u}_2 > \oplus < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 > \\
&=< \boldsymbol{u}_3 > \oplus < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4 >=< \boldsymbol{u}_4 > \oplus < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 > \\
&=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 > \oplus < \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 >=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3 > \oplus < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4 >=< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_4 > \oplus < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 >
\end{aligned}$$

が成り立つ．

1.26 直交補空間

定義 1.115 (ベクトルと部分空間の直交) ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ と部分空間 $W \subset V$ に含まれるすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ とが直交するとき，すなわち

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in W$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{a}$ と W とは**直交する**といい，

$$\boldsymbol{a} \perp W$$

と表記する．

例 1.116 (ベクトルと部分空間とが直交する具体例) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ とは直交 $\boldsymbol{a} \perp W$ する．なぜなら，W は方程式 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$ の解空間として表されるからである．この例では W は平面であり $\boldsymbol{a}$ は法線ベクトルである．

定義 1.117 (直交補空間) ベクトル空間 V とその部分空間 W に対して，部分空間

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{a} \in V \,|\, \boldsymbol{a} \perp W\}$$

を V における W の**直交補空間**という．

定理 1.118 (直交補空間による直和分解) ベクトル空間 V における部分空間 W の直交補空間 $W^{\perp}$ は

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

となる．次元は

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$$

の関係が成り立つ．

定理 1.119 (直交補空間の次元) 部分空間

$$W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$$

の次元は

$$\dim W = \operatorname{rank} A$$

である．ただし，

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

とおく．W の直交補空間 $W^{\perp}$ は方程式 $A^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり，

$$W^{\perp} = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, A^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

となり，次元は

$$\dim W^{\perp} = n - \operatorname{rank} A$$

である．

例 1.120 (直交補空間の具体例) 部分空間

$$\mathbb{R}^3 \supset W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \{ c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

に対する直交補空間 $W^\perp$ を求める．$W^\perp$ の任意のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．x は W の任意のベクトル $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ と直交するので $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0$ が成り立つ．こりより，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = c_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) + c_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = 0$$

と表される．すべての c_1, c_2 について成り立つためには

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) = 0, \quad (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = 0$$

をみたさなければならない．この連立方程式を書き直すと

$$\boldsymbol{a}_1{}^T\boldsymbol{x} = 0, \quad \boldsymbol{a}_2{}^T\boldsymbol{x} = 0$$

であり，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^T \\ \boldsymbol{a}_2{}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$$

となる．これを解く．係数行列を簡約化すると

$$A^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^T \\ \boldsymbol{a}_2{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので，解は

$$\boldsymbol{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\,\boldsymbol{a}_3, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

となる．よって，直交補空間は

$$W^\perp = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\} = \{ c\,\boldsymbol{a}_3 \mid c \in \mathbb{R} \} = \langle \boldsymbol{a}_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

と得られる．

W の基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ と $W^\perp$ の基底 $\boldsymbol{a}_3$ とは 1 次独立である．よって $W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$ であるので，

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp, \qquad 3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim W + \dim W^\perp = 2 + 1$$

が成り立つ．また $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となることに注意する．つまり

$$W =< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 >, \quad W^\perp =< \boldsymbol{a}_3 >, \quad \mathbb{R}^3 =< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 >$$

である．

例 1.121 (直交補空間の具体例) ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を正規直交基底とする．このとき

$$\mathbb{R}^4 =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 >=< \boldsymbol{u}_1 > \oplus < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 >$$

が成り立つ．ここで

$$W_1 =< \boldsymbol{u}_1 >, \qquad W_{234} =< \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 >$$

とおくと，W_{234} は $\mathbb{R}^4$ における W_1 の直交補空間となる．なぜなら任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in W_1$, $\boldsymbol{y} \in W_{234}$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (c_1\boldsymbol{u}_1, c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 + c_4\boldsymbol{u}_4) = c_1c_2(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) + c_1c_3(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3) + c_1c_4(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_4) = 0$$

が成り立ち，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するからである．よって

$$\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_{234}, \qquad W_1 \perp W_{234}$$

であり，$\mathbb{R}^4$ は W_1 とその直交補空間 W_{234} によって直和分解される．同様に

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &= W_1 \oplus W_{234}, \qquad W_1 \perp W_{234} \\ &= W_2 \oplus W_{134}, \qquad W_2 \perp W_{134} \\ &= W_3 \oplus W_{124}, \qquad W_3 \perp W_{124} \\ &= W_{12} \oplus W_{34}, \qquad W_{12} \perp W_{34} \\ &= W_{13} \oplus W_{24}, \qquad W_{13} \perp W_{24} \\ &= W_{14} \oplus W_{23}, \qquad W_{14} \perp W_{23} \end{aligned}$$

と部分空間とのその直交補空間とで直和分解される．ただし，

$$W_i =< \boldsymbol{u}_i >, \quad W_{ij} =< \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j >, \quad W_{ijk} =< \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k >$$

とおく．

例 1.122 (直交補空間の具体例) 正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ で生成されるベクトル空間

$$V =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n >$$

を考える．このとき V は直和分解されて

$$V = W_1 \oplus V_1, \qquad W_1 =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k >, \quad V_1 =< \boldsymbol{u}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n >$$

と表される．V_1 は V における W_1 の直交補空間である．さらに V_1 を直和分解して

$$V_1 = W_2 \oplus V_2, \qquad W_2 =< \boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{u}_{k+2}, \cdots, \boldsymbol{u}_l >, \quad V_2 =< \boldsymbol{u}_{l+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n >, \qquad k < l$$

と表される．V_2 は V_1 における W_2 の直交補空間である．同様に繰り返して直交補空間で直和分解が可能である：

$$V = W_1 \oplus V_1 = W_1 \oplus (W_2 \oplus V_2) = W_1 \oplus (W_2 \oplus (W_3 \oplus V_3)) = \cdots.$$

1.27　基底の変換

ベクトル空間の基底の取り方は一意ではないので，あるベクトル空間 V に対して

$$V =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n, >=< \boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n, >$$

が成り立つ．ここで $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ とは異なる基底の組である．片方の組を基底とみなせば片方は 1 次従属なベクトルであるから，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &= p_{11}\boldsymbol{u}_1 + p_{11}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{u}_n \\
\boldsymbol{u}'_2 &= p_{12}\boldsymbol{u}_1 + p_{12}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{u}_n \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}'_n &= p_{1n}\boldsymbol{u}_1 + p_{1n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{u}_n
\end{aligned}$$

と書ける．ここで p_{ij} はある定数である．この関係式は

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}'_1 & \boldsymbol{u}'_2 & \cdots & \boldsymbol{u}'_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix} P, \qquad P = \begin{bmatrix}p_{ij}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

とも表される．

定義 1.123 (基底の変換行列) ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ に対して

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}'_1 & \boldsymbol{u}'_2 & \cdots & \boldsymbol{u}'_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix} P$$

をみたす行列 P を**基底の変換行列**という．

定理 1.124 (基底の変換行列の正則性) 基底の変換行列は正則である．

例 1.125 (基底の変換行列の具体例)

$$\mathbb{R}^2 =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >=< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 >, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

を考える．このとき

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix} P$$

をみたす基底の変換行列 P を求める．標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を列ベクトルに並べた行列は単位行列 E となるので，

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix} P = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} P = EP = P$$

を得る．

例 1.126 (基底の変換行列の具体例)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^2 =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >=< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >, \\
&\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

を考える．基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に対する $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ の変換行列を R とおく．つまり，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix} R$$

をみたす行列 R を求める．まず，標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に対する基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ と $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ の変換行列を P, Q とおく．すなわち，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix} P = EP = P, \qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix} Q = EQ = Q$$

が成立する．基底の変換行列は正則であるから，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix} P^{-1}, \qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix} Q^{-1}$$

を得る．これらより，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix} Q^{-1} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix} P^{-1} \\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix} P^{-1}Q\end{aligned}$$

と表される．よって

$$R = P^{-1}Q = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}2 & 3 \\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2 & 3 \\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 2 \\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

を得る．

1.28　座標変換

定義 1.127 (座標) ベクトル空間 V とその基底を $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とする．このとき V の任意の元 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$$

と表せる．線形結合の係数の組

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

を基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ における**座標（coordinate）**という．

注意 1.128 (列行列の成分) 任意の列ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

と表させるので，列ベクトルの成分の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ における座標と見なされる．

ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ を考える．基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ のとき

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$$

とおく．基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ のとき

$$\boldsymbol{a} = x'_1\boldsymbol{u}'_1 + x'_2\boldsymbol{u}'_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{u}'_n$$

とおく．これらくベクトルは等しいので，

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n = x'_1\boldsymbol{u}'_1 + x'_2\boldsymbol{u}'_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{u}'_n,$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}'_1 & \boldsymbol{u}'_2 & \cdots & \boldsymbol{u}'_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}'_1 & \boldsymbol{u}'_2 & \cdots & \boldsymbol{u}'_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}'$$

と表される．ここで，基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に対する基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ の変換行列を P とおくとき，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}'_1 & \boldsymbol{u}'_2 & \cdots & \boldsymbol{u}'_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}P$$

が成り立つので，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}P\boldsymbol{x}'$$

を得る．これより，

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$$

が成り立つ．

定義 1.129 (座標変換) ベクトル $\boldsymbol{a}$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ における座標を $\boldsymbol{x}$ とし，基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ における座標を $\boldsymbol{x}'$ とする．このとき

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}',$$
$$\boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x}$$

を**座標変換（coordinate transform）**という．ここで P は基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に対する基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$ の変換行列とする．

例 1.130 (座標変換の具体例) 点 $(1,0),(0,1),(1,1) \in \mathbb{R}^2$ の基底

$$\Sigma' = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$$

における座標を求める．与えられた点は標準基底

$$\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$$

における座標なので基底 Σ から基底 Σ' への座標変換を考える．基底 Σ に対する基底 Σ' の変換行列を P とおくと，

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となる．このとき座標変換は

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と表される．これを用いると

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2, \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2, \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_1
\end{aligned}$$

と表される．よって座標 $(1,0)_\Sigma, (0,1)_\Sigma, (1,1)_\Sigma$ はそれぞれ $(1/2, 1/2)_{\Sigma'}, (1/2, -1/2)_{\Sigma'}, (0,1)_{\Sigma'}$ となる．

2 線形写像

2.1 写像

定義 2.1 (写像) 集合 X, Y において，X の各元 x に対して Y の元 y を 1 つずつ対応させる規則 f が定まっているとき，f を X から Y への**写像（mapping）**という．これを

$$\begin{aligned}
&f : X \to Y \\
&X \xrightarrow{f} Y \\
&f : x \mapsto y \\
&y = f(x)
\end{aligned}$$

と表記する．f は**関数（function）**とも呼ばれる．また，$X = Y$ のときは，特に写像のことを**変換（transformation）**ともいう．

例 2.2 (写像の具体例) ひらがなの集合とカタカナの集合

$$X = \{\,あ, い, う, え, お, か, \cdots\}, \qquad Y = \{\,ア, イ, ウ, エ, オ, カ, \cdots\}$$

を考える．ひらがなをカタカナに書き換えるという規則を f とするとき，f は X から Y への写像であり，

$$f(あ) = ア,\quad f(い) = イ,\quad f(う) = ウ,\quad f(う) = エ,\quad f(お) = オ,\quad f(か) = カ,\quad \cdots$$

と書ける．

例 2.3 (写像の具体例) ある実数を 2 倍して 1 を足すという規則を f とする．このとき f は写像であり，

$$
\begin{aligned}
&f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\\
&f:x\mapsto y;\\
&y=f(x)=2x+1
\end{aligned}
$$

と表される．

2.2　合成写像

定義 2.4 (合成写像) 写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ に対して，

$$h:X\to Z;\qquad z=h(x)=g(f(x))$$

で定義される写像を

$$h=g\circ f$$

と表記し，f と g の**合成写像（composite）**という．

定理 2.5 (合成写像の性質) 結合則：

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

例 2.6 (合成写像の具体例) 写像

$$
\begin{aligned}
&f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\qquad y=f(x)=2x+1,\\
&g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\qquad z=g(y)=y^2-1
\end{aligned}
$$

の合成写像は

$$
\begin{aligned}
&h=g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\\
&z=h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2-1=4x(x+1)
\end{aligned}
$$

である．

2.3　恒等写像，逆写像

定義 2.7 (恒等写像) 写像 $f:X\to X$ がすべての $x\in X$ に対して $f(x)=x$ をみたすとき，f を**恒等写像（identity mapping）**といい，

$$f=\mathrm{id}$$

と表記する．

例 2.8 (恒等写像の具体例) 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; y=f(x)=x$ は恒等写像である．

定義 2.9 (逆写像) 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ の合成写像が

$$g \circ f = \mathrm{id}$$

をみたすとき，g を f の**逆写像（inverse mapping）**といい，

$$g = f^{-1}$$

と表記する．

例 2.10 (逆写像の具体例) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = 2x + 1$ の逆写像は $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x = f^{-1}(y) = (y-1)/2$ である．

例 2.11 (逆写像をもたない具体例) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = 2x^2 + 1$ の逆写像 f^{-1} は存在しない．

2.4 全単射

定義 2.12 (定義域，値域) 写像 $f : X \to Y$ に関して，X を**定義域（domain）**といい，

$$f(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\}$$

で定義される集合を**値域（range）**または**像（image）**という．

例 2.13 (値域の具体例) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = 2x + 1$ の定義域は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ であり，値域または f の像は $f(\mathbb{R}) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ である．

例 2.14 (値域の具体例) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = 2x^2 + 1$ の定義域は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ であり，値域または f の像は $f(\mathbb{R}) = [1, \infty) \subsetneq \mathbb{R}$ である．

定義 2.15 (写像の分類) 写像 $f : X \to Y$ に対して次の分類を定義する．

- $f(X) = Y$ をみたすとき．f を**上への写像（onto-mapping）**または**全射（surjection）**という．
- 異なる 2 つの元 x_1, $x_2 \in X$ に対して $f(x_1) = f(x_2)$ となるとき，すなわち，ある元 $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となるただ 1 つの元 $x \in X$ が定まるとき，f を **1 対 1 写像（one-to-one mapping）**または**単射（injection）**という．
- 単射かつ全射のとき f を**上への 1 対 1 写像（onto one-to-one mapping）**または**全単射（bijection）**という．

定理 2.16 (逆写像) 全単射のとき逆写像をもつ．

例 2.17 (全単射の具体例) 写像

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad y = f(x) = ax + b$$

は上への 1 対 1 写像である．また，このとき逆写像をもち，

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

と表される．

例 2.18 (全単射ではない具体例) 写像

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad y = f(x) = ax^2 + b$$

を考える．$y \geq b$ より $f(\mathbb{R}) = [b, \infty) \neq \mathbb{R}$ をみたし，f は上への写像ではない．さらには，$x = 1, -1$ に対して $y = a + b$ となり，2 対 1 の写像であり 1 対 1 写像ではない．またこれらより，逆写像 f^{-1} は存在しない．

2.5　線形写像

定義 2.19 (線形写像) ベクトル空間 U からベクトル空間 V への写像

$$f : U \to V$$

が

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_2 \in U$$

をみたすとき f を**線形写像（linear mapping）**または**1 次写像**という．
$U = V$ のとき f を**線形変換（linear transformation）**または**1 次変換**という．

注意 2.20 (零ベクトル) 線形写像 f は零ベクトル $\mathbf{0}_U \in U$ を零ベクトル $\mathbf{0}_V \in V$ へ写す．なぜなら，$\alpha = \beta = 0$ とすると定義式より

$$\begin{aligned} f(0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2) &= 0f(\boldsymbol{x}_1) + 0f(\boldsymbol{x}_2) \\ f(\mathbf{0}_U) &= \mathbf{0}_V \end{aligned}$$

となるからである．

例 2.21 (線形写像の具体例) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x) = ax$ は線形写像である．なぜなら，

$$f(\alpha x_1 + x_2) = a(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(ax_1) + \beta(ax_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

をみたすからである．

問 2.22 (線形写像) 次の写像は線形写像ではないことを示せ．

$$\begin{aligned} &(1) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad y = f(x) = ax + b, \quad b \neq 0 \\ &(2) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad y = f(x) = ax^2 + b \end{aligned}$$

例 2.23 (線形写像の具体例) 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$;

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

は線形写像である．なぜなら，

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2) = A(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2) = \alpha(A\boldsymbol{x}_1) + \beta(A\boldsymbol{x}_2) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2)$$

をみたすからである．

問 2.24 (線形写像) 次の写像は線形写像ではないことを示せ．

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m;\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\\
&(2)\quad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

例 2.25 (線形写像の具体例) 写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}; y=f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})$ は線形写像である．ただし，$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ とする．

例 2.26 (線形写像の具体例) 写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; y=f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3$ は線形変換である．f は点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ の平面 x_1x_2 への**射影変換**である．

2.6　線形写像の行列表示

定理 2.27 (線形写像の行列表示) 任意の線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は

$$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x},\quad A:m\times n$$

と**行列表示**が可能である．行列 A を f の**表現行列**という．

例 2.28 (線形写像の行列表示の具体例) 線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

をみたすとする．このとき f の行列表示 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を求める．

$$f(\boldsymbol{e}_1)=A\boldsymbol{e}_1,\quad f(\boldsymbol{e}_2)=A\boldsymbol{e}_2$$

であるから，

$$\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=AE=A$$

が成り立つ．よって，

$$A=\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\end{bmatrix}$$

を得る．

例 2.29 (線形写像の行列表示) 写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; y=f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3$ を行列表示する．まず，標準基底を f で写すと

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{e}_1)&=\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\\
f(\boldsymbol{e}_2)&=\boldsymbol{e}_2-(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3,\\
f(\boldsymbol{e}_3)&=\boldsymbol{e}_3-(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

となる．任意のベクトル

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

を f で写すと，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + x_3 f(\boldsymbol{e}_3) \\
&= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

と行列表示される．表現行列は

$$
A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

である．

例 2.30 (行列表示の具体例) 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$
f(\boldsymbol{u}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

をみたす写像とする．このとき f の行列表示 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を求める．

まず，基底変換 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} \to \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ を考える．このとき

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} P = EP = P
$$

であり，

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

が成り立つ．これより，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2, \\
\boldsymbol{e}_2 &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2
\end{aligned}
$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{e}_1) &= f\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2\right) = \frac{1}{2}f(\boldsymbol{u}_1) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_2), \\
f(\boldsymbol{e}_2) &= f\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2\right) = \frac{1}{2}f(\boldsymbol{u}_1) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_2)
\end{aligned}
$$

であり，さらには

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f(\boldsymbol{u}_1) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_2) & \frac{1}{2}f(\boldsymbol{u}_1) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) \end{bmatrix} P^{-1}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を f で写すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2)\\ &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2)\end{bmatrix} P^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

と行列表示される．表現行列は

$$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2)\end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

である．

2.7 線形写像の表現行列

定義 2.31 (線形写像の表現行列) ベクトル空間 U の基底を $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とし，ベクトル空間 V の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ とする．このとき，線形写像 $f : U \to V$ が

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{u}_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m\end{bmatrix} A, \qquad A : m \times n$$

をみたすとき，行列 A を U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ に関する**表現行列**という．

注意 2.32 (表現行列) 前節の表現行列の定義では，線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \tilde{A}\boldsymbol{x}$ と表されるとき $\tilde{A}$ を表現行列と呼ぶ，というものであった．この行列 $\tilde{A}$ と本節の定義による表現行列 A とは基底を標準基底にとるとき一致する．

線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を考える．$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ とし，$\mathbb{R}^m$ の標準基底を $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_m$ とおく．このとき，本節の表現行列の定義より

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \cdots & \boldsymbol{e}'_m\end{bmatrix} A = EA = A$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^n$ の任意のベクトル

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

を f で写すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n)\\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n)\\ &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}\\ &= A\boldsymbol{x} = \tilde{A}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

となる．A と $\tilde{A}$ は一致する．

例 2.33 (表現行列の具体例) 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$;

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

を考える．標準基底を

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{e}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする．このとき,

$$f(\boldsymbol{e}_1) = A\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_2' + 4\boldsymbol{e}_3',$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = A\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_3'$$

である．よって

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_2' + 4\boldsymbol{e}_3' & \boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3' \end{bmatrix} A$$

が成立する．線形写像 f の標準基底における表現行列は A である．

注意 2.34 (表現行列) 線形写像 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の標準基底における表現行列は A である．

定理 2.35 (基底を取り換えたときの表現行列) 線形写像 $f : U \to V$ の U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ に関する表現行列を A とする．すなわち,

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{u}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{bmatrix} A$$

とする．U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \cdots, \boldsymbol{u}_n'\}$ と V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_m'\}$ に関する表現行列を B とする．すなわち,

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1') & f(\boldsymbol{u}_2') & \cdots & f(\boldsymbol{u}_n') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1' & \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \boldsymbol{v}_m' \end{bmatrix} B$$

とする．このとき

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ．ここで P, Q は基底の変換行列であり,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1' & \boldsymbol{u}_2' & \cdots & \boldsymbol{u}_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} P,$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1' & \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \boldsymbol{v}_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{bmatrix} Q$$

である．

（証明）

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1') & f(\boldsymbol{u}_2') & \cdots & f(\boldsymbol{u}_n') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\sum_k p_{k1}\boldsymbol{u}_k') & f(\sum_k p_{k2}\boldsymbol{u}_k') & \cdots & f(\sum_k p_{kn}\boldsymbol{u}_k') \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_k p_{k1} f(\boldsymbol{u}_k') & \sum_k p_{k2} f(\boldsymbol{u}_k') & \cdots & \sum_k p_{kn} f(\boldsymbol{u}_k') \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{u}_n) \end{bmatrix} P \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{bmatrix} AP
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1') & f(\boldsymbol{u}_2') & \cdots & f(\boldsymbol{u}_n') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1' & \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \boldsymbol{v}_m' \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{bmatrix} QB
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
AP &= QB \\
B &= Q^{-1}AP
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

例 2.36 (基底を取り換えたときの表現行列の具体例) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$;

$$
\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}
$$

を考える．$\mathbb{R}^3$ の基底を

$$
\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}
$$

とし，$\mathbb{R}^2$ の基底を

$$
\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}
$$

とする．f の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ と基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ に関する表現行列 B を求める．なすわち，

$$
\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} B
$$

をみたす B を求める．まず，$\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$ を考える．このとき，標準基底における f の表現行列は A であるから，

$$
\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2' \end{bmatrix} A = A
$$

が成り立つ．つぎに，基底の変換行列は

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} P = EP = P, \\
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2' \end{bmatrix} Q = EQ = Q
\end{aligned}
$$

である．以上より，

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 \end{bmatrix} AP = AP, \\
\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 \end{bmatrix} QB = QB
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，

$$
B = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 7 \\ -5 & -6 & -2 \end{bmatrix}
$$

を得る．

2.8 線形変換

2.9 線形写像の合成写像

定義 2.37 (合成写像) 線形写像 $f : U \to V;\ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ と $g : V \to W;\ \boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y})$ より定まる写像

$$
h : U \to W; \qquad \boldsymbol{z} = g(f(\boldsymbol{x}))
$$

を f と g の**合成写像（composite）**といい，

$$
h = g \circ f
$$

と表記する．

定理 2.38 (線形写像の合成写像) 線形写像の合成写像もまた線形写像となる．

定理 2.39 (合成写像の表現行列) 線形写像 f, g の表現行列をそれぞれ A, B とする．このとき，合成写像 $h = g \circ f$ の表現行列は $C = BA$ となる．

例 2.40 (合成写像の表現行列の具体例)

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; &\qquad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad A : m \times n \\
g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l; &\qquad \boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y}) = B\boldsymbol{y}, \quad B : l \times m
\end{aligned}
$$

を考える．このとき

$$
\begin{aligned}
&h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l; \\
&\boldsymbol{z} = g \circ f(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = B(A\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}, \quad C : l \times n
\end{aligned}
$$

である．表現行列は

$$
C = BA
$$

となる．

2.10 正則変換

定義 2.41 (正則変換) 線形変換 $f: V \to V$ が**上への 1 対 1 写像**であるとき，f を**正則変換（regular mappping）** という．

注意 2.42 (逆変換) 上への 1 対 1 写像であれば**逆変換** f^{-1} が存在する．正則変換は逆変換が存在する線形変換である，と読み替えてもよい．

定理 2.43 (正則変換と正則行列) 線形写像 f が正則変換であることと，f の表現行列が正則行列であることとは必用十分な条件である．

（証明） 合成写像と表現行列は

$$g \circ f = h, \qquad BA = C$$

と表される．$g = f^{-1}$ のとき

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id} : \text{恒等変換}, \qquad BA = E : \text{単位行列}$$

が成り立つ．よって $B = A^{-1}$ である．

注意 2.44 (逆変換と逆行列) f^{-1} が存在するとき表現行列 A の逆行列 A^{-1} も存在する．

例 2.45 (正則変換の具体例) 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

の表現行列とその行列式は

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

である．A は正則行列であるから，f は正則変換である．

例 2.46 (正則変換ではない具体例) 射影変換 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3$ の表現行列とその行列式は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

である．よって A は正則でないので f もまた正則ではない．

例えば点 $(x_1, x_2, 1)$ と点 $(x_1, x_2, 2)$ を射影変換 f で写すとどちらも点 $(x_1, x_2, 0)$ に写される．他にも点 $(x_1, x_2, 0)$ を通り軸 x_3 に平行な直線上の点は全て f により点 $(x_1, x_2, 0)$ に写される．逆変換 f^{-1} を考えるとき点 $(x_1, x_2, 0)$ から戻され点は直線上に無限に存在することになる．よって f は 1 対 1 写像ではない．また，$\mathbb{R}^3$ の任意の点は f により全て x_1x_2 平面上に写される．x_1x_2 平面は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるので，f は上への写像でもない．

2.11 直交行列

定義 2.47 (直交行列) 正方行列 A が

$$AA^T = A^T A = E$$

をみたすとき A を**直交行列（orthogonal matrix）**という.

定理 2.48 (直交行列の行列式) 直交行列の行列式は

$$\det(A) = \pm 1$$

である.

（証明） $AA^T = E$ より，両辺の行列式をとると

$$\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2 = \det(E) = 1$$

となるので $\det(A) = \pm 1$ を得る.

定理 2.49 (直交行列の正則性) 直交行列は正則である.

（証明） $\det(A) = \pm 1 \neq 0$ であるから.

定理 2.50 (直交行列の逆行列) 直交行列の逆行列は

$$A^{-1} = A^T$$

である.

（証明） A は正則であるか A^{-1} を $AA^T = E$ に左から掛けると

$$\begin{aligned} A^{-1}AA^T &= A^{-1}E \\ A^T &= A^{-1} \end{aligned}$$

を得る.

定理 2.51 (直交行列の積) 直交行列の積もまた直交行列である.

（証明）

$$AB(AB)^T = A(BB^T)A^T = AEAA^T = AA^T = E.$$

定理 2.52 (直交行列と正規直交系) 直交行列の列ベクトルまたは行ベクトルは正規直交系である.

（証明） 直交行列 A を列ベクトル

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

とおく．$AA^T = E$ より，

$$AA^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^T \\ \boldsymbol{a}_2{}^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{a}_n{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1{}^T & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2{}^T & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_n{}^T \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1{}^T & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2{}^T & \cdots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_n{}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_1{}^T & \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_2{}^T & \cdots & \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_n{}^T \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = E$$

となるので，

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$$

を得る．

例 2.53 (直交行列の具体例) A: 2×2 の直交変換は

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

のみである．

問 2.54 (直交行列) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & c & -b \\ a & b & c \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b & a & c \\ a & 1 & a \\ c & a & -b \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c & -b & a \\ b & c & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

が直交行列となるように a, b, c を定めよ．

2.12 直交変換

定義 2.55 (直交変換) 線形変換 $f : V \to V$; $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ が

$$\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$$

をみたすとき，f を**直交変換（orthogonal transformation）**という．

注意 2.56 (直交変換のノルムの不変性) ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さと直交変換で写されたベクトル $\boldsymbol{y}$ の長さは等しい．

定義 2.57 (直交変換の内積の不変性) 線形変換 f が直交変換であるための必用十分条件は

$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}')) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'), \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$$

である．

（証明）

定理 2.58 (直交変換の角の不変性) ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ を直交変換 f に写したベクトルを $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ とする．このとき，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ のなす角と $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ のなす角とは等しい．

注意 2.59 (合同変換) 直交変換は合同変換のひとつである．**合同変換（congruent transformation）** とは，長さと角を不変に保つ変換のことをいう．合同変換で写される図形は，変換前の図形と後の図形とは合同となる．また，角を不変に保ち，長さはある定数倍になる変換のことを**相似変換（similarity transformation）**という．角を不変に保つ変換を**等角変換**という．

定理 2.60 (直交変換と直交行列) 直交変換の表現行列は直交行列である．

（証明）　（十分）A を直交行列とする．

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{x}$$

とおく．このとき

$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}')) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}') = (A\boldsymbol{x})^T A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^T (A^T A)\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^T E\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$$

をみたす．

2.13 回転移動

例 2.61 ($\mathbb{R}^2$ の回転) 直交変換

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \\ &\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を考える．この直交変換 f は $\mathbb{R}^2$ 内の点を原点を中心に反時計回りに角 θ 回転移転を表す．直交行列 R_θ は $\mathbb{R}^2$ の**回転行列**という．

標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を f で写したベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1 = f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

とおく．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ はそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を原点を中心に θ 回転させたベクトルである．次に，任意のベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$$

を f で写すと

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2$$

と表される．$\boldsymbol{y}$ は基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ における座標 (x_1, x_2) の点である．元の点 $\boldsymbol{x}$ は標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ における座標 (x_1, x_2) の点であるので，$\boldsymbol{y}$ は原点を中心に θ 回転した点となる．

問 2.62 (直交行列と回転行列) $AA^T = E$ をみたす 2×2 型の実行列は回転行列のみである．これを示せ．

例 2.63 ($\mathbb{R}^3$ の回転) 直交変換

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;$$
$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = R\boldsymbol{x}$$

を考える．この写像は x_3 軸を中心に θ 回転を表す．$RR^T = E$ より R は直交行列である．

例 2.64 ($\mathbb{R}^3$ の回転) x_1 軸まわりの回転：

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

x_2 軸まわりの回転：

$$R_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

x_3 軸まわりの回転：

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R_1, R_2, R_3 は直交行列である．

x_1 軸まわりに回転し，その後 x_2 軸まわりに回転させるとき，表現行列は R_2R_1 である．これもまた直交行列である．同様に R_1R_2, R_1R_3, $\cdots$ もまた回転を表す．ただし，$R_iR_j \neq R_jR_i$ であることに注意すること．回転する順番が違えば異なる回転を表すからである．

2.14 表現行列と基底の変換行列

2.15 線形写像の像と核

定義 2.65 (像，核) 線形写像 $f : U \to V$ に対して次の集合を

$$\mathrm{Im}(f) = f(U) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}), \forall u \in U\}$$

を f の**像（image）**という．また，

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{u} \in U \mid f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_V\}$$

を f の**核（kernel）**という．

定理 2.66 (像，核と部分空間) 線形写像 $f : U \to V$ の像 $\mathrm{Im}(f)$ は V の部分空間である．また，核 $\mathrm{Ker}(f)$ は U の部分空間である．

（証明）

2.16　線形写像の階数と退化次数

定義 2.67 (退化次数，階数) 像 $\mathrm{Im}(f)$ の次元を**階数（rank）**といい，

$$\mathrm{rank}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

と定義する．また，核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を**退化次数（nullity）**といい，

$$\mathrm{null}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

と定義する．

定理 2.68 (退化次数，階数) 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の階数は

$$\mathrm{rank}\,(f) = \mathrm{rank}\,(A)$$

であり，退化次数は

$$\mathrm{null}(f) = n - \mathrm{rank}\,(A)$$

である．

（証明）

定理 2.69 (退化次数，階数) 線形写像 $f : U \to V$ に関して

$$\mathrm{null}(f) + \mathrm{rank}\,(f) = \dim(U)$$

が成立する．

（証明）

例 2.70 (線形写像の像と核の具体例) 線形写像

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3; \qquad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

の像 $\mathrm{Im}(f)$，核 $\mathrm{Ker}(f)$ とそれらの次元 $\mathrm{rank}\,(f)$, $\mathrm{null}(f)$ を求める．

2.17　直線の線形変換

例 2.71 (直線の線形変換) 直線 $y = ax + b$ を線形変換

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f : \boldsymbol{x} = (x, y) \mapsto \boldsymbol{x}' = (x', y')$$
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

で写す．このとき写されてできる図形を考える．

2.18　点の直線への射影変換

2.19　点の平面への射影変換

例 2.72 (点の平面への射影) 点 $\boldsymbol{x}$ から平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ への**射影変換**を考える.

2.20　直線の平面への射影変換

例 2.73 (直線の平面への射影)

2.21　射影変換の表現行列

3　行列の固有値問題

3.1　固有値問題

3.2　固有値と固有ベクトル

3.3　固有空間

3.4　行列の固有値

3.5　一般の線形変換の固有値と固有空間の計算

3.6　相似変換

3.7　行列の対角化

3.8　対称行列の対角化

3.9　行列の三角化

3.10　実標準形

3.11　直交行列の対角化

3.12　エルミート行列の対角化

3.13　ユニタリー行列の対角化

3.14　ジョルダン標準形

4　2 次形式

4.1　2 次曲線，2 次曲線