

線形代数学 II (近藤) 演習問題#9

問1 次のベクトルのノルムをすべて求めよ。また、二つのベクトルの内積とそれらの成す角をすべての組合せで求めよ(角度は実ベクトルのみ求める)。ただし、内積は次のように定義するとする。

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{a}, \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$\mathbb{C}^n \ni \mathbf{a}, \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \cdots + a_n \bar{b}_n$$

$$\mathbb{R}[x]_n \ni f(x), g(x), \quad (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$(1) \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \mathbb{R}^4 \ni \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \mathbb{C}^1 \ni \mathbf{a}_1 = -1 + i, \mathbf{a}_2 = -2 + 3i, \mathbf{a}_3 = -5 - 4i, \mathbf{a}_4 = -3i, \mathbf{a}_5 = -2i, \mathbf{a}_6 = 3 - i, \mathbf{a}_7 = -1 + 2i.$$

$$(5) \mathbb{C}^2 \ni \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 + i \\ 2 - 3i \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 - i \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 + i \\ -1 + i \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 - 2i \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 7i \\ -i \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 + i \end{bmatrix}.$$

$$(6) \mathbb{C}^3 \ni \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 + i \\ 3 - i \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 + i \\ 2 - 3i \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 - i \\ i \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 5 + 4i \\ 2 + 4i \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 7i \\ 3 \\ 3 + 5i \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3i \end{bmatrix}.$$

$$(7) \mathbb{R}[x]_1 \ni f_1(x) = 1 + x, f_2(x) = 5x, f_3(x) = -3 + 2x, f_4(x) = 2 - 5x, f_5(x) = 5, f_6(x) = 10 - 3x.$$

$$(8) \mathbb{R}[x]_2 \ni f_1(x) = 1 + x + x^2, f_2(x) = 3x - x^2, f_3(x) = 5 + x, f_4(x) = 3 - x + 2x^2, f_5(x) = 2.$$

$$(9) \mathbb{R}[x]_3 \ni f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3, f_2(x) = -3x + x^2 - 2x^3, f_3(x) = 2x^2 + 3x^3, f_4(x) = 3 - x + 2x^2.$$

問2 次のベクトル空間 W の直交補空間 W^\perp を求めよ。ただし直交補空間は次のように定義する。

$$W^\perp = \{ \mathbf{u} \in V \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in W \}$$

$$(1) \mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \forall c \in \mathbb{R} \right\} \quad (2) \mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\}$$

$$(3) \mathbb{C}^2 \supset W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 \mid \mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 + i \\ -2 - 3i \end{bmatrix}, \forall c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(4) \mathbb{R}[x]_1 \supset W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_1 \mid f(x) = c(1 + x), \forall c \in \mathbb{R} \}$$