

線形代数学 II (近藤) 演習問題#5

問 1 次の写像は線形写像かどうか述べよ．線形写像であるとき，写像の核と像の基底の組をそれぞれ求め，退化次数と階数を求めよ．

(1) $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto y \in \mathbb{R}, \quad y = f(x) = 2x.$

(2) $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto y \in \mathbb{R}, \quad y = f(x) = 3x + 1.$

(3) $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto y \in \mathbb{R}, \quad y = f(x) = x^2.$

(4) $f: \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$

(5) $f: \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 3 \\ x_1 - x_2 - 5 \end{bmatrix}.$

(6) $f: \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}.$

(7) $f: \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

(8) $f: \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

(9) $f: \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

(10) $f: \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

(11) $f: \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

(12) $f: \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

(13) $f: \mathbb{R}^4 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

(14) $f: \mathbb{R}^5 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -8 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$