線形代数学 II（近藤）　演習問題#1

問　ベクトル空間 V の部分集合 W が V の部分空間であるか述べよ．

ヒント：

— 部分空間となる場合は三つの条件をチェックする．

— 部分集合とならない場合は条件を満たさない反例を一つ見つけ出す．

— 具体的に集合の絵を（可能な範囲で）書いて考える．

(1)　$V=\mathbb{R}^2\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$

(2)　$V=\mathbb{R}^2\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}\right\}$

(3)　$V=\mathbb{R}^2\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{r}2x_1+3x_2\geq 0\\4x_1+x_2\geq 0\end{array}\right\}$

(4)　$V=\mathbb{R}^2\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{r}2x_1+3x_2\geq 1\\4x_1+x_2\geq 1\end{array}\right\}$

(5)　$V=\mathbb{R}^2\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2+{x_2}^2\leq 1\right\}$

(6)　$V=\mathbb{R}^2\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1-x_2=0\right\}$

(7)　$V=\mathbb{R}^2\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1-x_2=3\right\}$

(8)　$V=\mathbb{R}^3\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

(9)　$V=\mathbb{R}^3\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}\right\}$

(10)　$V=\mathbb{R}^3\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$

(11)　$V=\mathbb{R}^3\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}\right\}$

(12)　$V=\mathbb{R}^3\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 1\right\}$

(13) $V=\mathbb{R}^3\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0\right\}$

(14) $V=\mathbb{R}^3\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r}3x_1-x_2+5x_3\geq 0\\ x_2-2x_3\geq 0\end{array}\right\}$

(15) $V=\mathbb{R}^3\supset W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r}3x_1-x_2+5x_3\geq 1\\ x_2-2x_3\geq 1\\ x_3\geq 1\end{array}\right\}$

ヒント：

— 多項式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ が満たす条件を具体的に計算して考える.

(16) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(x)=0\}$

(17) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(x)=1\}$

(18) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(0)=0,\ f(1)=0\}$

(19) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(0)=1,\ f(1)=1\}$

(20) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(0)\geq 0,\ f(1)\geq 0\}$

(21) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(0)\geq 1,\ f(1)\geq 1\}$

(22) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(x)\geq 0\}$

(23) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(x)\geq 1\}$

(24) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\left\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid (f(1))^2=0\right\}$

(25) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\left\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; \frac{df(x)}{dx}=0\right\}$

(26) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\left\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; \frac{df(x)}{dx}=1\right\}$

(27) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\left\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; f(1)=0,\ \frac{df(1)}{dx}=0\right\}$

(28) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\left\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; f(1)=0,\ \frac{df(1)}{dx}=0\,,\ \frac{d^2f(1)}{dx^2}=0\right\}$

(29) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\left\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; f(1)=1,\ \frac{df(1)}{dx}=1\,,\ \frac{d^2f(1)}{dx^2}=1\right\}$

(30) $V=\mathbb{R}[x]_3\supset W=\left\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \;\middle|\; f(0)+\frac{df(1)}{dx}=0\,,\ \frac{df(0)}{dx}+\frac{d^2f(1)}{dx^2}=0\right\}$