

線形代数学 I (2) (近藤)

2004年6月7日

I. 3次元空間内の点  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(3, 0, -2)$ ,  $P(1, 1, 0)$  を考える. 点  $C$  から直線  $AB$  に垂線を下ろしたときの足を  $D$  とする. 3点  $A, B, C$  を通る平面を  $H$  とする. 点  $P$  から平面  $H$  への垂線を  $L$  とする. 平面  $H$  と直線  $L$  の交点を  $Q$  とする. このとき,  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{AB} = \mathbf{b}$ ,  $\vec{AC} = \mathbf{c}$ ,  $\vec{AD} = \mathbf{d}$  とおく. 次の問 (1)–(14) に答えよ.

- (1) ベクトル  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  のノルムをそれぞれ求めよ.
- (2) 内積  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  を求めよ.
- (3) 角  $\theta = \angle BAC$  を示せ.
- (4) ベクトル  $\mathbf{b}$  を正規化したベクトル  $\mathbf{e}$  を示せ.
- (5) ベクトル  $\mathbf{d}$  をベクトル  $\mathbf{e}$  と  $\mathbf{c}$  を用いて表せ.
- (6) 点  $D$  の座標を求めよ.
- (7) 点  $C$  と直線  $AB$  との距離を求めよ.
- (8) 外積  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  を求めよ.
- (9) 平面  $H$  の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を求めよ.
- (10) 平面  $H$  上の点  $(x, y, z)$  が満たす方程式を示せ.
- (11) 直線  $L$  上の点の位置ベクトル  $\mathbf{x}$  をパラメータ  $t$  を用いて表せ.
- (12) 直線  $L$  上の点  $(x, y, z)$  が満たす方程式を示せ.
- (13) 点  $Q$  の座標を求めよ.
- (14) 点  $P$  と平面  $H$  との距離を求めよ.

II. 連立方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

を考える. 次の問 (1)–(3) に答えよ.

- (1) 拡大係数行列を簡約化しその階段行列を示せ.
- (2) 拡大係数行列の階数を示せ.
- (3) 方程式の解を示せ.

III. 行列  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  を簡約化したときの階段行列を  $B$  とする. このとき, ある行列  $P$  を用いて  $B = PA$  が成り立つ. 行列  $P$  を示せ.