線形代数学 I

近藤弘一

最終更新：平成 17 年 2 月 1 日

目次

0　まえおき

- ベクトルとは向きと大きさをもつ量である．ベクトルは和とスカラー倍の演算が定義されている．ベクトルの性質のみを抽象化すると，いろいろな量がベクトルとみなせる．例えば，列ベクトル $\mathbb{R}^n$，多項式 $\mathbb{R}[x]_n$，連続関数 $C(a,b)$ などがベクトルとみなされる．
- 行列は，ベクトルからベクトルへとの変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ する操作 (作用，演算，operator) を表す量である．
- 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解法．

1 ベクトルと図形

§ 1.1 ベクトル

ベクトルの定義は主に三つある．

定義 1.1 **（ベクトル#1）** 位置の違いを無視して，向きと大きさをもつ量（矢印，**有向線分（oriented segment）**）を**ベクトル（vector）**という．これに対して方向をもたない普通の量を**スカラー（scalar）**という． □

注意 1.2 **（ベクトルの平行移動は同じもの）** **始点（initial point）** A から**終点（terminal point）** B への有向線分を表すベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と表記する．ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{PQ}$ とを原点に平行移動したときこれらのベクトルが等しければ，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PQ}$ である．すなわち，ベクトルは平行移動しても同じ量であるとみなす．たくさんある同じベクトルのうち代表して始点が原点にあるものを選ぶ． □

定義 1.3 **（ベクトル#2）** **列ベクトル（column vector）**

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

と**行ベクトル（row vector）**

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

を総称して**ベクトル（vector）**という．n 次の列ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ で表す．n 次の行ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}_n$ で表す．$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n$ を n **次元実ベクトル空間（n-dimensional real vector space）**という． □

注意 1.4 **（列ベクトル，行ベクトル）** n 次の列ベクトルは $n\times 1$ 行列である．n 次の行ベクトルは $1\times n$ 行列である． □

定義 1.5 **（ベクトル#3）** **ベクトル空間（vector space）** V の元 $\boldsymbol{v}$ を**ベトクル（vector）**という． □

§ 1.2 位置ベクトル

定義 1.6 **(位置ベクトル)** $\mathbb{R}^n$ 空間内の点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と原点 $O(0, 0, \cdots, 0)$ より得られるベクトル

$$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

を点 P の**位置ベクトル(position vector)**という．点 P とベトクル $\boldsymbol{p}$ を同一視する． □

注意 1.7 **(位置ベクトル)** 点 P の座標が $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のときは，$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と表記する．点 P の位置ベクトルが $\boldsymbol{p}$ のときは，$P(\boldsymbol{p})$ と表記することにする． □

例 1.8 **(位置ベクトルの具体例)** 点 $A(1) \in \mathbb{R}^1$ の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

である． □

例 1.9 **(位置ベクトルの具体例)** 点 $A(1, 1), B(2, -1) \in \mathbb{R}^2$ の位置ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

である． □

例 1.10 **(位置ベクトルの具体例)** 点 $A(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^2$ の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

である． □

§ 1.3 ベクトルの演算

定義 1.11 **（ベクトルの和）** ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して，**ベクトルの和（vector sum）**を

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

と定義する． □

定義 1.12 **（ベクトルのスカラー倍）** ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，ベクトルの**スカラー倍（scalar multiple）**を

$$\boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{a} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

と定義する． □

注意 1.13 **（ベクトルの和）** ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とそれらの和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を考える．このとき，点 O, $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, $C(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ は平行四辺形となる． □

注意 1.14 **（ベクトルのスカラー倍）** ベクトル $\boldsymbol{a}$ とそのスカラー倍 $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a}$ を考える．点 $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$ とする．このとき点 B は直線 OA 上にある．線分 $\overline{OB}$ の長さは線分 $\overline{OA}$ の長さの α 倍である． □

例 1.15 **（ベクトルの和の具体例）**

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{9}$$

のとき，これらの和は

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 0-1 \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

である． □

例 1.16 **（ベクトルのスカラー倍の具体例）**

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{11}$$

のとき，$\boldsymbol{a}$ の 2 倍は

$$2\boldsymbol{a} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 0 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{12}$$

である． □

§ 1.4 線形結合

定義 1.17 **(線形結合)** ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\boldsymbol{c} = \alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b} \tag{13}$$

を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の 1 **次結合**または**線形結合(linear combination)**という. □

注意 1.18 **(線形結合)** 線形結合 $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ を考える. $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, $A'(\alpha\boldsymbol{a})$, $B'(\beta\boldsymbol{b})$, $C(\boldsymbol{c})$ とする. 点 A', B' はそれぞれ直線 OA, OB の延長線上にあり, $\overline{OA'} = \alpha\overline{OA}$, $\overline{OB'} = \beta\overline{OB}$ を満す. 点 O, A', B', C は平行四辺形となる. □

例 1.19 **(線形結合の具体例)** ベクトル $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ を考える. 原点 O から点 $A(\boldsymbol{a})$ への延長線上の点で, 原点との長さが $\overline{OA}$ の 2 倍となる点を A' とする. 原点 O から点 $B(\boldsymbol{a})$ とは逆向きにのばした直線上の点で, 原点との長さが $\overline{OB}$ の 3 倍となる点を B' とする. 点 C は線分 OA', OB' からなる平行四辺形の原点の対角線上の頂点となる. □

定義 1.20 **(基本ベクトル)** $\mathbb{R}^n$ 空間の座標軸上の点

$$E_1(1,0,0,\cdots,0)\,,\quad E_2(0,1,0,\cdots,0)\,,\quad E_3(0,0,1,\cdots,0)\,,\quad \cdots,\quad E_n(0,0,0,\cdots,1) \tag{14}$$

の位置ベクトル

$$\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

を $\mathbb{R}^n$ の**基本ベクトル(fundamental vectors)**という. □

例 1.21 **(線形結合の具体例)** $\mathbb{R}^n$ 空間内の任意の点 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots x_n\boldsymbol{e}_n \tag{16}$$

であり, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の線形結合で表される. □

§ 1.5 ベクトルの成分

定義 1.22 **(ベクトルの成分)** ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots x_n\boldsymbol{e}_n \tag{17}$$

と表されるとき，係数の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ に関するベクトル $\boldsymbol{x}$ の**成分（component）**または**座標（coordinate）**という．

また，$\mathbb{R}^n$ の**基底（basis）**（座標軸と同じ向きのベクトル）$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が与えられているとする．ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{u}_1 + y_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots y_n\boldsymbol{u}_n \tag{18}$$

と表されるとき，係数の組 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関するベクトル $\boldsymbol{x}$ の**成分（component）**または**座標（coordinate）**という． □

例 1.23 **(ベクトルの成分の具体例)** $\mathbb{R}^2$ 空間とその中の点

$$\boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}_2 = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}_3 = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \quad \in \mathbb{R}^2 \tag{19}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は基底であり，

$$\Sigma' = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} == \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{20}$$

とする．このとき

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\,, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2\,, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{c}_3 = \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta \\ -\alpha + \beta \end{bmatrix} = (\alpha + 2\beta)\boldsymbol{e}_1 + (-\alpha + \beta)\boldsymbol{e}_2 \tag{23}$$

が成り立つ．ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ の基本ベクトル

$$\Sigma = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する成分はそれぞれ $(4, -1)_\Sigma$, $(1, -4)_\Sigma$, $(\alpha + 2\beta, -\alpha + \beta)_\Sigma$ である．ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ の基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ に関する成分はそれぞれ $(2, 1)_{\Sigma'}$, $(2, -1)_{\Sigma'}$, $(\alpha, \beta)_{\Sigma'}$ である．

これは次のように考える．$\mathbb{R}^2$ の座標軸を x_1x_2 とする．これとは別の座標軸として y_1y_2 を導入する．原点を通り $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの座標軸を y_1 とし，同様に $\boldsymbol{b}$ と同じ向きの座標軸を y_2 とする．座標軸 y_1, y_2 の目盛はそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の長さを 1 として書く．このとき点 $C_1(\boldsymbol{c}_1)$, $C_2(\boldsymbol{c}_2)$, $C_3(\boldsymbol{c}_3)$ は座標軸 y_1y_2 上の座標で表すとそれぞれ $(2, 1)_{\Sigma'}$, $(2, -1)_{\Sigma'}$, $(\alpha, \beta)_{\Sigma'}$ となる． □

§ 1.6 内分点

定理 1.24 **（内分点）** 点 $A(\boldsymbol{a}), B(\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^n$ に対して点 $P(\boldsymbol{p})$ が

$$AP : PB = t : 1 - t \tag{24}$$

を満すとき,

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = (1 - t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{25}$$

が成り立つ．$0 < t < 1$ のとき点 P は点 A, B の**内分点（internally dividing point）**を表し，$t < 0, 1 < t$ のとき**外分点（externally dividing point）**を表す．

□

注意 1.25 **（内分点とパラメータ）** 端点は $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{b}$ であり，A, B の中点は $\boldsymbol{p}(1/2) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})/2$ である．

□

例 1.26 **（内分点の具体例）** 点 $A(1, 1)$, $B(2, -1) \in \mathbb{R}^2$ を考える．このとき $AP : PB = t : 1 - t$ とする内分点 $P(\boldsymbol{p})$ は

$$\boldsymbol{p} = (1 - t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = (1 - t)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t \\ 1 - 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

と与えられる．点 P の座標を (x, y) とする．このとき

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t \\ 1 - 2t \end{bmatrix} \tag{27}$$

より

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-2} = t \tag{28}$$

が成り立つ．t を消去すると

$$2x + y - 3 = 0 \tag{29}$$

となる．この式は点 A, B を通る $\mathbb{R}^2$ 内の直線の方程式を表す．内分点 P は直線上の点である．

□

問 1.27 **（2 次元空間内の内分点）** 点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ を $AP : PB = t : 1 - t$ と内分する点 $P(x, y)$ を求めよ．また，点 A, B を通る直線の方程式を求めよ．

□

例 1.28 **(内分点の具体例)** 点 $A(1,1,1),\ B(2,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ を考える．このとき $AP : PB = t : 1-t$ と内分する点 $P(\boldsymbol{p})$ は

$$\boldsymbol{p} = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = (1-t)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+t\\1-2t\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} \tag{30}$$

と与えられる．$P(x,y,z)$ とすると $\boldsymbol{p} = [x\ y\ z]^T$ より

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = t\,, \quad z = 1 \tag{31}$$

が成り立つ．この式は点 A, B を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線の方程式を表す． □

定理 1.29 **(3 次元空間内の内分点と直線の方程式)** 点 $A(a_1,a_2,a_3),\ B(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ を考える．$AP : PB = t : 1-t$ と内分する点を $P(\boldsymbol{p}) = P(x,y,z)$ とする．このとき

$$\boldsymbol{p}(t) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = a + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \tag{32}$$

であり，

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{bmatrix} \tag{33}$$

が成り立つ．点 A, B を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線の方程式は

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} = \frac{z-a_3}{b_3-a_3} = t \tag{34}$$

で与えられる． □

注意 1.30 **(内分点，外分点が成す集合は 1 次元)** パラメータ t が一つ定まれば $\mathbb{R}^n$ 内の点が $\boldsymbol{p}(t) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ により一つ定まる．t は $\mathbb{R}^1$ 内の全ての点を動く．よって $\mathbb{R}^1$ 内の全ての点と直線 $\boldsymbol{p}(t)$ 上の全ての点は一対一対応する．$\mathbb{R}^1$ は 1 次元の空間であるので直線 $\boldsymbol{p}(t)$ が成す集合もまた 1 次元である． □

§ 1.7 内積

定義 1.31 **(内積)** $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{a} = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]^T$, $\boldsymbol{b} = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_n]^T$ に対して

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_k^n a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} \tag{35}$$

なる二項演算を**内積（inner product）**または**スカラー積（scalar product）**という．また，$\mathbb{C}^n \ni \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対しては

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_k^n a_k \bar{b}_k = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \cdots + a_n \bar{b}_n = \boldsymbol{a}^T \overline{\boldsymbol{b}} \tag{36}$$

と定義する． □

例 1.32 **(内積の具体例)**

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{37}$$

の内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 1 \tag{38}$$

である．

$$\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

の内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 2 \tag{40}$$

である． □

定理 1.33 **(内積の性質)**

(i) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$

(ii) $(\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

(iii) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$

(iv) $\boldsymbol{a} \neq 0$ のとき $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} > 0$

□

問 1.34 **(内積の性質)** これを示せ． □

§ 1.8 ノルム

定義 1.35 **（ノルム）** ベクトル $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{a}$ または $\mathbb{C}^n \ni \boldsymbol{a}$ に対して

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \tag{41}$$

をベクトルの**ノルム（norm）**または**長さ（length）**という. □

例 1.36 **（ノルムの具体例）**

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

のノルムはそれぞれ

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{1 \times 1 + 1 \times 1} = \sqrt{2}, \tag{43}$$

$$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt{2 \times 2 + (-1) \times (-1)} = \sqrt{5} \tag{44}$$

である.

$$\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{45}$$

のノルムはそれぞれ

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} |a_k|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \tag{46}$$

$$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} |b_k|^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \tag{47}$$

である. □

定理 1.37 **（ノルムの性質）** **シュバルツの不等式（Schwartz' inequality）**：

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \tag{48}$$

三角不等式（triangle inequality???）：

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \tag{49}$$

□

§ 1.9 単位ベクトル

定義 1.38 **（単位ベクトル）** ノルムが 1 のベクトルを**単位ベクトル（unit vectar）**という．□

例 1.39 **（単位ベクトルの具体例）**

$$\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{50}$$

は $\|\boldsymbol{e}_j\| = 1$ であり全て単位ベクトルである．□

定義 1.40 **（正規化）** あるベクトルを向きが同じで長さが 1 のベクトルに変換することを**正規化（normalization）**という．□

例 1.41 **（正規化の具体例）** ベクトル $\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = [1\ 1]^T$ を正規化し $\boldsymbol{e}$ とする．すなわち

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{51}$$

と得られる．□

§ 1.10 ベクトルの成す角

定義 1.42 **(ベクトルの成す角)** $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \tag{52}$$

により得られる θ をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**成す角 (angular)** という．$\cos\theta$ を**方向余弦 (direction cosine)** という．

□

注意 1.43 **(内積とノルムの比)** シュバルツの不等式より

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \leq 1 \tag{53}$$

となることに注意する．

□

例 1.44 **(成す角の具体例)**

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{54}$$

を考える．このとき方向余弦は

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \tag{55}$$

となるので，成す角は

$$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0.4\pi \simeq 72^\circ \tag{56}$$

である．

□

§ 1.11 ベクトルの直交

定義 1.45 **(ベクトルの直交)** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する（orthogonal）**という．このとき $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ と表記する． □

例 1.46 **(ベクトルの直交の具体例)**

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{2}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \tag{57}$$

を考える．このとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times(-1)=0 \tag{58}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は互いに直交する． □

例 1.47 **(ベクトルの直交の具体例)**

$$\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} \tag{59}$$

を考える．このとき $i,j=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{60}$$

が成り立つ．よって $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ は互いに直交する． □

§ 1.12 内積と面積

注意 1.48 **(ベクトルの内積の図説)** ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角を θ とするとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta = (\|\boldsymbol{a}\|\cos\theta)(\|\boldsymbol{b}\|) \tag{61}$$

が成り立つ．すなわち，辺の長さが $\|\boldsymbol{a}\|\cos\theta$ と $\|\boldsymbol{b}\|$ の長方形の面積を表す．角度 θ の値により面積は変化する．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが同じ向きのとき，すなわち $\theta = 0$ のときは，面積は最大値をとり $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ で与えられる．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが直交し $\theta = \pi/2$ のときは，面積は最小値をとり $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ で与えられる．

□

定理 1.49 **(平行四辺形の面積)** $\mathbb{R}^2$ 内の点 O, $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, $D(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ を考える．このとき平行四辺形 $OADB$ の面積は

$$S = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) = |a_1b_2 - a_2b_1|\ , \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\ , \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{62}$$

で与えられる．ただし $\mathrm{abs}(x) = |x|$ とする．

□

問 1.50 **(平行四辺形の面積)** これを証明せよ．

（証明）角度 $\theta = \angle AOB$ とする．平行四辺形の面積は底辺の長さ $\|\boldsymbol{a}\|$ と高さ $\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ を掛けたものであるので，これを計算すると

$$S = \|\boldsymbol{a}\|\left(\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta\right) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \tag{63}$$

$$= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - \left(\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta\right)^2} = \sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \tag{64}$$

$$= \sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2} = \sqrt{{a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + {a_2}^2{b_1}^2} \tag{65}$$

$$= \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = |a_1b_2 - a_2b_1| \tag{66}$$

を得る．

□

§ 1.13 直線の方程式

定義 1.51 **(直線)** $\mathbb{R}^n$ 空間内の点 X の位置ベクトルが

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{q} + t\,\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{67}$$

と表されるとき，点 X の軌跡を**直線（line）**という．$\boldsymbol{p}$ を**方向ベクトル（tangent vector）**という．

□

注意 1.52 **($\mathbb{R}^3$ の直線の方程式)** 直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ を考える．ここで

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{68}$$

とおく．$\boldsymbol{x}$ は点 $Q(x_0, y_0, z_0)$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{p}$ の直線である．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \\ z_0 + ct \end{bmatrix} \tag{69}$$

より，t についてまとめると直線の方程式は

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t \tag{70}$$

と表される．これは $\mathbb{R}^3$ **の直線の方程式**である．

□

問 1.53 **($\mathbb{R}^3$ の直線の方程式の具体例)** 点 $(2, 1, 3)$ を通り方向ベクトルが $[-2\ 3\ 1]^T$ の直線の方程式を求めよ．

□

例 1.54 **($\mathbb{R}^3$ の直線の方程式の具体例)** 点 $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 3, -2)$ を通る直線の方程式を考える．直線は点 A を通り，方向ベクトルは $\overrightarrow{AB}$ である．すなわち，

$$\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{71}$$

とおく．**直線の方程式のパラメータ表示**は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ 2 + t \\ -1 - t \end{bmatrix} \tag{72}$$

である．t を消去して**直線の方程式の成分表示**は

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 1}{-1} \tag{73}$$

である．

□

注意 1.55 **($\mathbb{R}^2$ の直線の方程式)** 直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ を考える．このとき

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{74}$$

とおく．$\mathbb{R}^2$ **の直線の方程式**は

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = t \tag{75}$$

と表される．この式は点 $Q(x_0, y_0)$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{p} = [a\ b]^T$ であることが分かり易い形である．

式変形をする．$a' = b, b' = -a, c' = -a'x_0 - b'y_0$ とおく．すると

$$a'(x - x_0) + b'(y - y_0) = 0 \tag{76}$$

であり，または

$$a'x + b'y + c' = 0 \tag{77}$$

となる．この式は $\boldsymbol{n} = [a' \quad b']^T = [b \quad -a]^T$ を用いると

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}) = 0 \tag{78}$$

とも表される．$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = t\boldsymbol{p}$ であるから，ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = 0$ を満たす．すなわち $\boldsymbol{n}$ は方向ベクトル $\boldsymbol{p}$ と直交する．方向ベクトルと直交するベクトルを**法線ベクトル (normal vector)** という．

さらに式変形する．$\tilde{a} = -a'/b' = b/a$ とおく．すると

$$y = \tilde{a}(x - x_0) + y_0 \tag{79}$$

と表される．この式は y は x についての 1 次関数であることと，直線は点 $Q(x_0, y_0)$ を通り傾きが $\tilde{a}$ であることが分かり易い形である．

□

問 1.56 **($\mathbb{R}^2$ の直線の方程式)** 点 $(3, 5)$ を通り方向ベクトルが $[2 \quad -1]^T$ の直線の方程式を求めよ．

□

問 1.57 **($\mathbb{R}^2$ の直線の方程式)** 点 $(3, 5)$ を通り法線ベクトルが $[2 \quad -1]^T$ の直線の方程式を求めよ．

□

問 1.58 **($\mathbb{R}^2$ の直線の方程式の具体例)** 点 $A(1,2)$, $B(3,-2)$ を通る直線の方程式を考える．まず

$$\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{80}$$

とおく．$\boldsymbol{p}$ は方向ベクトルである．**直線の方程式のパラメータ表示**は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ -4t+2 \end{bmatrix} \tag{81}$$

である．$\boldsymbol{x} = [x \ \ y]^T$ とおき t を消去すると，**直線の方程式の成分表示**は

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} \tag{82}$$

であり，変形して

$$2x + y - 4 = 0 \tag{83}$$

である．法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = [2 \ \ 1]^T$ である．

□

定義 1.59 **(単位方向ベクトル，単位法線ベクトル)** 長さが 1 の方向ベクトルを**単位方向ベクトル (unit tangent vector)** という．長さが 1 の法線ベクトルを**単位法線ベクトル (unit normal vector)** という．

□

例 1.60 方程式

$$2x + y - 4 = 0 \tag{84}$$

の単位方向ベクトルは

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{85}$$

であり，単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{86}$$

である．

□

§ 1.14 点の直線への射影

定義 1.61 （点の直線への射影） 点 A から直線 l に垂線を下ろした足を C とする．点 A から点 C への変換を**射影（projection???）**という． □

定理 1.62 （射影） 点 A を直線 OB へ射影して得られる点 C は

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}, \quad \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC} \tag{87}$$

で与えられる．

（証明）直線の単位方向ベクトルを $\boldsymbol{e}$ とする．このとき $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{e}$ とおく．$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{e}$ が直交するので $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{e} = 0$ より

$$0 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} - \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} - (\alpha\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e} \tag{88}$$

$$= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} - \alpha(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} - \alpha\|\boldsymbol{e}\|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} - \alpha \tag{89}$$

となるので，$\alpha = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}$ が成り立ち，$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$ を得る． □

例 1.63 （射影の具体例） 点 $A(1,1,1)$, $B(2,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ を考える．点 A を直線 OB へ射影した点を C とする．

$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ とおく．$\boldsymbol{b}$ と向きが同じ単位ベトクルは

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{90}$$

である．ベクトル $\boldsymbol{c}$ の長さは

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{2\times 2 + 1\times(-1) + 1\times 1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \tag{91}$$

で与えられる．よって $\boldsymbol{c}$ の向きは $\boldsymbol{e}$ と同じなので

$$\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} = \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\boldsymbol{b} \tag{92}$$

となる．以上より $D(2/3, -1/3, 1/3)$ である． □

例 1.64 **（射影の具体例）** 点 $A(1,0,2)$, $B(0,2,3)$, $C(1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$ を考える．点 C から直線 AB へ垂線を下ろした足を D とする．

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AD}$ とおく．このとき

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 2-0 \\ -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \frac{b}{\|\boldsymbol{b}\|} \tag{93}$$

より

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} = \frac{0 \times (-1) + 2 \times 2 + (-3) \times 1}{(-1) \times (-1) + 2 \times 2 + 1 \times 1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{94}$$

である．よって

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6-1 \\ 0+2 \\ 12+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix} \tag{95}$$

となるので，$D(5/6, 1/3, 13/6)$ を得る． □

§ 1.15 外積

定義 1.65 **（外積）** $\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，**外積 (outer product)** または**ベクトル積 (vector product)** は

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{96}$$

と表記する二項演算である．$\boldsymbol{c}$ の長さは $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ であり，$\boldsymbol{c}$ の向きは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に右手系で直交する方向である．

□

注意 1.66 **（外積の長さ）** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の長さは O, $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, $D(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ を頂点とする平行四辺形の面積である．

□

注意 1.67 **（右手系）** 3 次元空間内の直交する座標軸 x, y, z を考える．軸のとり方は二通り存在する．親指，人差指，中指を互いに直交するように曲げる．このとき，これらの指の向きをそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の向きとする．右手の指に対応させるときと，左手の指に対応させるときでは生成される座標軸は異なる．それぞれ**右手系**，**左手系**と呼ぶ．通常は右手系を使うことが多い．

□

注意 1.68 **（外積の向き）** 外積 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ では右手の親指，人差指，中指と $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を対応させる．

□

§ 1.16　外積を成分で計算

定理 1.69　**(外積の成分表示)**

$$\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{97}$$

に対して,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{98}$$

が成り立つ. □

問 1.70　**(外積の成分表示)**　これを示せ. □

例 1.71　**(外積の計算例)**　$\boldsymbol{a} = [1\ 2\ 3]^T$, $\boldsymbol{b} = [4\ 5\ 6]^T$ の外積は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 \tag{99}$$

$$= -3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{100}$$

である. □

§ 1.17 外積の性質

定理 1.72 **(外積の性質)**

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

(ii) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$.

(iii) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$.

□

問 1.73 **(外積の性質)** これを示せ.

(証明) (i) 積の順を入れ換えると向きが反対向きになるため. (ii) 自分自身との角度は $\theta = 0$ であるから長さは 0 となり, 外積は $\mathbf{0}$ である. (iii) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が並行なとき $\theta = 0$ であるから長さは 0 となり, 外積は $\mathbf{0}$ である. □

注意 1.74 **(内積の性質)** 外積の性質と内積の性質の違いに注意する:

(i) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

(ii) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$.

(iii) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

□

定理 1.75 **(外積の性質)**

(i) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

(ii) $(\alpha \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\alpha \boldsymbol{b})$.

□

問 1.76 **(外積の性質)** これを示せ. □

定理 1.77 **（外積の性質）**

(i) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0, \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0.$

(ii) **ベクトル** 3 **重積（vector triple product）** $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ に関して
$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$
$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$
が成り立つ．これを**ラグランジュの公式（Lagrange's formula）**と呼ぶ.

(iii) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = 0.$
これを**ヤコビの公式（Jacobi's formula）**と呼ぶ.

(iv) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$

□

問 1.78 **（外積の性質）**　これを示せ. □

§ 1.18 外積をベクトルで計算

例 1.79 **(外積の計算例)** $\mathbb{R}^3$ の軸 x_1, x_2, x_3 と同じ向きの単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{101}$$

を考える．このとき

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = 0\,, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = 0\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0\,, \tag{102}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\,, \tag{103}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2 \tag{104}$$

が成り立つ． □

例 1.80 **(外積の計算例)**

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3 \tag{105}$$

を考える．このとき外積は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3) \times (4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3) && (106)\\
&= 4\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 && (107)\\
&\quad + 8\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 + 12\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 && (108)\\
&\quad + 12\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 + 15\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 + 18\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 && (109)\\
&= 4(\mathbf{0}) + 5\boldsymbol{e}_3 + 6(-\boldsymbol{e}_2) && (110)\\
&\quad + 8(-\boldsymbol{e}_3) + 10(\mathbf{0}) + 12\boldsymbol{e}_1 && (111)\\
&\quad + 12\boldsymbol{e}_2 + 15(-\boldsymbol{e}_1) + 18(\mathbf{0}) && (112)\\
&= -3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3 && (113)\\
&= \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} && (114)
\end{aligned}$$

となる． □

§ 1.19 スカラー三重積

定義 1.81 **(スカラー三重積)　スカラー三重積（scalar triple vector）を**

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} \tag{115}$$

と定義する．

□

定理 1.82 **(スカラー三重積の値)**

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{116}$$

□

問 1.83 **(スカラー三重積の値)**　これを示せ．

（証明）

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{117}$$

□

問 1.84 **(スカラー三重積と体積)**　頂点が O, $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, $C(\boldsymbol{c})$, $D(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $E(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$, $F(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, $G(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ である並行 6 面体の体積は $V = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]|$ である．これを示せ．

（答え）　平行 6 面体の体積は，底面積を S とし，高さを h とすると，$V = Sh$ で与えれる．底面の平行四辺形 $OABD$ の面積は，$S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ である．また，底面に対する単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})/\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ である．ベクトル $\boldsymbol{c}$ を垂線に射影してできるベクトルの長さが高さ h であるから，$h = |\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{c}| = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|/\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ となる．よって体積は $V = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ と求まる．

□

定理 1.85 **(外積の性質)**

(i) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}]\boldsymbol{c} - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\boldsymbol{d}$

□

問 1.86 **(外積の性質)**　これを示せ．

□

§ 1.20 点と直線との距離

定義 1.87 **（点と直線との距離）** $\mathbb{R}^n$ 空間内の点 A と直線 l を考える．点 A と l 上の点 B との距離が最小となるとき，その距離を**点と直線との距離**という． □

定理 1.88 **（点と直線との距離）** $\mathbb{R}^n$ 空間内の点 A と直線 l を考える．点 A と l 上の点 B との距離が最小となるのは，直線 AB と直線 l が直交するときである． □

問 1.89 **（点と直線との距離）** これを示せ．

（証明）点 $A(\boldsymbol{a}), B(\boldsymbol{b})$ とする．点 B を直線 l 上の点とする．すなわち $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p}$ とおく．点 A と B の距離を考える．

$$AB^2 = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|^2 = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) \tag{118}$$

$$= (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}) - 2t\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}) + t^2\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} \tag{119}$$

$$= \|\boldsymbol{p}\|^2 t^2 - 2t\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}) + \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}\|^2 \tag{120}$$

$$= \|\boldsymbol{p}\|^2 \left(t - \frac{\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{p}\|^2} \right)^2 + \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}\|^2 - \left(\frac{\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{p}\|} \right)^2 \tag{121}$$

より $t = t_{\min} = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q})/\|\boldsymbol{p}\|^2$ のとき最小値

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}\|^2 - \left(\frac{\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{p}\|} \right)^2 \tag{122}$$

をとる．このとき

$$\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}(t_{\min})) = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q} - t_{\min}\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}) - t_{\min}\|\boldsymbol{p}\|^2 \tag{123}$$

$$= \|\boldsymbol{p}\|^2 \left(\frac{\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{p}\|^2} - t_{\min} \right) = 0 \tag{124}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}(t_{\min})$ とは直交する．$\boldsymbol{p}$ は直線 l の方向ベクトルであり，$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}(t_{\min})$ は直線 AB の方向ベクトルである．よって距離が最小になるとき直線 l と直線 AB は直交する．

□

定理 1.90 **（点と直線の距離）** $\mathbb{R}^n$ 空間内の点 A と直線 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p}$ との距離は

$$\sqrt{\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}\|^2 - \left(\frac{\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{p}\|} \right)^2} \tag{125}$$

である． □

定理 1.91 **(点と直線の距離)** $\mathbb{R}^3$ 空間内の点 A と直線 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p}$ との距離は

$$\sqrt{\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}\|^2 - \left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{p}\|}\right)^2} = \frac{\|\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})\|}{\|\boldsymbol{p}\|} \tag{126}$$

である. □

問 1.92 **($\mathbb{R}^3$ 内の点と直線の距離)** これを示せ.

(証明) 距離 $\overline{AB}$ は

$$\overline{AB}^2 = \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}\|^2 - \left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{p}\|}\right)^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}) - \frac{(\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}))^2}{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}} \tag{127}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}) - (\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}))((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}} \tag{128}$$

となる. ここで

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{129}$$

を用いると

$$\overline{AB}^2 = \frac{(\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}))\cdot(\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}))}{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}} = \frac{\|\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})\|^2}{\|\boldsymbol{p}\|^2} \tag{130}$$

となり定理を得る. □

例 1.93 **($\mathbb{R}^3$ 内の点と直線の距離)** 点 $A(0,2,1)$ と直線 $\boldsymbol{x}(t) = [1\ \ 3\ \ -1]^T + t[2\ \ -1\ \ 1]^T$ との距離を考える. 点 A から直線への射影した点を $B(\boldsymbol{b})$ とする.

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{p}\|^2}\boldsymbol{p} \tag{131}$$

であるから,

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tag{132}$$

$$\|\boldsymbol{p}\|^2 = 6, \quad \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}) = 1 \tag{133}$$

より,

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{p}\|^2}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ -5 \end{bmatrix} \tag{134}$$

である．点 $A(0,2,1)$ と点 $B(8/6,17/6,-5/6)$ との距離が点 A と直線の距離であるから，

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -11 \end{bmatrix} \tag{135}$$

より

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{8^2+5^2+(-11)^2}}{6} = \frac{\sqrt{64+25+121}}{6} = \frac{\sqrt{210}}{6} = \sqrt{\frac{35}{6}} \tag{136}$$

である．

□

例 1.94 **($\mathbb{R}^3$ 内の点と直線の距離)** 点 $A(0,2,1)$ と直線 $\boldsymbol{x}(t) = [1\ \ 3\ \ -1]^T + t[2\ \ -1\ \ 1]^T$ との距離を考える．

$$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}\|^2 = 6 \tag{137}$$

であるから，距離は

$$\sqrt{\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}\|^2 - \frac{(\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}))^2}{\|\boldsymbol{p}\|^2}} = \sqrt{6-\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{35}{6}} \tag{138}$$

である．

□

例 1.95 **($\mathbb{R}^3$ 内の点と直線の距離)** 点 $A(0,2,1)$ と直線 $\boldsymbol{x}(t) = [1\ \ 3\ \ -1]^T + t[2\ \ -1\ \ 1]^T$ との距離を考える．

$$\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \|\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})\|^2 = 35 \tag{139}$$

より，距離は

$$\frac{\|\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q})\|}{\|\boldsymbol{p}\|} = \sqrt{\frac{35}{6}} \tag{140}$$

である．

□

定理 1.96 **($\mathbb{R}^2$ 内の点と直線の距離)** $\mathbb{R}^2$ 空間内の点 $A(x_0, y_0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{141}$$

である. □

問 1.97 **($\mathbb{R}^2$ 内の点と直線の距離)** これを示せ.

(証明) $\mathbb{R}^2$ 空間を $\mathbb{R}^3$ 空間内の部分空間として考える. このとき, 点 $A(\boldsymbol{a})$ と直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p}$ を考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c/b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{142}$$

とおくと

$$\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{vmatrix} b & x_0 \\ -a & y_0 + c/b \end{vmatrix} \end{bmatrix}, \tag{143}$$

$$\|\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q})\|^2 = \begin{vmatrix} b & x_0 \\ -a & y_0 + c/b \end{vmatrix}^2 = (ax_0 + by_0 + c)^2, \tag{144}$$

$$\|\boldsymbol{p}\|^2 = a^2 + b^2 \tag{145}$$

である. よって距離は

$$\frac{\|\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q})\|}{\|\boldsymbol{p}\|} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{146}$$

である. □

問 1.98 **($\mathbb{R}^2$ 内の点と直線の距離)** 点 $A(2, 1)$ と直線 $x - 3y - 2 = 0$ との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \tag{147}$$

である. □

§ 1.21 平面の方程式

定義 1.99 **(平面)** $\mathbb{R}^n$ 空間内の点 X の位置ベクトルが

$$\boldsymbol{x}(t,s) = \boldsymbol{q} + t\,\boldsymbol{u} + s\,\boldsymbol{v}\,, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\,, \quad \forall t, \forall s \in \mathbb{R} \tag{148}$$

と表されるとき，点 X の軌跡を**平面（plane）**という．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を**方向ベクトル（tangent vector）**という．

□

例 1.100 **(平面の具体例)**

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{149}$$

とおく．このとき平面

$$\boldsymbol{x}(t,s) = t\boldsymbol{e}_1 + s\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} \tag{150}$$

を考える．位置ベクトル $\boldsymbol{x}(t,s)$ は点 (t,s) を表す．t, s は任意の実数なので点の軌跡は $\mathbb{R}^2$ 空間全体をなす．よって $\mathbb{R}^2$ は平面である．

□

例 1.101 **($\mathbb{R}^3$ の平面の具体例)** 点 $A(1,2,3)$, $B(2,0,-1)$, $C(-1,1,2) \in \mathbb{R}^3$ を通る平面を考える．点 $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OA}$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC}$ の平面と考える．

$$\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \tag{151}$$

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{152}$$

とする．**平面の方程式のパラメータ表示**は

$$\boldsymbol{x}(t,s) = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - 2s + 1 \\ -2t - s + 2 \\ -4t - s + 3 \end{bmatrix} \tag{153}$$

である．

□

定理 1.102 **(平面の方程式)** $\mathbb{R}^n$ 空間内の平面上の点 X の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})=0\,, \qquad \boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^n \tag{154}$$

と表される．$\boldsymbol{n}$ は方向ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ と直交するベクトルである．$\boldsymbol{n}$ を**法線ベクトル（normal vector）**という．

（証明）$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=0, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$ である．このとき

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})=\boldsymbol{n}\cdot(t\boldsymbol{u}+s\boldsymbol{v})=t(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})+s(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})=0 \tag{155}$$

が成り立つ． □

注意 1.103 **($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式)** $\mathbb{R}^3$ 空間内の平面の方程式を考える．まず,

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \tag{156}$$

とおく．すると方程式

$$x=x_0+t\,u_1+s\,v_1\,,\qquad y=y_0+t\,u_2+s\,v_2\,,\qquad z=z_0+t\,u_3+s\,v_3 \tag{157}$$

が成り立つ．t, s は任意のパラメータであるから消去して方程式とする．第一式と第二式の s を消去し t についてまとめると

$$\begin{vmatrix}u_2 & v_2\\u_3 & v_3\end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix}u_3 & v_3\\u_1 & v_1\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{vmatrix}(z-z_0)=0 \tag{158}$$

が得られる．他の組合せでも同じ方程式を得る．この方程式は

$$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}u_2 & v_2\\u_3 & v_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}u_3 & v_3\\u_1 & v_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T \tag{159}$$

とおくと $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})=0$ が成り立つ．また,

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{160}$$

と表される．さらには $d=-ax_0-by_0-cz_0$ とおいて変形すれば

$$ax+by+cz+d=0 \tag{161}$$

である．これらは $\mathbb{R}^2$ **の平面の方程式の成分表示**である．ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=u_1\begin{vmatrix}u_2 & v_2\\u_3 & v_3\end{vmatrix}+u_2\begin{vmatrix}u_3 & v_3\\u_1 & v_1\end{vmatrix}+u_3\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_1 & u_1 & v_1\\u_2 & u_2 & v_2\\u_3 & u_3 & v_3\end{vmatrix}=0\,, \tag{162}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=v_1\begin{vmatrix}u_2 & v_2\\u_3 & v_3\end{vmatrix}+v_2\begin{vmatrix}u_3 & v_3\\u_1 & v_1\end{vmatrix}+v_3\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v_1 & u_1 & v_1\\v_2 & u_2 & v_2\\v_3 & u_3 & v_3\end{vmatrix}=0 \tag{163}$$

より，方向ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ とそれぞれ直交する．$\boldsymbol{n}$ は法線ベクトルである．また，ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ により与えられることに注意する． □

注意 1.104 **($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式)** $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式は次のように表される．まず，基本は

$$ax + by + cz + d = 0$$

である．このとき，法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = [a \ \ b \ \ c]^T$ である．また，この式を変形して

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

と表す．このとき，法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = [a \ \ b \ \ c]^T$ であり，平面は点 (x_0, y_0, z_0) を通る．さらに変形して，

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

とする．このとき平面と x 軸，y 軸，z 軸との交点はそれぞれ $x = a, \ y = b, \ z = c$ となる． □

例 1.105 **($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式の具体例)** $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式 $x - 2y + 3z + 4 = 0$ を考える．法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = [1 \ \ -2 \ \ 3]^T$ である． □

例 1.106 **($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式の具体例)** 点 $A(1,2,3), \ B(2,0,-1), \ C(-1,1,2) \in \mathbb{R}^3$ を通る平面を考える．点 $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OA}$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}, \ \boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC}$ の平面と考える．

$$\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{164}$$

とする．このとき法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \tag{165}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 = -2\boldsymbol{e}_1 + 9\boldsymbol{e}_2 - 5\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} \tag{166}$$

である．**平面の方程式の成分表示**は

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}) = 0 \tag{167}$$

より

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{168}$$

であるから

$$-2(x - 1) + 9(y - 2) - 5(z - 3) = 0 \tag{169}$$

を得る．また変形して

$$2x - 9y + 5z + 1 = 0 \tag{170}$$

を得る． □

例 1.107 **($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式の具体例)** 点 $A(1,2,3)$, $B(2,0,-1)$, $C(-1,1,2) \in \mathbb{R}^3$ を通る平面を考える．平面の方程式を

$$ax + by + cz + d = 0$$

とおく．この方程式は定数倍の任意性があるので両辺を d で割ってあらためてパラメータを置き換えると

$$ax + by + cz + 1 = 0$$

となる．平面は点 A, B, C を含むのでこれらの座標を方程式に代入して，

$$a + 2b + 3c + 1 = 0, \qquad 2a - c + 1 = 0, \qquad -a + b + 2c + 1 = 0$$

を得る．この連立方程式を解くと $\square$

注意 1.108 **($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式と連立方程式)** 平面は 3 点から一意に定まる．これは 3 元の連立方程式は 3 本の方程式により解が一意に定まることと等価である． $\square$

§ 1.22 平面と直線の交点

注意 1.109 **(平面と直線の交点)** $\mathbb{R}^n$ 空間内の平面

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})=0 \tag{171}$$

と直線

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{p} \tag{172}$$

との交点を考える．これを平面の方程式に代入すると

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})=0 \tag{173}$$

であるから，t についてまとめると

$$t=t^*=-\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}} \tag{174}$$

を得る．よって直線の方程式に代入すると

$$\boldsymbol{x}(t^*)=\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_0-\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p} \tag{175}$$

となる．平面と直線の交点の位置ベクトルは $\boldsymbol{x}_1$ である． □

例 1.110 **(平面と直線の交点の具体例)** 平面

$$x-y+3z+1=0 \tag{176}$$

と直線

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{4} \tag{177}$$

との交点を考える．直線の方程式のパラメータ表示は

$$x=3t+2\,,\quad y=-2t-1\,,\quad z=4t+3 \tag{178}$$

である．これを平面の方程式に代入すると

$$(3t+3)-(-2t-1)+3(4t+3)+1=0 \tag{179}$$

より

$$t=-\frac{14}{17} \tag{180}$$

を得る．直線の方程式のパラメータ表示に代入すると

$$x=-\frac{8}{17}\,,\quad y=\frac{11}{17}\,,\quad z=-\frac{5}{17} \tag{181}$$

となり，交点は $(-8/17,11/17,-5/17)$ である． □

§ 1.23 点の平面への射影

定義 1.111 **（点の平面への射影）** $\mathbb{R}^n$ 空間内の点 A と平面を考える．点 A から平面へ垂線を下ろしたときの足を B とする．点 A から点 B への変換を**射影（projection???）**という．

□

注意 1.112 **（点の平面への射影）** 点 $A(\boldsymbol{x}_0)$ から平面

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})=0 \tag{182}$$

への射影点 $B(\boldsymbol{x}_1)$ を考える．点 A から平面への垂線は平面と直交する．よって垂線の方向ベクトルと平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は等しい．垂線は点 $A(\boldsymbol{x}_0)$ を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{n}$ であるので，垂線の方程式は

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{n} \tag{183}$$

と表される．垂線と平面の交点が射影点 $B(\boldsymbol{x}_1)$ である．交点 $\boldsymbol{x}_1$ を求める．垂線の方程式を平面の方程式に代入すると

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{n}-\boldsymbol{q})=0 \tag{184}$$

であり，t についてまとめると

$$t=t^*=-\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}} \tag{185}$$

が成り立つ．これを垂線の方程式に代入し，交点

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}(t^*)=\boldsymbol{x}_0-\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n} \tag{186}$$

を得る．

□

例 1.113 **（点の平面への射影）** 点 $A(1,-2,4)$ の平面 $2x+3y-z+1=0$ への射影点 B を考える．平面の法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=[2\ \ 3\ \ -1]^T$ であるから，点 A を通り平面に垂直な直線の方程式は

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}=t \tag{187}$$

となる．パラメータ表示すると

$$x=2t+1\,,\quad y=3t-2\,,\quad z=-t+4 \tag{188}$$

である．これを平面の方程式に代入すると

$$2(2t+1)+3(3t-2)-(-t+4)+1=0 \tag{189}$$

より $t=1/2$ を得る．これを垂線の方程式に代入すると

$$x=2\frac{1}{2}+1=2\,,\quad y=3\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2}\,,\quad z=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2} \tag{190}$$

であり，射影点 $B(2,-1/2,7/2)$ を得る．

□

§ 1.24　点と平面との距離

定義 1.114　**(点と平面との距離)**　$\mathbb{R}^n$ 空間内の点 A と平面を考える．点 A と平面上の点 B との距離が最小となるとき，その距離を**点と平面との距離**という．

□

定理 1.115　**(点と平面との距離)**　$\mathbb{R}^n$ 空間内の点 A と平面を考える．点 A と平面上の点 B との距離が最小となるのは直線 AB と平面が直交するときである．

□

例 1.116　**(点と平面との距離)**　点 $A(1,-2,4)$ の平面 $2x+3y-z+1=0$ への射影点は $B(2,-1/2,7/2)$ である．直線 AB は平面に直交する．距離 $\overline{AB}$ が点と平面との距離である．よって距離は

$$\sqrt{(2-1)^2+\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2+\left(\frac{7}{2}-4\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{2}} \tag{191}$$

である．

□

定理 1.117　**(点と平面との距離)**　$\mathbb{R}^n$ 空間内の点 $A(\boldsymbol{x}_0)$ と平面 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})=0$ を考える．点 A と平面との距離は

$$\frac{|\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})|}{\|\boldsymbol{n}\|} \tag{192}$$

である．

□

問 1.118　**(点と平面との距離)**　これを示せ．

（証明）点 $A(\boldsymbol{x}_0)$ から平面 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})=0$ への射影点を $B(\boldsymbol{x}_1)$ とする．距離 $\overline{AB}=\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|$ が点と平面の距離である．射影点 $B(\boldsymbol{x}_1)$ は

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_0-\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n} \tag{193}$$

であるから，

$$(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)=\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}\right)^2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{n}\|}\right)^2 \tag{194}$$

より，

$$\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})|}{\|\boldsymbol{n}\|} \tag{195}$$

を得る．

□

定理 1.119 **($\mathbb{R}^3$ の点と平面との距離)** $\mathbb{R}^3$ 空間内の点 $A(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ を考える．点 A と平面との距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{196}$$

である． □

問 1.120 **($\mathbb{R}^3$ の点と平面との距離)** これを示せ．

（証明）点 $A(\boldsymbol{x}_0)$ と平面 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})=0$ とし，

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}0\\0\\-c/d\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0+c/d\end{bmatrix} \tag{197}$$

とおく．

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})=ax_0+by_0+cz_0+d\,, \quad \|\boldsymbol{n}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \tag{198}$$

より，

$$\frac{|\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q})|}{\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{199}$$

を得る． □

例 1.121 **($\mathbb{R}^3$ の点と平面との距離)** 点 $A(1,-2,4)$ の平面 $2x+3y-z+1=0$ との距離は

$$\frac{|2\cdot 1+3\cdot(-2)-4+1|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\sqrt{\frac{7}{2}} \tag{200}$$

である． □

§ 1.25 直線の平面への射影

定理 1.122 **(点の平面への射影)** $\mathbb{R}^n$ 空間内の直線と平面を考える．直線上の点 A から平面への射影点を B とする．点 A が直線上を動くときにできる点 B の軌跡は直線または点となる． □

§ 1.26 線形変換

§ 1.27　直線の線形変換

2　行列とベクトル

§ 2.1　行列

定義 2.1　$m \times n$ 個の数 a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{201}$$

と並べたものを**行列（matrix）**とよぶ．このとき行列 A は

- m 行 n 列の行列
- $m \times n$ 型の行列
- (m, n) 行列

という．行列の i 行 j 列番目の数を **(i, j) 成分（component）**または**要素（element）**と呼ぶ．i 番目の行

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \tag{202}$$

を**第 i 行（the i-th row）**という．j 番目の列

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \tag{203}$$

を**第 j 列（the j-th column）**という．行列 A を省略して書くときは

$$A = [a_{ij}] = [a_{ij}]_{m \times n} = \underset{m \times n}{[a_{ij}]} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n}} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \tag{204}$$

のようにする．　□

§ 2.2 行列のいろいろ

定義 2.2 **(零行列)** 成分が全て零の行列

$$O = O_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix} \tag{205}$$

を**零行列**（**zero matrix**）と呼ぶ．$O_{m,n}$ は $m \times n$ 型の零行列を意味する． □

定義 2.3 **(正方行列)** 行と列の数が等しい行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{206}$$

を**正方行列**（**square matrix**）と呼ぶ．行列の成分のうち左上から右下へ並んでいる成分 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn} を**対角成分**（**diagonal components**）と呼ぶ． □

定義 2.4 **(対角行列)** 対角成分以外の成分が全て零の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \text{\Large 0} \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{207}$$

を**対角行列**（**diagonal matrix**）と呼ぶ． □

定義 2.5 **(単位行列)** 対角成分がすべて 1 の対角行列

$$E = E_n = I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{208}$$

を**単位行列**（**unit matrix**）と呼ぶ．$n \times n$ の単位行列を E_n と書き n 次の単位行列と呼ぶ．単位行列は後述するように行列の積において “1” の役割をはたす． □

定義 2.6 **（スカラー行列）** 対角成分の値がすべて等しい対角行列を**スカラー行列（scalar matrix）**と呼ぶ. □

例 2.7 **（スカラー行列の具体例）**

$$\begin{bmatrix} 2 & & \text{\huge 0} \\ & 2 & \\ \text{\huge 0} & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & & \text{\huge 0} \\ & -1 & \\ \text{\huge 0} & & -1 \end{bmatrix}, \qquad E, \qquad O. \tag{209}$$

□

定義 2.8 **（上三角行列）** 対角成分を除く左下半分がすべて 0 の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \text{\huge 0} & & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{210}$$

を**上三角行列（upper triangular matrix）**と呼ぶ. □

定義 2.9 **（下三角行列）** 対角成分を除く右上半分がすべて 0 の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & & & \text{\huge 0} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{211}$$

を**下三角行列（lower triangular matrix）**と呼ぶ. □

定義 2.10 **（転置行列）** 行と列の成分を入れ換えた行列

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{212}$$

を**転置行列（transposed matrix）**と呼ぶ．行と列を入れ換える演算を**転置（transpose）**をとるという．転置された行列を A^T と書く．また ${}^tA$ と書くこともある． □

例 2.11 **（転置の具体例）**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{213}$$

□

問 2.12 $(A^T)^T = A$ を示せ．

（証明）$A = [a_{ij}]$, $A^T = [b_{ij}]$ とおく．行と列を入れ換えるので A^T は $A^T = [a_{ji}]$ とも書ける．つまり $b_{ij} = a_{ji}$ となる．転置をとる操作を成分でみると，行と列の添字を入れ換える操作に対応する．よって

$$(A^T)^T = ([a_{ij}]^T)^T = ([a_{ji}])^T = [a_{ij}] = A \tag{214}$$

となる．証明終了． □

定義 2.13 **（対称行列）** $A^T = A$ を満たす行列を**対称行列（symmetric matrix）**と呼ぶ. □

例 2.14 **（対称行列の具体例）**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \tag{215}$$

□

問 2.15 **（対称行列の一般的な表現）** 対称行列は正方行列で一般に

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{216}$$

と表わされる．これを示せ. □

定義 2.16 **（歪対称行列）** $A = -A^T$ を満たす行列を**歪対称行列（skew symmetric matrix）**または，**交代行列（alternative matrix）**と呼ぶ. □

例 2.17 **（歪対称行列の具体例）**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{217}$$

□

問 2.18 **（対称行列の一般的な表現）** 歪対称行列は正方行列で一般に

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{218}$$

と表わされる．これを示せ. □

問 2.19 教科書（p.5）問題 1.1. □

定義 2.20 **(共役行列)**　全ての要素を複素共役をとした行列

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{bmatrix} \tag{219}$$

を**共役行列??（???）**という. □

定義 2.21 **(共役転置行列)**　共役かつ転置な行列

$$A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)} = \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots & \overline{a}_{n1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1m} & \overline{a}_{2m} & \cdots & \overline{a}_{nm} \end{bmatrix} \tag{220}$$

を**共役転置行列（????）**という. □

定義 2.22 **(エルミート行列)**　$A = A^*$ を満たす行列を**エルミート行列（Hermite matrix）**という. □

問 2.23 **(エルミート行列の成分)**　エルミート行列の対角成分は実数となることを示せ. □

定義 2.24 **(歪エルミート行列)**　$A = -A^*$ を満たす行列を**歪エルミート行列（skew Hermite matrix）**という. □

問 2.25 **(歪エルミート行列の成分)**　歪エルミート行列の対角成分は純虚数となることを示せ. □

定義 2.26 **(直交行列)**　$AA^T = E$ を満たす行列を**直交行列（orthogonal matrix）**という. □

定義 2.27 **(ユニタリー行列)**　$AA^* = E$ を満たす行列を**ユニタリー行列（unitary matrix）**という. □

定義 2.28 **(逆行列)**　行列 A に対して $AB = E$ を満たす行列 B を**逆行列（inverse matrix）**といい，$B = A^{-1}$ と表記する．読み方は A inverse である. □

§ 2.3 行ベクトル，列ベクトル

定義 2.29 **（行ベクトル）** $1 \times n$ 行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \tag{221}$$

を n 次の**行ベクトル（row vector）**と呼ぶ． □

例 2.30 **（行ベクトルの具体例）** 4 次の行ベクトル：

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{222}$$

□

定義 2.31 **（列ベクトル）** $m \times 1$ 行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \tag{223}$$

を m 次の**列ベクトル（column vector）**と呼ぶ． □

例 2.32 **（列ベクトルの具体例）** 3 次の列ベクトル：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{224}$$

□

注意 2.33 **（ベクトルの呼び方と書き方）** 行ベクトル，列ベクトルを総称して**ベクトル（vector）**と呼ぶ．ベクトルを表わす変数は太文字で書き，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のように表記する． □

定義 2.34 **（零ベクトル）** 成分が全て 0 のベクトルを零ベクトルと呼び $\mathbf{0}$ と表わす． □

注意 2.35 **（1×1 行列）** 1×1 行列である $[a_{11}]$ は要素は一つしかないが，あくまでも行列であるので注意する．しかしまれに数として取り扱うこともあるので，更に注意が必要である． □

例 2.36 **(行列の名称等)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \tag{225}$$

を考える.

(1) 行列 A の型は 3×5 型である.

(2) $(2,1)$ 成分は $a_{21} = 3$ であり，$(3,4)$ 成分は $a_{34} = 7$ である.

(3) 第 2 行は

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{226}$$

であり，第 3 列は

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{227}$$

である.

(4) 行列 A の転置行列 A^T は

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 6 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{228}$$

である. □

§ 2.4 クロネッカーのデルタ

定義 2.37 **(クロネッカーのデルタ)** 記号 δ_{ij} を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{229}$$

と定義する．これを**クロネッカーのデルタ（Kronecker's delta）**と呼ぶ． □

例 2.38 **(クロネッカーのデルタの具体例)**

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \tag{230}$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0 \tag{231}$$

□

例 2.39 **(クロネッカーのデルタの使用例)** 単位行列は $E_n = [\delta_{ij}]_{n\times n}$ と表わされる．例えば

$$E_3 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{232}$$

となる． □

例 2.40 **(クロネッカーのデルタの使用例)** 行列 A が $A = [\delta_{i+1,j}]$ と与えられるとき，

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{233}$$

となる． □

§ 2.5 行列の演算

i) 行列の和と差

定義 2.41 **(行列の和と差)** 行列 A と行列 B の和を C とする．これを

$$A + B = C \tag{234}$$

と表記する．行列の和は型が

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \qquad B = [b_{ij}]_{m\times n}\,, \qquad C = [c_{ij}]_{m\times n} \tag{235}$$

のとき定義される．各成分は

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]\,, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{236}$$

と定義される．行列の差は同様に

$$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [c_{ij}]\,, \qquad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \tag{237}$$

と定義される．

□

例 2.42 **(行列の和の計算例)**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & -2+5 & 8+1 \\ 2+3 & 5-1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}\,. \tag{238}$$

□

ii) 行列のスカラー倍

定義 2.43 **（行列のスカラー倍）** α をスカラー（数）とする．行列 A のスカラー倍を

$$C = \alpha\, A \tag{239}$$

と表記する．行列のスカラー倍は型が

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \qquad C = [c_{ij}]_{m\times n} \tag{240}$$

のとき定義される．各成分は

$$C = \alpha\, A = \alpha[a_{ij}] = [c_{ij}]\,, \qquad c_{ij} = \alpha\, a_{ij} \tag{241}$$

と定義される．

□

例 2.44 **（スカラー倍の計算例）**

$$3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times(-2) & 3\times 8 \\ 3\times 2 & 3\times 5 & 3\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{bmatrix}\,. \tag{242}$$

□

例 2.45 **（スカラー倍の計算例）**

$$\alpha\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1\alpha \\ 4\alpha & 3\alpha \end{bmatrix}\,. \tag{243}$$

□

iii) 行列の積

定義 2.46 **(行列の積)** 行列 A と行列 B の積を C とする．このとき

$$A\,B = C \tag{244}$$

と表記する．行列の積は型が

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \qquad B = [b_{ij}]_{n\times r}\,, \qquad C = [c_{ij}]_{m\times r} \tag{245}$$

のとき定義される．各成分は

$$AB = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c|cc} * & * & \cdots & b_{1j} & \cdots & * \\ * & * & \cdots & b_{2j} & \cdots & * \\ * & * & \cdots & b_{3j} & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & b_{nj} & \cdots & * \end{array}\right] = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & c_{ij} & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * & \cdots & * \end{bmatrix} = C\,, \tag{246}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \tag{247}$$

と定義される． □

例 2.47 **(行列の積の計算例)**

$$\underset{2\times 3\,\text{型}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3\,\text{型}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \tag{248}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 3 + 1\times 2 + (-3)\times(-1) & 2\times 1 + 1\times 0 + (-3)\times 4 & 2\times 0 + 1\times(-1) + (-3)\times 1 \\ 1\times 3 + (-5)\times 2 + 2\times(-1) & 1\times 1 + (-5)\times 0 + 2\times 4 & 1\times 0 + (-5)\times(-1) + 2\times 1 \end{bmatrix} \tag{249}$$

$$= \underset{2\times 3\,\text{型}}{\begin{bmatrix} 11 & -10 & -4 \\ -9 & 9 & 7 \end{bmatrix}}\,. \tag{250}$$

□

例 2.48 **(行列の積の計算例)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{251}$$

とおく.

$$AB = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{3\times 1\text{型}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{1\times 3\text{型}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{3\times 3\text{型}}. \tag{252}$$

$$BA = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{1\times 3\text{型}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{3\times 1\text{型}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}}_{1\times 1\text{型}}. \qquad \leftarrow\text{スカラーではないので注意} \tag{253}$$

$AB \neq BA$ であることに注意. □

例 2.49 **(行列の積の具体例)**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}}_{3\times 3\text{ 型}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{3\times 1\text{ 型}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}}_{3\times 1\text{ 型}} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\begin{bmatrix} x+4y+5z \\ 9x+2y+6z \\ 8x+7y+3z \end{bmatrix}}_{3\times 1\text{ 型}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}}_{3\times 1\text{ 型}} \tag{254}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{cases} x+4y+5z = -1 \\ 9x+2y+6z = -2 \\ 8x+7y+3z = -3 \end{cases}}_{\text{連立一次方程式}} \tag{255}$$

□

§ 2.6　行列の演算に関する諸性質

定理 2.50　**（行列の演算の性質）**　行列の演算に関して次の性質が成り立つ：

(1) $A+B=B+A$　　（加法の交換則）

(2) $A+O=A,\ O+A=A$　　（加法の零元）O は数の足し算の 0 と同様な振る舞い

(3) $(A+B)+C=A+(B+C)$　　（加法の結合則）

(4) $AE=A,\ EA=A$　　（乗法の単位元）E は数の掛け算の 1 と同様な振る舞い

(5) $AO=O,\ OA=O$　　（乗法の零元）O は数の掛け算の 0 と同様な振る舞い

(6) $(AB)C=A(BC)$　　（乗法の結合則）

(7) $A(B+C)=AB+AC,\ (A+B)C=AC+BC$　　（分配則）

(8) $0A=O,\ 1A=A$

(9) $(ab)A=a(bA),\ (aA)B=a(AB)$

(10) $a(A+B)=aA+aB,\ (a+b)A=aA+bA$

(11) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(12) $(AB)^T=B^TA^T$

(13) $(A+B)^*=A^*+B^*$

(14) $(AB)^*=B^*A^*$

(15) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

ただし，A,B,C の型は互いに演算が定義されている型とする．

□

問 2.51　**（行列の演算の性質）**　性質 (1)-(12) を示せ．

（証明）(1), (4), (11), (12) を示す．残りは自習．

(1) $A+B=B+A$ を示す．まず $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ とおく．このとき $A+B$ は和の定義より

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \tag{256}$$

となる．次に $B+A$ を求める．和の定義より

$$B+A=[b_{ij}+a_{ij}]_{m\times n} \tag{257}$$

となる．各要素 $b_{ij}+a_{ij}$ は単に数なので，和について可換である．よってすべての要素の和の順番を入れ換えて，

$$B+A=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \tag{258}$$

となる．以上より $A+B=B+A$ が示された．

(4) $AE=A$ を示す．まず $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $E=[\delta_{ij}]_{n\times n}$ とおく．さらに $C=AE=[c_{ij}]_{m\times n}$ とおく．c_{ij} を計算する．積の定義とクロネッカーのデルタの定義に従って計算する．$[c_{ij}]=C=AE=[a_{ij}][\delta_{ij}]$ より

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= \sum_{k}^{n} a_{ik}\delta_{kj} && (259)\\
&= a_{i1}\delta_{1j}+a_{i2}\delta_{2j}+a_{i3}\delta_{3j}+\cdots+a_{ij}\delta_{jj}+\cdots+a_{in}\delta_{nj} && (260)\\
&= a_{i1}\times 0+a_{i2}\times 0+a_{i3}\times 0+\cdots+a_{ij}\times 1+\cdots+a_{in}\times 0 && (261)\\
&= a_{ij} && (262)
\end{aligned}
$$

を得る．これより $c_{ij}=a_{ij}$ が成り立つ．よって $C=A$ を得る．以上より $AE=A$ が示された．$EA=A$ の場合も同様に示す．

(11) $(A+B)^T=A^T+B^T$ を示す．まず，$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ とおく．和の定義より

$$A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \tag{263}$$

となる．転置の操作は行と列を入れ換えるので

$$(A+B)^T=([a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n})^T=[a_{ji}+b_{ji}]_{n\times m} \tag{264}$$

となる．右辺の行列を二つの行列の和に分解し，それぞれの行列の転置をとると

$$(A+B)^T=[a_{ji}]_{n\times m}+[b_{ji}]_{n\times m}=([a_{ij}]_{m\times n})^T+([b_{ij}]_{m\times n})^T=A^T+B^T \tag{265}$$

を得る．以上で示された．

(12) $(AB)^T=B^TA^T$ を示す．まず

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\,,\quad B=[b_{ij}]_{n\times r}\,,\quad A^T=[\tilde{a}_{ij}]_{n\times m}\,,\quad B^T=[\tilde{b}_{ij}]_{r\times n} \tag{266}$$

とおく．次に

$$C=AB=[c_{ij}]_{m\times r}\,,\quad C^T=(AB)^T=[\tilde{c}_{ij}]_{r\times m}\,,\quad D=B^TA^T=[d_{ij}]_{r\times m} \tag{267}$$

とおく．まず c_{ij}, d_{ij} を求める．積の定義より

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\,,\quad d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\tilde{b}_{ik}\tilde{a}_{kj} \tag{268}$$

となる．$\tilde{c}_{ij}=c_{ji}$, $\tilde{a}_{ij}=a_{ji}$, $\tilde{b}_{ij}=b_{ji}$ を用いれば

$$\tilde{c}_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}\tilde{b}_{ik}\tilde{a}_{kj}=d_{ij} \tag{269}$$

を得る．以上より $(AB)^T=C^T=[\tilde{c}_{ij}]_{r\times m}=[d_{ij}]_{r\times n}=D=B^TA^T$ となる．証明終了． □

§ 2.7 行列の演算に関する注意

注意 2.52 **(積の可換性)** $AB = BA$ は常に成立するとは限らない． □

定義 2.53 **(積の可換性)** $AB = BA$ が成立するとき，A と B は**可換（commutative）**であるという．可換でない場合は**非可換（non-commutative）**であるという． □

問 2.54 **(積の可換性)** 可換となりうる行列は正方行列のみである．これを示せ． □

例 2.55 **(非可換な場合の具体例)** 行列 A, B が

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{270}$$

で与えられたとする．このとき

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{271}$$

となる．よって $AB \neq BA$ となり，A と B とは非可換である． □

例 2.56 **(可換な場合の具体例)** 行列 A, B が

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{272}$$

で与えられたとする．このとき

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \tag{273}$$

となる．よって $AB = BA$ となり，A と B とは可換である． □

問 2.57 **(対角行列の可換性)** 対角行列どうしの積は可換である．これを示せ．

（証明）対角行列は $A = [a_{ij}\delta_{ij}]$, $B = [b_{ij}\delta_{ij}]$ と表わされる．これを用いて示す． □

注意 2.58 **(行列の方程式)** $AB = O$ のとき $A = O$ または $B = O$ が成立するとは限らない．数の場合は $ab = 0$ のとき $a = 0$ または $b = 0$ である． □

例 2.59 **(行列の方程式の具体例)** 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{274}$$

とする．このとき

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O \tag{275}$$

となる．$AB = O$ ではあるが $A \neq O, B \neq O$ である． □

定義 2.60 **(行列の巾乗)** A が正方行列のとき，A を m 回掛け合わせた行列を

$$A^m = \overbrace{AA \cdots A}^{m} \tag{276}$$

と表記し，これを A の**巾乗**と呼ぶ． □

定義 2.61 **(巾零行列)** $A^m = O$ $(2 \leq m \in \mathbb{N})$ を満たす行列 A を**巾零行列**と呼ぶ． □

例 2.62 **(巾零行列の具体例)**

(1) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O\,. \tag{277}$$

(2) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O\,, \quad A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O\,. \tag{278}$$

□

問 2.63 教科書（p.10）問題 1.2. □

§ 2.8 行列の分割

$m \times n$ 型行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{279}$$

の n 個の列を t 個の領域に分割し，m 個の列を s 個の領域に分割する．縦横で分割された部分領域はそれぞれまた行列となっている．この部分行列を**ブロック行列**（**block matrix**）と呼び，A_{ij} と表す．A_{ij} を用いて行列 A を書き直すと

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \tag{280}$$

$$A_{ij} = [a_{kl}]_{m_i \times n_j}, \tag{281}$$

$$\sum_{p=1}^{i-1} m_p + 1 \leq k \leq \sum_{p=1}^{i} m_p, \tag{282}$$

$$\sum_{p=1}^{j-1} n_p + 1 \leq l \leq \sum_{p=1}^{j} n_p, \tag{283}$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m, \quad m_i \geq 1, \tag{284}$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n, \quad n_j \geq 1, \tag{285}$$

$$i = 1, 2, \cdots, s, \tag{286}$$

$$j = 1, 2, \cdots, t \tag{287}$$

と表される．このような表現を A の**分割**（**partition**）という．$(m_1, m_2, \cdots, m_s; n_1, n_2, \cdots, n_t)$ を**分割の型**（**partition type**）という．

例 2.64 **（行列の分割の具体例）**

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 5 & 3 & -9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{288}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix} \tag{289}$$

□

§ 2.9 分割された行列の積

定理 2.65 **（分割された行列の積）** 行列 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times r}$ を分割し，

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1u} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tu} \end{bmatrix}, \tag{290}$$

$$A_{ij} = [a_{kl}]_{m_i\times n_j} \quad (i = 1, 2, \cdots, s;\ j = 1, 2, \cdots, t)\,, \tag{291}$$

$$B_{ij} = [b_{kl}]_{n_i\times r_j} \quad (i = 1, 2, \cdots, t;\ j = 1, 2, \cdots, u)\,, \tag{292}$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m\,, \quad m_i \geq 1\,, \tag{293}$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n\,, \quad n_j \geq 1\,, \tag{294}$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_u = r\,, \quad r_j \geq 1 \tag{295}$$

と表したとき，行列の積 AB は

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1u} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{su} \end{bmatrix}, \tag{296}$$

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \tag{297}$$

と与えられる． □

問 2.66 これを示せ． □

例 2.67 **（分割された行列の積の具体例）** 行列

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ \hline 1 & -2 \\ \hline -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{array}\right] \tag{298}$$

の積 $AB = C$ を考える．このとき行列を分割し

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} \tag{299}$$

とする．C の部分行列は

$$\begin{aligned}
C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} && (300)\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} && (301)\\
&= \begin{bmatrix} -1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} && (302)\\
C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} && (303)\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} && (304)\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} && (305)
\end{aligned}$$

となるので，結局積として

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{306}$$

を得る． □

例 2.68 **(分割された行列の積の計算例)**

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix}. \tag{307}$$

(証明)

$$(\text{左辺}) = \begin{bmatrix} A_1B_1 + OO & A_1O + OB_2 \\ OB_2 + A_2O & OO + A_2B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix} = (\text{右辺}). \tag{308}$$

□

例 2.69 **(分割された行列の積の計算例)** 行列の積

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{309}$$

を考える．これは

$$\left[\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline O & B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} C & E \\ \hline O & D \end{array}\right] \tag{310}$$

という形をしている．よって積は

$$\left[\begin{array}{c|c} AC & A+D \\ \hline O & BD \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline O & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right] \tag{311}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{312}$$

と求まる． □

§ 2.10 行列のベクトルへの分割

例 2.70 **（行列を列ベクトル，行ベクトルへ分割）** 行列を分割し列ベクトルと行ベクトルでそれぞれ表す．行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \tag{313}$$

を考える．行列を一列ずつ縦に分割し，

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix} \tag{314}$$

と表わす．ただし，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{：}3 \times 1 \text{ 型行列（3 次の列ベクトル）} \tag{315}$$

とおく．行列を一行ずつ分割し，

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \tag{316}$$

と表わす．ただし，

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \tag{317}$$

：1×4 型行列（4 次の行ベクトル）

とおく． □

問 2.71 教科書（p.14）問題 1.3. □

例 2.72 **(行列をベクトルに分割したときの積の表現)** 行列の積をベクトルを用いて表現する．行列 A と行列 B の積 AB を考える．行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \text{：行ベクトル} \tag{318}$$

のように行ベクトルに分割する．行列 B は

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \text{：列ベクトル} \tag{319}$$

のように列ベクトルに分割する．このとき積 AB は

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} \tag{320}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_r \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_r) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_r) \end{bmatrix} \tag{321}$$

$$= \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} \tag{322}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 B \\ \boldsymbol{a}_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m B \end{bmatrix} \tag{323}$$

と表わされる．ここで

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_j = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{324}$$

となることに注意する． □

例 2.73 **（行列の積の具体例）**

$$\underbrace{\begin{cases} x + 4y + 5z = -1 \\ 9x + 2y + 6z = -2 \\ 8x + 7y + 3z = -3 \end{cases}}_{\text{連立一次方程式}} \tag{325}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 3 \end{array}\right]}_{\text{ブロック } 1\times 3 \text{ 型}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{3\times 1 \text{ 型}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}}_{3\times 1 \text{ 型}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{326}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x\,\boldsymbol{a}_1 + y\,\boldsymbol{a}_2 + z\,\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b} \tag{327}$$

□

3　連立一次方程式

§ 3.1　連立一次方程式の行列表現

連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 7 \\ x & - & 4y & = & 9 \end{cases} \tag{328}$$

を考える．行列を用いて書き直すと等価な方程式として

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{329}$$

を得る．一般に変数 n 個，方程式 m 本の連立一次方程式は

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{330}$$

と表される．これを**連立 n 元 1 次方程式（simultaneous linear equations）**という．行列で書き直すと，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{331}$$

となる．行列をそれぞれ文字で置き換えて

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A = [a_{ij}]_{m\times n}, \qquad \boldsymbol{x} = [x_j]_{n\times 1}, \qquad \boldsymbol{b} = [b_i]_{m\times 1} \tag{332}$$

と表される．行列により表現された方程式と元の連立一次方程式は等価な方程式である．

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき**同次連立 1 次方程式**または単に**同次形（homogeneous equations???）**という．$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき**非同次連立 1 次方程式**または**非同次形（inhomogeneous equations???）**という．

定義 3.1 **（係数行列）** 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数をまとめた行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{333}$$

を**係数行列（coefficient matrix）**と呼ぶ．行列 A と $\boldsymbol{b}$ を部分行列としてまとめた行列

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{334}$$

のことを**拡大係数行列（enlarged coefficient matrix）**と呼ぶ． □

例 3.2 **（連立一次方程式の行列表現の具体例）** 連立一次方程式

$$\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 7 \\ x_1 & & -3x_3 & +x_4 & = 5 \\ 2x_1 & -x_2 & +9x_3 & & = 0 \end{cases} \tag{335}$$

の係数行列と拡大係数行列は

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [A|\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{336}$$

である．行列を用いて方程式を書き直すと

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{337}$$

と表される． □

問 3.3 教科書（p.18）問題 1.4 1.–2. □

§ 3.2 ベクトルの一次結合と連立一次方程式

定義 3.4 **(ベクトルの一次結合)** m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が与えられたとき，ベクトル

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m \tag{338}$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の**一次結合（linear combination）**と呼ぶ．

□

例 3.5 **(ベクトルの一次結合の具体例)** 2 次の列ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の一次結合で表すと

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{339}$$

となる．

□

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列 A を列ベクトルで分割し $A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ と書き直すと，方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b} \tag{340}$$

となる．すなわち $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$ となる．これはベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合で表したものに他ならない．連立一次方程式は一次結合の係数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を求める問題と等価である．

例 3.6 **(ベクトルの一次結合と連立一次方程式の関係の具体例)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の一次結合で表す．すなわち

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{341}$$

を満たす係数 x_1, x_2 を求める．これを書き直すと

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{342}$$

となる．結局，連立一次方程式を求める問題に帰着する．これを解くと $x_1 = 3/4$, $x_2 = -1/4$ となる．よって

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{343}$$

を得る．

□

問 3.7 教科書（p.18） 問題 1.4 3.–6.

□

§ 3.3 連立一次方程式の基本変形

定義 3.8 **（連立一次方程式の基本変形）** 連立一次方程式に対する次のの操作を**連立一次方程式の基本変形**と呼ぶ.

(1) 一つの式を $\alpha\,(\neq 0)$ 倍する.

(2) 二つの式を入れ替える.

(3) 一つの式を α 倍して別の行に加える.

□

連立一次方程式に基本変形をして得られた方程式と元の方程式とは等価な方程式である．すなわち両者は同じ解をもつ.

連立一次方程式とその行列表現は，方程式としては等価なものである．連立一次方程式の基本変形は，行列表現では次の行列の行の基本変形となる.

定義 3.9 **（行列の行の基本変形）** 行列に対する次の操作を**行列の行の基本変形**（**matrix elementary row transformation**）と呼ぶ.

(1) 一つの行を $\alpha\,(\neq 0)$ 倍する.

(2) 二つの行を入れ替える.

(3) 一つの行を α 倍して別の行に加える.

□

定理 3.10 **（掃き出し法）** 拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ に基本変形を繰り返し行ない,

$$[A|\boldsymbol{b}] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & \text{\Large 0} & \tilde{b}_1 \\ & 1 & & & \tilde{b}_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \text{\Large 0} & & & 1 & \tilde{b}_m \end{array}\right] \tag{344}$$

の形に変形ができたとする．このとき解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix} \tag{345}$$

と得られる．この解法を**掃き出し法**（**sweeping-out method**）または**ガウスの消去法**（**Gaussian elimination**）と呼ぶ. □

例 3.11 **(掃き出し法による計算例)** 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \tag{346}$$

を考える．基本変形を繰り返し行なう．連立方程式とその拡大係数行列

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \tag{347}$$

に基本変形をほどこす．第二式を -2 倍し第一式に加えると

$$\begin{cases} \qquad -y = -2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \tag{348}$$

を得る．第一式と第二式を入れ換えて

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ \qquad -y = -2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \tag{349}$$

となる．第二式を 2 倍し第一式に加えると

$$\begin{cases} x = 1 \\ \qquad -y = -2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \tag{350}$$

となる．第二式を -1 倍すると

$$\begin{cases} x = 1 \\ \qquad y = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{351}$$

を得る．結局拡大係数行列は

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{352}$$

と変形された．以上より，解は $(x, y) = (1, 2)$ と求まる． □

例 3.12 **(掃き出し法による計算例)**　連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \tag{353}$$

を考える．拡大係数行列に基本変形を繰り返し行なう．連立一次方程式とその拡大係数行列

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \tag{354}$$

に基本変形をほどこす．第三行を -2 倍して第一式に足すと

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \tag{355}$$

となる．第三行を第一式に足すと

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ 3y + z = -1 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \tag{356}$$

となる．第一式と第三行を入れ替えると

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3y + z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{357}$$

となる．第三式を -1 倍して第一行に加えると

$$\begin{cases} x - 2z = -3 \\ 3y + z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{358}$$

となる．第三式を -3 倍して第二行に加えると

$$\begin{cases} x - 2z = -3 \\ - 2z = -4 \\ y + z = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{359}$$

となる．第二式と第三式を入れ替えると

$$\begin{cases} x - 2z = -3 \\ y + z = 1 \\ - 2z = -4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \tag{360}$$

となる．第三式を $-\dfrac{1}{2}$ 倍すると

$$\begin{cases} x \qquad - \ 2z \ = -3 \\ \qquad y + z \ = 1 \\ \qquad\qquad z \ = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{361}$$

となる．第三式を 2 倍して第一式に足すと

$$\begin{cases} x \qquad\qquad = 1 \\ \qquad y + z = 1 \\ \qquad\qquad z = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{362}$$

となる．第三式を -1 倍して第二式に足すと

$$\begin{cases} x \qquad\qquad = 1 \\ \qquad y \qquad = -1 \\ \qquad\qquad z = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{363}$$

となる．よって

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{364}$$

を得る．以上より，解は $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ と求まる． □

例 3.13 **（掃き出し法による計算例）** 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ -x + 2y - 4z = -2 \end{cases} \tag{365}$$

を考える．拡大係数行列に基本変形を繰り返し行ない，

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \tag{366}$$

を得る．以上より，解は $(x, y, z) = (1, 1/2, 1/2)$ と求まる． □

問 3.14 教科書（p.22）問題 2.1． □

§ 3.4 行列の簡約化

連立一次方程式

$$(1)\quad x+y=1 \tag{367}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x \qquad + \;\; 2z \;\; = 1 \\ \qquad y \; + \;\;\; z \;\;\; = 2 \end{cases} \tag{368}$$

を考えよる．これらの方程式は解が一意には定まらない例である．このような方程式の解を具体的に求める．

方程式 (1) を変形すると

$$y = 1 - x \tag{369}$$

である．この式より x は任意の値をとることが可能であり，y はその与えられた x の値に対して一つ値が一つ定まる．よって解として

$$\begin{cases} x = c \\ y = 1 - c \end{cases} \tag{370}$$

を得る．ただし c は任意の定数とする．また解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 1-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{q} + c\,\boldsymbol{p} \tag{371}$$

と書ける．よって解全体がなす集合は点 $\boldsymbol{q}$ を通り方向ベクトル $\boldsymbol{p}$ の直線となる．

方程式 (2) の解を求める．方程式を書き直すと

$$\begin{cases} x \;\; = 1 \;\; -2z \\ y \;\; = 2 \;\; -z \end{cases} \tag{372}$$

となる．左辺には x, y があり，右辺は z のみである．右辺の z に値が与えられれば，その z に対応して左辺の x, y の値が定まる．よって c を任意の値として $z = c$ とおくと，解として

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2c \\ 2-c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = c\,\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \tag{373}$$

を得る．解全体の集合は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の点 $\boldsymbol{q}$ を通り方向ベクトル $\boldsymbol{p}$ の直線である．

拡大係数行列はそれぞれ

$$(1)\quad [A\,|\,\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad (2)\quad [A\,|\,\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{374}$$

となる．もっと一般には次のような行列を考える．

定義 3.15 **(階段行列)** 行列が

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 & ** \\ & & 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** \\ & & & & 1 & ** & 0 & ** \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 & ** \\ \hline 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 \end{array}\right] \tag{375}$$

という形をしているとき，この行列を**簡約な行列**または**階段行列**と呼ぶ．また，各行の一番左の 0 ではない成分を**主成分**と呼ぶ．

□

例 3.16 **(簡約な行列の具体例)** 次の行列は簡約な行列である：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{376}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{377}$$

□

定義 3.17 **(簡約化)** 行列 A に基本変形を繰り返し，簡約な行列 B を得ることを**簡約化**と呼ぶ．

□

例 3.18 **(簡約化の計算例)** 簡約化の具体的な計算例を示す：

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{378}$$

$$\text{（第一行目を } 1/2 \text{ 倍する.）} \tag{379}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B \tag{380}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \tag{381}$$

$$\text{（第二行目と第三行目を入れ替える.）} \tag{382}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B \tag{383}$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{384}$$

$$\text{（第二行目を } -3 \text{ 倍し第一行目に加える.）} \tag{385}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{386}$$

$$\text{（第三行目を } -2 \text{ 倍し第一行目に加える.）} \tag{387}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B \tag{388}$$

(4)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{389}$$

$$\text{（第一行目を第三行目を入れ替える.）} \tag{390}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B \tag{391}$$

□

定理 3.19 **（簡約化の一意性）** 任意の行列は基本変形により一意に簡約化できる. □

定義 3.20 **（行列の階数）** 行列 A を簡約化した行列を B とする．このとき行列 A に対する**行列の階数（rank）**を

$$\mathrm{rank}\,(A) = B \text{ の零ベクトルではない行の個数} \tag{392}$$

と定義する． □

例 3.21 **（階数の具体例）**

$$A \xrightarrow{\text{簡約化}} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{rank}\,(A) = 2\,. \tag{393}$$

□

例 3.22 **（階数の具体例）** 例 3.18 の行列の階数：

$$(1) \quad \mathrm{rank}\,(A) = 2 \qquad\qquad (2) \quad \mathrm{rank}\,(A) = 2 \tag{394}$$

$$(3) \quad \mathrm{rank}\,(A) = 3 \qquad\qquad (4) \quad \mathrm{rank}\,(A) = 3 \tag{395}$$

□

定理 3.23 **（階数に関する定理）** 行列 A が $m \times n$ 型のとき，

$$\mathrm{rank}\,(A) \leq m\,, \qquad \mathrm{rank}\,(A) \leq n \tag{396}$$

が成り立つ． □

問 3.24 これを示せ． □

問 3.25 教科書（p.27）問題 2.2． □

§ 3.5 連立一次方程式の解法

例 3.26 **(任意定数を含む解の具体例)** 方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{397}$$

を考える．拡大係数行列の簡約化を行なうと，

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{398}$$

を得る．ここで

$$\operatorname{rank}(A) = 3, \quad \operatorname{rank}([A \,|\, \boldsymbol{b}]) = 3 \tag{399}$$

が成立することに注意する．簡約化された拡大係数行列より方程式を復元すると，

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x_1 & -2x_2 & & +3x_4 & & = 2 \\ & & x_3 & -x_4 & & = -1 \\ & & & & x_5 & = 1 \end{array} \right. \tag{400}$$

である．主成分の列と同じ位置にある変数を左辺に残し，他の項を右辺に移項すると

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = 2 + 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 & = -1 + x_4 \\ x_5 & = 1 \end{array} \right. \tag{401}$$

となる．右辺にある変数 x_2, x_4 は独立に任意の値をとる．よって $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$ とおけば，解として

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2c_1 - 3c_2 \\ c_1 \\ -1 + c_2 \\ c_2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2 \text{ ：任意定数}) \tag{402}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{403}$$

を得る．解は 5 次元平面 $\mathbb{R}^5$ 内のある 2 次元平面となる． □

例 3.27 **（解が存在しない具体例）**　方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{404}$$

を考える．拡大係数行列の簡約化を行なうと，

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{405}$$

を得る．方程式に書き戻すと

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & & -2x_5 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & & +x_5 & = 0 \\ & & & x_4 & -x_5 & = 0 \\ 0 & +0 & +0 & +0 & +0 & = 1 \end{cases} \tag{406}$$

となる．最後の行は $0 = 1$ となるから，どのような $\boldsymbol{x}$ をとっても成立することはない．よってこの連立方程式の解は存在しない．ここで

$$\operatorname{rank}(A) = 3 < \operatorname{rank}([A\,|\,\boldsymbol{b}]) = 4 \tag{407}$$

が成り立つことに注意する．このとき解をもたない．　□

連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \quad \boldsymbol{b} = [b_i]_{m\times 1}\,, \quad \boldsymbol{x} = [x_j]_{n\times 1} \tag{408}$$

を考える．以後この方程式に対して議論する．

方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めるにはまず，拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ の簡約化を行なう．このとき得られた行列が

$$[A|\boldsymbol{b}] \xrightarrow{\text{簡約化}} \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 \\ & & 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 \\ & & & & 1 & ** & 0 & ** & 0 \\ \text{\huge 0} & & & & & & 1 & ** & 0 \\ \hline 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{409}$$

と得られたとしよう．このとき零ベクトルではない一番下の行に着目すると

$$0 \times x_1 + 0 \times x_2 + 0 \times x_3 + \cdots + 0 \times x_n = 1 \tag{410}$$

となる．$0 = 1$ となり矛盾する．よってこのとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもたない．各係数行列のランクに着目すると，

$$A \xrightarrow{\text{簡約化}} \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 & ** \\ & & 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** \\ & & & & 1 & ** & 0 & ** \\ \text{\huge 0} & & & & & & 1 & ** \\ \hline 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 \end{array}\right] \tag{411}$$

であるから，

$$\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}([A\,|\,\boldsymbol{b}]) \tag{412}$$

が成り立つ．この条件のもとでは解をもたない．次に簡約化の結果として

$$[A|\boldsymbol{b}]\text{ の簡約化行列} = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 & ** & * \\ & & 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & * \\ & & & & 1 & ** & 0 & ** & * \\ \text{\huge 0} & & & & & & 1 & ** & * \\ \hline 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{413}$$

を得たとする．こときは解をもつ．係数行列のランクは $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|\boldsymbol{b}])$ が成り立つ．以上をまとめると次の定理が成り立つ．

定理 3.28 **(連立一次方程式の可解条件)** 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{b}]) = \mathrm{rank}\,(A) \tag{414}$$

である．

□

解に任意定数を含まないのは，簡約行列のすべての列に主成分が現れるときである．つまり係数行列のランクと変数の個数が一致するときである．これをまとめると以下の定理を得る．

定理 3.29 **(一意な解をもつ条件)** 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が唯一つの解をもつための必用十分条件は

$$\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{b}]) = n \tag{415}$$

である．

□

定理 3.30 **(任意定数を含む解をもつ条件)** 方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \quad A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \quad \boldsymbol{x} = [x_j]_{n\times 1}\,, \quad \boldsymbol{b} = [b_i]_{m\times 1} \tag{416}$$

は

$$\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,[A|\boldsymbol{b}] < n \tag{417}$$

のとき任意定数を含む解をもつ．このとき任意定数の個数は

$$n - \mathrm{rank}\,(A) \tag{418}$$

である．

□

定義 3.31 **（同次形方程式）** $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{b} = 0$ が成り立つとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は**同次形（homogeneous）**と呼ぶ．$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とき**非同次形（inhomogeneous）**と呼ぶ． □

定理 3.32 **（同次形の解の存在）** 同次方程式は $\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,[A|\boldsymbol{0}]$ が常になり立つので，常に解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をもつ． □

定義 3.33 **（同次形の自明解）** 同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を**自明な解**と呼ぶ． □

定理 3.34 **（同次方程式の解）** 同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ について次の条件が成り立つ：

(1) 自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみをもつための必用十分条件は

$$\mathrm{rank}\,(A) = n \tag{419}$$

である．

(2) $m < n$ のとき，方程式は自明でない解（任意定数を含む解）をもつ．

（証明）(1) 前述の定理より唯一つの解をもつための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{0}]) = n \tag{420}$$

である．拡大係数行列の一番右の列の $\boldsymbol{0}$ はランクに影響を与えない．よって定理の条件を得る．
(2) $\mathrm{rank}\,(A) \leq m$, $\mathrm{rank}\,(A) \leq n$ と条件 $m < n$ より

$$\mathrm{rank}\,(A) \leq m < n \tag{421}$$

を得る．(1) の定理より自明でない解をもつ．証明終了． □

例 3.35 **（同次形方程式の解）** 方程式

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{422}
$$

を考える．係数行列を簡約化して

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{423}
$$

を得る．よって解は

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2c_1 - c_2 \\ -c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R}) \tag{424}
$$

となる．解は原点を通る 2 次元平面である． □

§ 3.6 ちょっとまとめ

? 3.36 **（任意定数を含む解って何？）** 方程式 $x_1 + x_2 = 0$ の解を考えよう．この方程式の解はどのように表現したらよいだろうか．まずは具体的にいくつか解を書き下してみよう．解は方程式に代入して成り立てばよいから，

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = -1\,, \tag{425}$$
$$x_1 = 2\,, \quad x_2 = -2\,, \tag{426}$$
$$x_1 = 3\,, \quad x_2 = -3\,, \tag{427}$$
$$x_1 = 4\,, \quad x_2 = -4\,, \tag{428}$$
$$\vdots \tag{429}$$

は解となるのがすぐ分かる．この解から予想できることとして x_1 は任意の値で良さそうである．これを c としよう．$x_1 = c$ とおけば $x_2 = -c$ である．よって解として

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} \qquad (\forall c \in \mathbb{R}) \tag{430}$$

を得る．確にこれが解となっているかは，方程式 $x_1 + x_2 = 0$ に代入すればよい．この解は任意定数を含む解である．変数の個数は 2 個であり，方程式の本数が 1 本であるので，任意定数の個数は $2 - 1 = 1$ 個となる．

次に方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{431}$$

を考えよう．第一式は先ほどの方程式と同じである．であるから第一式を満たす解として $(x_1, x_2) = (c, -c)$ を得る．第二式も第一式と同じ形をしており，変数名が違うだけである．よって解は $(x_3, x_4) = (c, -c)$ である．しかし第一式と第二式とは独立しているので，任意定数も独立してとり得る．これを $x_1 = c_1$, $x_3 = c_2$ としよう．よって解として

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix} \qquad (\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R}) \tag{432}$$

を得る．変数が 4 個，方程式が 2 本，任意定数が $4 - 2 = 2$ 個である．

以上より，**任意定数の個数は変数の個数から方程式の（本質的な）本数を引いたもの**である．

□

? 3.37 **（簡約化って何？）** 方程式

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ & & x_3 & +x_4 & =0 \end{cases} \tag{433}$$

を考えよう．第一式から第二式を引くと，

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & & =0 \\ & & x_3 & +x_4 & =0 \end{cases} \tag{434}$$

を得る．第一式から変数が 2 個減っている．このとき係数行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{435}$$

のように変形される．右の行列は簡約な行列となっている．

次に方程式

$$\begin{cases} 3x_1 & +4x_2 & =2 \\ x_1 & +2x_2 & =3 \end{cases} \tag{436}$$

を考えよう．方程式と係数行列の変化をみよう：

$$\begin{cases} 3x_1 & +4x_2 & =2 \\ x_1 & +2x_2 & =3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \tag{437}$$

$$\to \begin{cases} 0 & -2x_2 & =-7 \\ x_1 & +2x_2 & =3 \end{cases} \qquad \to \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \tag{438}$$

$$\to \begin{cases} x_1 & +2x_2 & =3 \\ & -2x_2 & =-7 \end{cases} \qquad \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -7 \end{array}\right] \tag{439}$$

$$\to \begin{cases} x_1 & 0 & =-4 \\ & -2x_2 & =-7 \end{cases} \qquad \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -7 \end{array}\right] \tag{440}$$

$$\to \begin{cases} x_1 & & =-4 \\ & x_2 & =7/2 \end{cases} \qquad \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right] \tag{441}$$

このように基本変形により変数が減って行く．この手順によりうまく変数を減らすことができる．ある行列が与えられたとき，その行列に対して簡約な行列は一意に定まる．つまり，**与えられた方程式に対して常にうまい変数の減らし方が存在する**ことを意味する． □

? 3.38 **(ランクっ何？)** 方程式

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ & & x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & =0 \end{cases} \tag{442}$$

を考えよう．変数が 4 個，方程式が 3 本であるから任意定数は $4-3=1$ 個であろう．しかし本当にそうであろうか．まずは方程式に基本変形をほどこしてみよう：

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & & =0 \\ & & x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & =0 \end{cases} \tag{443}$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & & =0 \\ & & x_3 & +x_4 & =0 \\ 0 & +0 & +0 & +0 & =0 \end{cases} \tag{444}$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & & =0 \\ & & x_3 & +x_4 & =0 \end{cases} \tag{445}$$

このように方程式は本質的に 2 本である．よって変数が 2 個，方程式が 2 本，任意定数が $4-2=2$ 個となる．これを係数行列でみてみよう：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{446}$$

最後の簡約化された行列に着目する．行列のランクは 2 である．つまり，**係数行列のランクは方程式の本質的な本数**を示している． □

まとめ 3.39 **(連立一次方程式についてのまとめ)** 連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad \boldsymbol{b} = [b_i]_{m\times 1}, \quad \boldsymbol{x} = [x_j]_{n\times 1} \tag{447}$$

について次の関係が成り立つ：
(I) 非同次形（$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$）のとき

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{rank}\,(A) \neq \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{b}]) & \Leftrightarrow & \text{解なし} \\
\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{b}]) = n & \Leftrightarrow & \text{一意な解をもつ} \\
\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{b}]) < n & \Leftrightarrow & \text{任意定数を含む解をもつ} \\
 & & \text{任意定数の個数} = n - \mathrm{rank}\,(A)
\end{array}$$

(II) 同次形（$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$）のとき

$$\begin{array}{rlcl}
\text{常に} & \mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{0}]) & \text{が成り立つので} & \text{解を常にもつ} \\
 & \mathrm{rank}\,(A) = n & \Leftrightarrow & \text{自明な解（}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\text{）をもつ} \\
m < n \Rightarrow & \mathrm{rank}\,(A) < n & \Leftrightarrow & \text{任意定数を含む解をもつ} \\
 & & & \text{任意定数の個数} = n - \mathrm{rank}\,(A)
\end{array}$$

□

§ 3.7　基本変形の行列表現

定理 3.40 **（行列の積による行列の行の基本変形）**　行列 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ が与えられたとき，次に定義される行列 $P^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ を左から掛けて，積 $P^{(\nu)}A$ を考える．このとき積 $P^{(\nu)}A$ は行列の行の第 ν 基本変形を A にほどこした行列と等しい．

(1) 第 k 行を α 倍する．

$$P_k^{(1)}(\alpha) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \hline & & & \alpha & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & k & & & \end{array} & \end{array} \tag{448}$$

(2) 第 k 行と第 l 行を入れ替える．

$$P_{k,l}^{(2)} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ \hline & & & 0 & & & & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & & & & 0 & & & \\ \hline & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & k & & & & l & & & \end{array} \end{array} \tag{449}$$

(3) 第 l 行を α 倍して第 k 行に加える.

$$P^{(3)}_{k,l}(\alpha) = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & k & & & & l & & & \end{array}\end{array} \quad (k < l) \tag{450}$$

$$P^{(3)}_{k,l}(\alpha) = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & l & & & & k & & & \end{array}\end{array} \quad (l < k) \tag{451}$$

□

問 3.41 これを示せ. □

例 3.42 **（行列の行の基本変形の具体例）** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{452}$$

を考える．このとき A にいろいろな基本変形を行なうと次のようになる．

$$P_1^{(1)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 1 行を } \alpha \text{ 倍} \tag{453}$$

$$P_2^{(1)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4\alpha & 5\alpha & 6\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 2 行を } \alpha \text{ 倍} \tag{454}$$

$$P_3^{(1)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7\alpha & 8\alpha & 9\alpha \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 3 行を } \alpha \text{ 倍} \tag{455}$$

$$P_{1,2}^{(2)}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 1 行と第 2 行を入れ換え} \tag{456}$$

$$P_{1,3}^{(2)}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 1 行と第 3 行を入れ換え} \tag{457}$$

$$P_{2,3}^{(2)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 2 行と第 3 行を入れ換え} \tag{458}$$

$$P_{1,2}^{(3)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4\alpha & 2+5\alpha & 3+6\alpha \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \tag{459}$$

$$\leftarrow \text{第 2 行を } \alpha \text{ 倍し第 1 に加える} \tag{460}$$

$$P_{3,2}^{(3)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+4\alpha & 8+5\alpha & 9+6\alpha \end{bmatrix}. \tag{461}$$

$$\leftarrow \text{第 2 行を } \alpha \text{ 倍し第 3 に加える} \tag{462}$$

$$P_{2,1}^{(3)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+\alpha & 5+2\alpha & 6+3\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \tag{463}$$

$$\leftarrow \text{第 1 行を } \alpha \text{ 倍し第 2 に加える} \tag{464}$$

□

例 3.43 **(簡約化の行列表現)** 行列 A を簡約化し B とする．このとき

$$A \overset{\text{簡約化}}{\to} B = PA \tag{465}$$

を満たす行列 P を求める．簡約化を次のように行う：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{466}$$

$$\text{（第一行目を第二行目に加える.）} \tag{467}$$

$$\xrightarrow{P_1} A_1 = P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{468}$$

$$\text{（第三行目を } -2 \text{ 倍し第二行目に加える.）} \tag{469}$$

$$\xrightarrow{P_2} A_2 = P_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{470}$$

$$\text{（第二行目と第三行目を入れ替える.）} \tag{471}$$

$$\xrightarrow{P_3} A_3 = P_3 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{472}$$

$$\text{（第三行目を } -1 \text{ 倍し第一目に加える.）} \tag{473}$$

$$\xrightarrow{P_4} A_4 = P_4 A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{474}$$

$$\text{（第三行目を } 1/2 \text{ 倍する.）} \tag{475}$$

$$\xrightarrow{P_5} A_5 = P_5 A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E = B\,. \tag{476}$$

簡約化された行列 B はここでは単位行列 E となる．この結果を書き直すと

$$B = E = A_5 = P_5 A_4 = P_5 P_4 A_3 = P_5 P_4 P_3 A_2 = P_5 P_4 P_3 P_2 A_1 = P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 A \tag{477}$$

$$= (P_5 P_4 P_3 P_2 P_1) A = PA \tag{478}$$

と書ける．ここで

$$P = P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 \tag{479}$$

とおいた．よって $B = PA$ を満たす P が得られる．行列 P を具体的に求める．P は P_1 から

P_5 の積で

$$P = P_5P_4P_3P_2P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{480}$$

と表されるので，これを計算すれば良い．しかしながらこれは面倒である．積の順番を

$$P = P_5P_4P_3P_2P_1 = P_5P_4P_3P_2P_1E = P_5(P_4(P_3(P_2(P_1E)))) \tag{481}$$

として計算する．これはすなわち，単位行列 E に対して A に行った基本変形と同じ操作を同じ順番で行うことを意味する．よって

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{482}$$

$$\text{(第一行目を第二行目に加える.)} \tag{483}$$

$$\xrightarrow{P_1} P_1E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{484}$$

$$\text{(第三行目を } -2 \text{ 倍し第二行目に加える.)} \tag{485}$$

$$\xrightarrow{P_2} P_2P_1E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{486}$$

$$\text{(第二行目と第三行目を入れ替える.)} \tag{487}$$

$$\xrightarrow{P_3} P_3P_2P_1E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{488}$$

$$\text{(第三行目を } -1 \text{ 倍し第一目に加える.)} \tag{489}$$

$$\xrightarrow{P_4} P_4P_3P_2P_1E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{490}$$

$$\text{(第三行目を } 1/2 \text{ 倍する.)} \tag{491}$$

$$\xrightarrow{P_5} P_5P_4P_3P_2P_1E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} = P \tag{492}$$

を得る．以上より $B = E = PA$ を満たす

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \tag{493}$$

を求めた． □

注意 3.44 **(変換の行列表現)** 行列 A から行列 B への変換を f とする．すなわち

$$B = f(A) \tag{494}$$

とする．関数 f は入力が行列で出力も行列である．いま簡約化を表す関数 f を考える．このとき

$$B = f(A) = PA \tag{495}$$

と表される．関数 f は入力行列 A に対して左から P を掛ける操作を意味する．簡約化という操作は行列 P と対応する．行列の変換においては入力，出力，操作ともに全て行列で表される．

□

§ 3.8 逆行列

定義 3.45 **（逆行列）** 行列 A に対して

$$AB = BA = E \tag{496}$$

を満たす行列 B が存在するとき，行列 B を行列 A の**逆行列（inverse matrix）**と呼ぶ．A の逆行列は A^{-1} と表記する．

□

問 3.46 **（逆行列の性質）** 逆行列をもつのは正方行列のみである．これを示せ．

（証明）$AB = BA$ を満たす行列は可換な行列である．可換な行列は正方行列のみである．
□

定理 3.47 **（逆行列の一意性）** 行列 A が逆行列をもつとき，逆行列は一意に定まる．

（証明）B と C が A の逆行列であると仮定する．このとき $AB = BA = E, AC = CA = E$ が成り立つ．これを用いて

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \tag{497}$$

となる．よって $B = C$ であり B と C とは一致する．

□

定義 3.48 **（行列の正則性）** 正方行列 A が逆行列をもつとき，A は**正則（regular）**であるという．正則な行列を**正則行列（regular matrix）**と呼ぶ．

□

定理 3.49 **（逆行列をもつ十分条件）** 正方行列 A, B が $AB = E$ または $BA = E$ のどちらか一方だけを満たすときでも B は A の逆行列となる．

（証明）証明はずっとあとに行なう．

□

定理 3.50 **（逆行列の計算法）**　行列 $[A|E]$ を簡約化して $[E|B]$ の形に変形できたとする．このとき B は A の逆行列 A^{-1} となる．

（証明）行列 A に基本変形 $P^{(*)}$ を繰り返し行ない単位行列 E に変換されたとする．このとき

$$A \xrightarrow{\text{簡約化}} E, \quad E = (P^{(*)}P^{(*)}\cdots P^{(*)})A \tag{498}$$

と書ける．A の左にかかっている行列をまとめて B と書くと，

$$B = P^{(*)}P^{(*)}\cdots P^{(*)} \tag{499}$$

となる．B を用いれば $BA = E$ が成り立つ．前述の定理より $BA = E$ のとき B は A の逆行列 $B = A^{-1}$ となる．よって行列 B を求めればよい．B は

$$B = P^{(*)}P^{(*)}\cdots P^{(*)}E \tag{500}$$

と書ける．これはすなわち A に行なった基本変形と同じ操作を E に対して同じ順で行なうことを意味する．これらの操作を同時に行なうには，行列 $[A|E]$ に対して簡約化を行い $[E|B]$ の形にすればよい．この一連の操作により $BA = E$ を得る．　$\square$

例 3.51 **(逆行列の計算例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{501}$$

を考える．この行列の逆行列を求める．行列 $[A \,|\, E]$ に基本変形を次のように繰り返し行なう：

$$[A \,|\, E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (\text{一行目を } -1 \text{ 倍して三行目に加える.}) \tag{502}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (\text{一行目を } -2 \text{ 倍して二行目に加える.}) \tag{503}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (\text{二行目を } 2 \text{ 倍して一行目に加える.}) \tag{504}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (\text{三行目を一行目に加える.}) \tag{505}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (\text{三行目を二行目に加える.}) \tag{506}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (\text{二行目を } -1 \text{ 倍する.}) \tag{507}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [E \,|\, A^{-1}]. \tag{508}$$

よって，A の逆行列

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{509}$$

を得る． □

定理 3.52 **(行列の正則性と諸性質)** 正方行列 A に対して次の (1)-(5) は同値である：

(1) $\operatorname{rank}(A) = n$.

(2) A の簡約化は E である.

(3) 任意の $\boldsymbol{b}$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は一意な解をもつ.

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみをもつ.

(5) A は正則である.

（証明）(1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1)，(3) $\Leftrightarrow$ (5) を示す.

(1) $\Rightarrow$ (2) を示す．A は $n \times n$ 型でフルランクであるから，簡約化は明らかに E となる.

(2) $\Rightarrow$ (3) を示す．簡約化により $[A \,|\, \boldsymbol{b}] \to [E \,|\, \tilde{\boldsymbol{b}}]$ となるので，方程式は $E\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ となる．よって解として一意な解 $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ をもつ.

(3) $\Rightarrow$ (4) を示す．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき $\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0}$ であるから，解として $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみをもつ.

(4) $\Rightarrow$ (1) を示す．定理 3.34 より，同次形方程式が自明な解のみをもつ必用十分条件は $\operatorname{rank} A = n$ である.

(3) $\Rightarrow$ (5) を示す．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ のときの解をそれぞれ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n$ とする．このとき

$$A\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad A\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{e}_2, \quad \cdots A\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{e}_n \tag{510}$$

$$\Rightarrow \quad A\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \tag{511}$$

$$\Rightarrow \quad AC = E \tag{512}$$

となる．C は A の逆行列である．よって A は正則である.

(5) $\Rightarrow$ (3) を示す.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad E\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{513}$$

□

定理 3.53 **(逆行列による解法)** 正方行列 A が正則なとき方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ をもつ.

□

例 3.54 **(逆行列をもたない具体例)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \tag{514}$$

の逆行列を考える．例題 3.51 と同じように計算を行なう：

$$[A \,|\, E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{（一行目を -3 倍して三行目に加える.）} \tag{515}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{（一行目を -2 倍して二行目に加える.）} \tag{516}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{（二行目を -1 倍する.）} \tag{517}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{（二行目を -2 倍して一行目に加える.）} \tag{518}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{（二行目を 2 倍して三行目に加える.）} \tag{519}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]. \tag{520}$$

これより行列 A の簡約化は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{521}$$

となる．よって $\operatorname{rank}(A) = 2 < 3$ となる．定理 3.52 の (1) $\Leftrightarrow$ (5) より A は正則ではない．よって A は逆行列をもたない． □

例 3.55 **(逆行列を用いた解法の具体例)** 方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{522}$$

を考える．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とすると $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ より解が求まる．よって

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{523}$$

を得る．

□

定理 3.56 **(逆行列の性質)** 正方行列 A, B が正則のとき次の関係式が成り立つ：

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□

問 3.57 これを示せ．

（証明）(3) を示す．

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E\,. \tag{524}$$

$$\Rightarrow \quad (AB)(B^{-1}A^{-1}) = E\,. \tag{525}$$

$$\Rightarrow \quad AB \text{ の逆行列は } B^{-1}A^{-1}. \tag{526}$$

$$\Rightarrow \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,. \tag{527}$$

□

4 行列式

§ 4.1 行列式の導出

連立一次方程式

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}\right. \tag{528}$$

を考える．このときこの方程式が一意な解ともつ条件を求める．方程式を書き直すと

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{529}$$

となる．拡大係数行列は

$$[A\,|\,\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \tag{530}$$

である．簡約化を行う：

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \tag{531}$$

$$\text{（第一行に } -a_{21}/a_{11} \text{ を掛けて第二行に加える.）} \tag{532}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \dfrac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}} \end{array}\right] \tag{533}$$

$$\text{（第二行に } a_{11} \text{ を掛ける.）} \tag{534}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}b_2-b_1a_{21} \end{array}\right] \tag{535}$$

$$\text{（第二行に } -a_{12}/(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \text{ を掛けて第一行に加える.）} \tag{536}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & 0 & \dfrac{a_{11}(b_1a_{22}-a_{12}b_2)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}b_2-b_1a_{21} \end{array}\right] \tag{537}$$

$$\text{（第一行に } -1/a_{11} \text{ を掛ける.）} \tag{538}$$

$$\text{（第二行に } -1/(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \text{ を掛ける.）} \tag{539}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ 0 & 1 & \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{array}\right]. \tag{540}$$

$$\tag{541}$$

ここで $a_{11} \neq 0$ と

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \tag{542}$$

を条件としてかした．このとき拡大係数行列の階数は 2 であり，一意な解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{543}$$

をもつ．この結果より，行列 A に対してスカラー量 $\det(A)$ を

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{544}$$

と定義する．$\det(A)$ を**行列式（determinant）**という．以上より，連立方程式の解の判別条件を得る．$\det(A) \neq 0$ のとき行列 A はフルランクであり一意な解をもつ．$\det(A) = 0$ のとき行列 A はランクが落ち一意な解をもたない．

同様にして正方行列 A に対して行列式を定義すると

$$1 \times 1 \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11} \tag{545}$$

$$2 \times 2 \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{546}$$

$$3 \times 3 \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{547}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \tag{548}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{549}$$

となる．一般に $n \times n$ 行列では

$$\det(A) = \sum_{(k_1, \cdots, k_n) \in S_n} (\pm) a_{1,k_1} a_{2,k_2} a_{3,k_3} \cdots a_{n,k_n} \tag{550}$$

となることが予想される．ここで $k_1, k_2, \cdots, k_n$ は 1 から n の整数でお互いが異なる値をとる．総和 $\sum$ はこの組合わせの全ての和をとる．互いに異なる n 個の組合わせを考えるので足し合せる項は $n!$ である．すなわちこの組合わせの集合 S_n は

$$S_1 = \{(1)\}\ , \tag{551}$$

$$S_2 = \{(1,2), (2,1)\}\ , \tag{552}$$

$$S_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,1,2), (3,2,1)\} \tag{553}$$

である．S_n の元の個数は順列組合わせの個数となるので $n!$ 個である．符合 $\pm$ は次節の置換の符合から定まる．

§ 4.2 置換

定義 4.1 **（文字の置換）** n 個の文字 $\{1, 2, \cdots, n\}$ から自分自身 $\{1, 2, \cdots, n\}$ への 1 対 1 の写像を n 文字の**置換**（**permutation**）という．n 文字の置換 σ が写像

$$1 \to k_1\,, \quad 2 \to k_2\,, \quad \cdots n \to k_n \tag{554}$$

のとき σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{555}$$

と表わす．写像 $j \to k_j$ を $\sigma(j) = k_j$ と表わす． □

例 4.2 **（置換の具体例）**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\,, \tag{556}$$

$$1 \to 3\,, \quad 2 \to 1\,, \quad 4 \to 4\,, \quad 4 \to 2\,, \tag{557}$$

$$\sigma(1) = 3\,, \quad \sigma(2) = 1\,, \quad \sigma(4) = 4\,, \quad \sigma(4) = 2\,. \tag{558}$$

□

例 4.3 **（置換の表記）**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{559}$$

同じ数字に置換する場合は省略可能．並べる順はどうでも良い． □

定義 4.4 **(置換の積)** 二つの置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}, \tag{560}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{pmatrix} \tag{561}$$

の積 $\sigma\tau$ を

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_{l_1} & k_{l_2} & \cdots & k_{l_n} \end{pmatrix}, \tag{562}$$

または

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{563}$$

と定義する. □

例 4.5 **(置換の積の具体例)**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \tag{564}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{565}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \sigma(\tau(4)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(1) \end{pmatrix} \tag{566}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \tag{567}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{568}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) & \tau(\sigma(4)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau(4) & \tau(3) & \tau(1) & \tau(2) \end{pmatrix} \tag{569}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{570}$$

□

注意 4.6 **(置換の積は非可換)** 一般的に $\sigma\tau = \tau\sigma$ は成立しない. □

定義 4.7 **(単位置換)** 全ての文字を動かさない置換

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{571}$$

を**単位置換**と呼ぶ. □

定義 4.8 **(逆置換)** 置換 σ に対して

$$\sigma\tau = \tau\sigma = \epsilon \tag{572}$$

を満たす置換 τ を σ の**逆置換**と呼び, $\tau = \sigma^{-1}$ と表わす. □

定理 4.9 **(逆置換)** 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{573}$$

の逆置換は

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{574}$$

で与えられる. □

例 4.10 **(逆置換の具体例)**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{575}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{576}$$

□

定義 4.11 **(巡回置換)** n 個の文字 $\{1, 2, \cdots, n\}$ のうち r 個の文字 $\{k_1, k_2, \cdots, k_r\}$ のみを $k_1 \to k_2, k_2 \to k_3, \cdots, k_r \to k_1$ と順にずらし，残りの文字 $\{k_{r+1}, \cdots, k_n\}$ を $k_{r+1} \to k_{r+1}, \cdots, k_n \to k_n$ と動かさない写像の置換を**巡回置換**という．巡回置換は

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r & k_{r+1} & \cdots & k_n \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 & k_{r+1} & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{577}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 \end{pmatrix} \tag{578}$$

と表わされ，省略するときは

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} \tag{579}$$

と書く． □

例 4.12 **(巡回置換の具体例)**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{580}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \tag{581}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{582}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{583}$$

□

定理 4.13 **(置換を巡回置換の積で表わす)** 任意の置換 σ は巡回置換 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ の積で $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ と表わされる. □

例 4.14 **(置換を巡回置換の積で表わす計算例)**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \tag{584}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \tag{585}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} . \tag{586}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \tag{587}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \tag{588}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} . \tag{589}$$

□

定義 4.15 **(互換)** 2 文字の巡回置換 $(i \quad j)$ を**互換**という. □

定理 4.16 **(巡回置換を互換の積で表わす)** 任意の巡回置換は互換の積で表わされる. たとえば, その一つとして

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_r \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \tag{590}$$

と表わされる. □

例 4.17 **(置換を互換の積で表わす)** たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{591}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \tag{592}$$

たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} . \tag{593}$$

□

注意 4.18　互換の積で表わす方法は幾通りもある. □

定義 4.19　**(置換の符号)**　置換 σ が m 個の互換の積で表わされるとき σ の**符号 (sign)** を

$$\mathrm{sgn}\,(\sigma) = (-1)^m \tag{594}$$

と定義する. □

例 4.20　**(置換の符号の具体例)**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{595}$$

より

$$\mathrm{sgn}\,(\sigma) = (-1)^3 = -1 \tag{596}$$

となる. また

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{597}$$

より

$$\mathrm{sgn}\,(\sigma) = (-1)^5 = -1 \tag{598}$$

である. □

定理 4.21　**(置換の符号の一意性)**　置換 σ の符号 $\mathrm{sgn}\,(\sigma)$ は互換の積の表わし方によらず一意に定まる. □

定理 4.22　**(置換の符号の性質)**

$$\mathrm{sgn}\,(\epsilon) = 1 \tag{599}$$

$$\mathrm{sgn}\,(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}\,(\sigma)\mathrm{sgn}\,(\tau) \tag{600}$$

$$\mathrm{sgn}\,(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}\,(\sigma) \tag{601}$$

□

定義 4.23 （偶置換，奇置換）　$\mathrm{sgn}\,(\sigma)=1$ となる置換を**偶置換**と呼び，$\mathrm{sgn}\,(\sigma)=-1$ となる置換を**奇置換**と呼ぶ．
□

例 4.24 （偶置換，奇置換の具体例）

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&6&8&2&1&4&9&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7&9&5&2&6&4&3&3\\7&9&5&1&6&4&2&8&2\end{pmatrix} \tag{602}$$

$$=\begin{pmatrix}1&7&9&5\\7&9&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&4\\6&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8\\8&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7&9&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8\end{pmatrix} \tag{603}$$

$$=\begin{pmatrix}1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8\end{pmatrix} \tag{604}$$

より

$$\mathrm{sgn}\,(\sigma)=(-1)^6=1 \tag{605}$$

となる．σ は偶置換である．
□

定義 4.25 （置換全体の集合）　n 文字の置換 σ の全体の集合を S_n と書く．
□

注意 4.26 （置換全体の集合の要素の個数）　n 文字の置換は写像

$$\{1,2,\cdots,n\}\quad\rightarrow\quad\{k_1,k_2,\cdots,k_n\} \tag{606}$$

であるから，その個数は n 個の文字の順列組合わせに等しい．よって集合 S_n の個数は $n!$ である．
□

例 4.27 （置換全体の集合の具体例）

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=\{\underset{偶}{\epsilon}\} \tag{607}$$

$$S_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}=\{\underset{偶}{\epsilon},\quad\underset{奇}{\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}}\} \tag{608}$$

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\} \tag{609}$$

$$=\{\underset{偶}{\epsilon},\quad\underset{奇}{\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}},\quad\underset{奇}{\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}},\quad\underset{偶}{\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}},\quad\underset{偶}{\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}},\quad\underset{奇}{\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}}\} \tag{610}$$

□

問 4.28 （置換全体の集合）　4 次の置換全体の集合 S_4 の要素全てを書き出せ．またその偶奇も述べよ．
□

問 4.29 （偶置換，奇置換の個数）　$S_n\ (n\geq 2)$ に含まれる偶置換と奇置換の個数は等しい．これを示せ．
□

§ 4.3 多項式の文字の置換

定義 4.30 **(多項式の変数の置換)** n 変数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と置換 $\sigma \in S_n$ に対して

$$\sigma\, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \cdots, x_{\sigma_n}) \tag{611}$$

と定義する. □

例 4.31 **(多項式の変数の置換の具体例)**

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + 2x_2 + 3x_3 \tag{612}$$

とする.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{613}$$

のとき

$$\sigma\, f(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_1, x_3) = x_2 x_1 + 2x_1 + 3x_3 \tag{614}$$

となる.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{615}$$

のとき

$$\sigma\, f(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2 x_3 + 2x_3 + 3x_1 \tag{616}$$

となる. □

定理 4.32 **(置換の積)** $\sigma, \tau \in S_n$ に対して

$$(\sigma\tau) f(x_1, \cdots, x_n) = (\sigma(\tau f))(x_1, \cdots, x_n) \tag{617}$$

が成立する.

(証明)

$$(\text{左辺}) = (\sigma\tau) f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{(\sigma\tau)(1)}, \cdots, x_{(\sigma\tau)(n)}), \tag{618}$$

$$(\text{右辺}) = (\sigma(\tau\, f))(x_1, \cdots, x_n) = \sigma\, f(x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(n)}) \tag{619}$$

$$= f(x_{\sigma(\tau(1))}, \cdots, x_{\sigma(\tau(n))}) = f(x_{(\sigma\tau)(1)}, \cdots, x_{(\sigma\tau)(n)}). \tag{620}$$

□

定義 4.33 **(差積)** n 変数 $x_1, \cdots, x_n$ の多項式

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \tag{621}$$

を**差積**と呼ぶ. □

例 4.34 **(差積の具体例)**

$$\Delta(x_1, x_2) = x_1 - x_2\,, \tag{622}$$

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\,, \tag{623}$$

$$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)\,, \tag{624}$$

$$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5) \tag{625}$$

$$\times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5) \tag{626}$$

$$\times (x_3 - x_4)(x_3 - x_5) \tag{627}$$

$$\times (x_4 - x_5)\,. \tag{628}$$

□

定理 4.35 **(互換による差積の置換)** 互換 $\sigma = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ に対して

$$\sigma\,\Delta(x_1, \cdots, x_n) = -\Delta(x_1, \cdots, x_n) \tag{629}$$

が成立する. □

定理 4.36 **(差積の変数の置換)** 置換 $\sigma \in S_n$ に対して

$$\sigma\,\Delta(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{sgn}\,(\sigma)\,\Delta(x_1, \cdots, x_n) \tag{630}$$

が成立する. □

定理 4.37 **（置換の符号の一意性）**　置換の符合は互換の積の表わし方によらず一意に定まる．

（証明）置換 σ が互換の積を用いて二通りで表せたとする．すなわち，

$$\sigma = \sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \, , \tag{631}$$

$$\sigma = \tau_l \tau_{l-1} \cdots \tau_2 \tau_1 \tag{632}$$

とする．このときそれぞれ

$$\sigma \, \Delta(x_1, \cdots, x_n) = (\sigma_m \cdots \sigma_1) \Delta(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^m \Delta \, , \tag{633}$$

$$\sigma \, \Delta(x_1, \cdots, x_n) = (\tau_l \cdots \tau_1) \Delta(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^l \Delta \tag{634}$$

となる．よって

$$(-1)^m \Delta(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^l \Delta(x_1, \cdots, x_n) \tag{635}$$

である．恒等的には $\Delta \neq 0$ であるから

$$(-1)^m = (-1)^l \tag{636}$$

が成立する．以上より符合 $\mathrm{sgn}\,(\sigma)$ は互換の積の表し方によらず $\mathrm{sgn}\,(\sigma) = (-1)^m = (-1)^l$ と一意に定まる．

$\square$

§ 4.4 行列式の定義

定義 4.38 （行列式） n 次正方行列 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ に対して

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \tag{637}$$

を A の**行列式（determinant）**という．A の行列式はまた

$$|A|, \quad |a_{ij}|, \quad \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{638}$$

と書き表す． □

例 4.39 （行列式の具体例） $n = 1$ のとき，

$$S_1 = \{\underset{偶}{\epsilon}\} \tag{639}$$

より，行列式は

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_1} \mathrm{sgn}\,(\sigma) a_{1,\sigma(1)} = \underset{\sigma=\varepsilon}{\mathrm{sgn}\,(\sigma)} \cdot a_{1,\sigma(1)} = a_{11}\,. \tag{640}$$

$n = 2$ のとき，

$$S_2 = \{\underset{偶}{\epsilon},\ \underset{奇}{(1\ \ 2)}\} \tag{641}$$

より，行列式は

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_2} \mathrm{sgn}\,(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \tag{642}$$

$$= \underset{\sigma=\varepsilon}{\mathrm{sgn}\,(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)}} a_{2,\sigma(2)} + \underset{\sigma=(1\ \ 2)}{\mathrm{sgn}\,(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)}} a_{2,\sigma(2)} \tag{643}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,. \tag{644}$$

$n = 3$ のとき，

$$S_3 = \{\underset{偶}{\varepsilon},\ \underset{奇}{(1\ \ 2)},\ \underset{奇}{(1\ \ 3)},\ \underset{奇}{(2\ \ 3)},\ \underset{偶}{(1\ \ 2\ \ 3)},\ \underset{偶}{(1\ \ 3\ \ 2)}\} \tag{645}$$

より，行列式は

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_2} \mathrm{sgn}\,(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \tag{646}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\,. \tag{647}$$

□

問 4.40 **(行列式の具体例)** 4 次の行列式を定義に従い書き下せ. □

注意 4.41 **(サルスの方法)** 3 次の行列式までは**サルスの方法**により符合が簡単に定まる．右斜め下向きの組合わせでは正をとり，左斜め下向きの組合わせでは負となる．4 次以上の行列式ではこのルールは適用できない.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}\,. \tag{648}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,. \tag{649}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,. \tag{650}$$

□

§ 4.5 行列式の行に関する性質

定理 4.42 **(行列式の行に関する性質)** 行列式は次の性質もつ.

(1) $(1,1)$ 成分を除いて 1 列目が全て 0 の場合は行列式のサイズが一つ下がる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{651}$$

(2) 第 i 行目の要素全てが共通因子 α をもつとき, α は行列式の外へ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha\, a_{i1} & \alpha\, a_{i2} & \cdots & \alpha\, a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{652}$$

(3) 第 i 行が二つのベクトルの和で表されるとき, 行列式の和に分解される.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{653}$$

(4) 第 i 行と第 j 行を入れ替えると行列式の符合が反転する.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{654}$$

(5) 同じ行があるときは行列式は 0 となる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{655}$$

(6) 第 j 行を α 倍して第 i 行に加えても行列式は等しい.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+\alpha\, a_{j1} & a_{i2}+\alpha\, a_{j2} & \cdots & a_{in}+\alpha\, a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{656}$$

□

問 4.43 **(行列式の行に関する性質)** これを示せ. □

§ 4.6 行列式の列に関する性質

定理 4.44 **(転置行列の行列式)**

$$\det(A^T) = \det(A) \tag{657}$$

□

問 4.45 **(転置行列の行列式)** これを示せ. □

定理 4.46 **(行列式の列に関する性質)** 行列式は次の性質もつ.

(1) $(1,1)$ 成分を除いて 1 行目が全て 0 の場合は行列式のサイズが一つ下がる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{658}$$

(2) 第 j 列行目の要素全てが共通因子 α をもつとき, α は行列式の外へ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha\, a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \alpha\, a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha\, a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{659}$$

(3) 第 i 列が二つのベクトルの和で表されるとき, 行列式の和に分解される.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} + c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} + c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} + c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{660}$$

(4) 第 i 列と第 j 列を入れ替えると行列式の符合が反転する.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{661}$$

(5) 同じ列があるときは行列式は 0 となる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{662}$$

(6) 第 j 列を α 倍して第 i 列に加えても行列式は等しい．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + \alpha\, a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + \alpha\, a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + \alpha\, a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{663}$$

□

問 4.47 これを示せ． □

§ 4.7 行列式の計算

例 4.48 **(行列式の計算の例)**

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(2\cdot 4 - 3\cdot 1) = 3(8-3) = 15\,. \tag{664}$$

□

例 4.49 **(行列式の計算の例)** 上三角行列の行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{665}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}\,. \tag{666}$$

□

例 4.50 **(行列式の計算の例)** 下三角行列の行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\,. \tag{667}$$

□

問 4.51 **(下三角行列の行列式)** これを示せ. □

例 4.52 **(行列式の計算の例)** 対角行列の行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\,. \tag{668}$$

□

問 4.53 **(対角行列の行列式)** これを示せ. □

例 4.54 **(行列式の計算の例)**　単位行列の行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1\,. \tag{669}$$

□

例 4.55 **(行列式の計算の例)**

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a+3 & b+6 & c+9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & b+2a & c \\ 7 & 16 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 9 \\ 7 & 16 & 4 \end{vmatrix} \tag{670}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} b+2a & c \\ 16 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} \tag{671}$$

$$= -(4(b+2a) - 16c) - (12 \cdot 4 - 9 \cdot 16) = -8a - 4b + 16c + 96\,. \tag{672}$$

□

例 4.56 **(行列式の計算の例)**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{673}$$

□

例 4.57 **(行列式の計算の例)**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot 1 = -6\,. \tag{674}$$

□

例 4.58 **(行列式の計算の例)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 0 & -14 \end{vmatrix} \tag{675}$$

$$= 11 \cdot 1 \begin{vmatrix} -14 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-14) = -154\,. \tag{676}$$

□

例 4.59 **(行列式の計算の例)**

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & -7\\ 2 & 3 & 4 & -4\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2 & -5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -3 & -5 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 8\\ 1 & 1 & 2 & -5\end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & -5\\ 0 & -3 & -5 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 8\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-3 & -5 & 8\\ 1 & 0 & 6\\ 1 & -1 & 8\end{vmatrix} \tag{677}$$

$$= -\begin{vmatrix}-3 & -5 & 26\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & -5 & 26\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}-5 & 26\\ -1 & 2\end{vmatrix} = (-5)\cdot 2 - 26\cdot(-1) = 16\,. \tag{678}$$

□

例 4.60 **(行列式の計算の例)**

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 3 & 4\\ 1 & 6 & 1 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 4\\ 1 & 6 & 2 & 4\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}0 & 4 & 0\\ 3 & 2 & 4\\ 6 & 2 & 4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 4\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & 4\end{vmatrix} \tag{679}$$

$$= -4\cdot 3\cdot 4\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -4\cdot 3\cdot 4(1\cdot 1 - 1\cdot 2) = 48\,. \tag{680}$$

□

§ 4.8　行列式の性質

定理 4.61　（行列式の性質）

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)\,. \tag{681}$$

□

例 4.62　（行列式の計算例）

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2\cdot 3 - 7\cdot 5) - (9\cdot 1 - 4\cdot(-2)) = -493\,. \tag{682}$$

□

定理 4.63　（行列の積の行列式）

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,. \tag{683}$$

□

注意 4.64　（行列の積の行列式）　$AB \neq BA$ のときでさえも

$$\det(AB) = \det(BA) \tag{684}$$

が成り立つことに注意する．これは

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = \det(B)\cdot\det(A) = \det(BA) \tag{685}$$

より示される．

□

問 4.65　（行列式の性質の使用例）

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \tag{686}$$

が成り立つことを

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix} \tag{687}$$

の両辺の行列式をとることで示せ．

□

§ 4.9 行列の正則性と行列式

定理 4.66 **(行列の正則性と行列式)** 行列 A が正則行列のとき $\det(A) \neq 0$ が成り立つ.
□

問 4.67 これを示せ.

(証明) A は逆行列をもつので,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \tag{688}$$

が成立する. 各辺の行列式をとると

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}), \tag{689}$$

$$\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(A)\det(A^{-1}), \tag{690}$$

$$\det(E) = 1 \tag{691}$$

であるから

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1 \tag{692}$$

を得る. よって

$$\det(A) \neq 0, \quad \det(A^{-1}) \neq 0 \tag{693}$$

が成り立つ. □

定理 4.68 **(逆行列の行列式)**

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \tag{694}$$

□

問 4.69 **(逆行列の行列式)** これを示せ.

(証明) 前の定理の証明の $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ より示される. □

§ 4.10 ちょっとまとめ

定理 4.70 **(行列式の性質)**

(1) 一つの行を α 倍すると行列式は α 倍となる．

(2) 一つの行が二つの行ベクトルの和で表せる行列式は，他の行はそのままで，その行に各々の行ベクトルをとった行列式の和に等しい．

(3) 二つの行を入れ替えると行列式は -1 倍となる．

(4) 二つの行が等しい行列式は 0 である．

(5) 一つの行を α 倍して別の行に加えても行列式は変らない．

□

定理 4.71 **(行列式の性質)**

(1) 一つの列を α 倍すると行列式は α 倍となる．

(2) 一つの列が二つの列ベクトルの和で表せる行列式は，他の列はそのままで，その列に各々の列ベクトルをとった行列式の和に等しい．

(3) 二つの列を入れ替えると行列式は -1 倍となる．

(4) 二つの列が等しい行列式は 0 である．

(5) 一つの列を α 倍して別の列に加えても行列式は変らない．

（証明）$\det(A^T) = \det(A)$ より，$\det(A^T)$ に対する行の基本変形は，$\det(A)$ に対する列の基本変形と等しい．

□

§ 4.11 余因子

定義 4.72 **（小部分行列と余因子）** n 次正方行列 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ の第 i 行と第 j 列を取り除いた $n-1$ 次の小行列を

$$A_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right] \tag{695}$$

と書く．このとき行列 A_{ij} の行列式 $\det(A_{ij})$ に符合をつけた数

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \tag{696}$$

を A における A_{ij} の**余因子（cofactor）**と呼ぶ． □

例 4.73 **（余因子の具体例）** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \tag{697}$$

を考える．このとき小行列

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \tag{698}$$

より，余因子は

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(20-0) = -20\,, \tag{699}$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = +(15+4) = 19 \tag{700}$$

である． □

§ 4.12 余因子展開

定理 4.74 **（余因子展開）** 行列式 $\det(A)$ に対して

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\Delta_{ik}=a_{i1}\Delta_{i1}+a_{i2}\Delta_{i2}+a_{i3}\Delta_{i3}+\cdots+a_{in}\Delta_{in} \tag{701}$$

$$|A|=(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|+(-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}|+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| \tag{702}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|A_{ik}| \tag{703}$$

が成り立つ．これを**第 i 行に関する余因子展開**という．また，

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\Delta_{kj}=a_{1j}\Delta_{1j}+a_{2j}\Delta_{2j}+a_{3j}\Delta_{3j}+\cdots+a_{nj}\Delta_{nj} \tag{704}$$

$$|A|=(-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}|+(-1)^{j+2}a_{2j}|A_{2j}|+\cdots+(-1)^{j+n}a_{nj}|A_{nj}| \tag{705}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}|A_{kj}| \tag{706}$$

が成り立つ．これを**第 j 列に関する余因子展開**という． □

問 4.75 **（余因子展開）** これを示せ．

（証明）第 i 行に関する余因子展開を示す．まず行列式 $|A|$ の第 i 行目を第一行目に移動すると

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{707}$$

となる．次に第一行目の行ベクトルを n 個のベクトルとしてみなし，行列式を n 個に分解す

ると

$$|A| = \tag{708}$$

$$(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & a_{i,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{709}$$

$$+ (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{i,3} & \cdots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{710}$$

となる．各項の第 j 列を第一列に移動すると

$$|A| = \tag{711}$$

$$(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + (-1)^{i-1}(-1)\begin{vmatrix} a_{i,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,2} & a_{1,1} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,1} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,1} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{712}$$

$$+ (-1)^{i-1}(-1)^2\begin{vmatrix} a_{i,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,3} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,3} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,3} & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i,n} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{1,n} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,n} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots \\ a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n,n} & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots \end{vmatrix} \tag{713}$$

となる．各項を第 $(1,1)$ 成分で展開すると

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i,1}|A_{i,1}| + (-1)^{i+2}a_{i,2}|A_{i,2}| + (-1)^{i+3}a_{i,3}|A_{i,3}| + \tag{714}$$

$$\cdots + (-1)^{i+n}a_{i,n}|A_{i,n}| \tag{715}$$

$$= a_{i,1}\Delta_{i,1} + a_{i,2}\Delta_{i,2} + a_{i,3}\Delta_{i,3} + \cdots + a_{i,n}\Delta_{i,n} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\Delta_{i,k} \tag{716}$$

を得る．同様の操作で列に関する余因子展開は示される． □

例 4.76 **(余因子展開の計算例)**　第 2 列目で余因子展開し，

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 3 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \tag{717}$$

$$= -3(7 \cdot 3 - 5 \cdot 4) + 2(2 \cdot 3 - 1 \cdot 4) - 0 = 1 \tag{718}$$

を得る．

□

例 4.77 **(余因子展開の計算例)**　第 2 行目で余因子展開し，

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 0 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \tag{719}$$

$$= -0 + 0 - 2(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 6 \tag{720}$$

を得る．

□

例 4.78 **(余因子展開の計算例)**　第一行目を余因子展開し，

$$\overbrace{\begin{vmatrix} a & & & & b \\ b & a & & & \\ & b & \ddots & & \\ & & \ddots & a & \\ & & & b & a \end{vmatrix}}^{n} = a \overbrace{\begin{vmatrix} a & & & \\ b & \ddots & & \\ & \ddots & a & \\ & & b & a \end{vmatrix}}^{n-1} + (-1)^{n+1} b \overbrace{\begin{vmatrix} b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b & a \\ & & & b \end{vmatrix}}^{n-1} \tag{721}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n \tag{722}$$

を得る．

□

§ 4.13 余因子行列

定義 4.79 **(余因子行列)** n 次正方行列 A に対して

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} & \cdots & \Delta_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \tag{723}$$

と定義される行列を A の**余因子行列**と呼ぶ. □

注意 4.80 **(余因子行列)** 余因子行列 $\widetilde{A} = [\Delta_{ji}]$ の成分の添字は転置行列のならび方であることに注意する. □

定理 4.81 **(余因子行列の性質)** 正方行列 A とその余因子行列 $\tilde{A}$ に対して

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E \tag{724}$$

が成立する.

（証明）$A = [a_{ij}]$, $\widetilde{A} = [\Delta_{ji}]$, $A\widetilde{A} = [c_{ij}]$ とおく．積の定義より

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk} = a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} \tag{725}$$

である．これは $|A|$ の第 j 行の余因子展開だから

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{726}$$

となる．第 j 行目に第 i 行目の成分がならぶ．$i \neq j$ であるとき第 j 行目と第 i 行目は同じ行となるから，行列式は 0 となる．$i \neq j$ のときは，行列式は $\det(A)$ と等しい．よって，

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk} = \det(A)\delta_{i,j} \tag{727}$$

を得る．以上より

$$A\widetilde{A} = [c_{ij}] = [\det(A)\delta_{i,j}] = \det(A)[\delta_{i,j}] = \det(A)E \tag{728}$$

が示される．$\widetilde{A}A = \det(A)E$ も同様に示される． □

§ 4.14 余因子行列と逆行列

定理 4.82 **(行列式と行列の正則性)** 正方行列 A に対して，$\det(A) \neq 0$ のとき A は正則である．

（証明）定理

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A)E \tag{729}$$

であるから，$\det(A) \neq 0$ とすると各辺を $\det(A)$ で割って

$$A\frac{\widetilde{A}}{\det(A)} = \frac{\widetilde{A}}{\det(A)}A = E \tag{730}$$

が成り立つ．よって $(\det(A))^{-1}\widetilde{A}$ は A の逆行列であり，A は正則である． □

定理 4.83 **(余因子行列と逆行列)** 正方行列 A に対して，$\det(A) \neq 0$ のとき A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det(A)} \tag{731}$$

で与えられる． □

定理 4.84 **(逆行列が存在するための十分条件)** 正方行列 A, B に対して $AB = E$（または $BA = E$）が成立するとき，B は A の逆行列となる．

（証明）$AB = E$ より，両辺の行列式をとると

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(E) = 1 \tag{732}$$

が成り立つ．これより $\det(A) \neq 0$ を得る．よって，$\det(A) \neq 0$ のとき A は正則であるから，逆行列 A^{-1} をもつ．さらに A^{-1} が存在することを用いると

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1} \tag{733}$$

が成り立つ．$B = A^{-1}$ が示された． □

例 4.85 **（余因子行列による逆行列の計算の具体例）** $n=2$ のとき逆行列は

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}+|A_{11}| & -|A_{21}|\\ -|A_{12}| & +|A_{22}|\end{bmatrix} \tag{734}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}+|a_{22}| & -|a_{12}|\\ -|a_{21}| & +|a_{11}|\end{bmatrix}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix} \tag{735}$$

である．$n=3$ のとき逆行列は

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32}\\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}+|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}|\\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}|\\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}|\end{bmatrix} \tag{736}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix} \tag{737}$$

である．

□

例 4.86 **（余因子行列による逆行列の計算例）** 行列

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix} \tag{738}$$

の逆行列を求める．行列式は

$$\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1\cdot 2-3(-2)=8 \tag{739}$$

であるから，逆行列は

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{3}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{bmatrix} \tag{740}$$

で与えられる．

□

例 4.87 **（余因子行列による逆行列の計算例）**　行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{741}$$

の逆行列を求める．小行列の行列式は

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6\,, \qquad |A_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7\,, \qquad |A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5\,, \tag{742}$$

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9\,, \qquad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7\,, \qquad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\,, \tag{743}$$

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3\,, \qquad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7\,, \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \tag{744}$$

であり，行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| = -21 \tag{745}$$

であるので，逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| \end{bmatrix} \tag{746}$$

$$= -\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 6 & -7 & 5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix} \tag{747}$$

と与えられる．　□

§ 4.15 クラメールの公式

定理 4.88 **（クラメールの方法）** 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に関して，係数行列

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \tag{748}$$

が n 次正方行列でかつ正則なとき，方程式の解 $\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$ は

$$x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}}{\det(A)}, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{749}$$

で与えられる．これを**クラメールの方法（Cramer's rule）**という．

（証明）A は正則であるから，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に左から A^{-1} を掛けると

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}\boldsymbol{b} \tag{750}$$

が成り立つ．成分で表すと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1j} & \Delta_{2j} & \cdots & \Delta_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{751}$$

より

$$x_j = \frac{1}{|A|}\left(b_1\Delta_{1j}+b_2\Delta_{2j}+\cdots+b_n\Delta_{nj}\right) = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} b_k\Delta_{kj} \tag{752}$$

を得る．これは第 j 列の余因子展開だから

$$x_j = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_n \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{1,j+1} & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{1,j+1} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \tag{753}$$

が示された．

□

注意 4.89 **（クラメールの方法）** 解をもつためには分母 $\det(A)$ が 0 となってはいけない．$\det(A)\neq 0$ である必要がある．すなわち A は正則のときクラメールの方法は使用できる．□

例 4.90 **(クラメールの公式の使用例)** 方程式

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{754}$$

を考える．行列式は

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \tag{755}$$

であり，解は

$$x_1 = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{7}, \quad x_2 = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \tag{756}$$

と求まる． □

例 4.91 **(クラメールの公式の使用例)** 方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{757}$$

の解を求める．

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \tag{758}$$

であり，解は

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{9}{5}, \tag{759}$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{6}{5}, \tag{760}$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5} \tag{761}$$

である． □

§ 4.16　行列の簡約化と行列式

注意 4.92　**（基本変形行列の行列式）**　行列の行の基本変形を表す行列 $P_k^{(1)}(\alpha), P_{k,l}^{(2)}, P_{k,l}^{(3)}(\alpha)$ の行列式は

$$\det\left(P_k^{(1)}(\alpha)\right)=\alpha\,,\quad \det\left(P_{k,l}^{(2)}\right)=-1\,,\quad \det\left(P_{k,l}^{(3)}(\alpha)\right)=1 \tag{762}$$

である．

□

問 4.93　**（基本変形行列の行列式）**　これを示せ．

□

定理 4.94　**（基本変形の正則性）**　A が正則であるとき，行の基本変形をして得た行列 B もまた正則である．

（証明）行の基本変形は $B=P^{(\nu)}A$ $(\nu=1,2,3)$ と表される．両辺の行列式をとると

$$\det(B)=\det\left(P^{(\nu)}\right)\det(A) \tag{763}$$

となる．A が正則なとき $\det(A)\neq 0$ である．$\det(P^{(\nu)})\neq 0$ であるから，$\det(B)\neq 0$ を得る．よって B も正則である．

□

定理 4.95　**（行列の簡約化の正則性）**　行列 A が正則なとき簡約化して得た階段行列 B も正則である．

（証明）簡約化は行の基本変形を繰り返し行う変換である．正則な行列は正則な行列に写される．これを繰り返して得られた行列 B もまた正則である．

□

§ 4.17 ちょっとまとめ

定理 4.96 **(行列式の性質)** n 次正方行列 A に対して次の条件は等価である.

(1) $\det(A) \neq 0$

(2) A は正則である.

(3) $\operatorname{rank}(A) = n$

(4) A は E に簡約化される.

(5) A は逆行列 $A^{-1} = \dfrac{\widetilde{A}}{|A|}$ をもつ.

(6) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は一意な解 $x_j = \dfrac{|\cdots \boldsymbol{a}_{j-1}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_{j+1} \cdots|}{|A|}$ をもつ.

□

定理 4.97 **(行列式の性質)** n 次正方行列 A に対して次の条件は等価である.

(1) $\det(A) = 0$

(2) A は非正則である.

(3) $\operatorname{rank}(A) < n$

(4) A は E に簡約化されない.

(5) A は逆行列をもたない.

(6) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は一意な解をもたない.
(任意定数を含む解をもつ. もしくは, 解をもたない.)

□

§ 4.18 行列式と面積

行列式の図形上の意味を考える．まず $n=2$ のときを考える．

$$S = \pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \tag{764}$$

は頂点が O, $A(\boldsymbol{a}_1)$, $B(\boldsymbol{a}_2)$, $C(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)$ である平行四辺形の面積となる．ただし

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \tag{765}$$

である．符号は $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_2$ が反時計回りのときが正であり，時計回りのとき負である．

$$V = \pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \pm [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \tag{766}$$

は頂点が O, $A(\boldsymbol{a}_1)$, $B(\boldsymbol{a}_2)$, $C(\boldsymbol{a}_3)$, $D(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)$, $E(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3)$, $F(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$, $G(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$ である平行 6 面体の体積となる．ただし

$$\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \tag{767}$$

である．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ はスカラー三重積であることに注意する．符号は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が右手系のとき正であり，左手系のとき負となる．

§ 4.19 いろいろな行列式

定理 4.98 **(ファンデアモントの行列式)** 行列式

$$V = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_n)^2 \\ (x_1)^3 & (x_2)^3 & \cdots & (x_n)^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_1)^{n-1} & (x_2)^{n-1} & \cdots & (x_n)^{n-1} \end{vmatrix}}^{n} \tag{768}$$

を**ファンデアモントの行列式**という．V は

$$V = \prod_{i \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \tag{769}$$

と与えられる． □

問 4.99 **(ファンデアモントの行列式)** これを示せ．

（証明）行列式を

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-2} & {x_2}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}}^{n} \tag{770}$$

とおく．第 $n-1$ 行に $-x_1$ をかけて第 n 行に加える．第 $n-2$ 行に $-x_1$ をかけて第 $n-1$ 行に加える．第 $n-3$ 行に $-x_1$ をかけて第 $n-2$ 行に加える．同様に繰り返して，第 1 行に $-x_1$ をかけて第 2 行に加える．すると

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ 0 & {x_2}^2(x_2 - x_1) & {x_3}^2(x_3 - x_1) & \cdots & {x_n}^2(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-3}(x_2 - x_1) & {x_3}^{n-3}(x_3 - x_1) & \cdots & {x_n}^{n-3}(x_n - x_1) \\ 0 & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) & {x_3}^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}}^{n} \tag{771}$$

を得る．第 $(1,1)$ 成分で展開すると

$$
V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overbrace{\begin{vmatrix}
x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_n \\
x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\
{x_2}^2(x_2-x_1) & {x_3}^2(x_3-x_1) & \cdots & {x_n}^2(x_n-x_1) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
{x_2}^{n-3}(x_2-x_1) & {x_3}^{n-3}(x_3-x_1) & \cdots & {x_n}^{n-3}(x_n-x_1) \\
{x_2}^{n-2}(x_2-x_1) & {x_3}^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n-x_1)
\end{vmatrix}}^{n-1} \tag{772}
$$

となる．第 1 列は x_2-x_1 を共通因子としてもつ．第 2 列は x_3-x_1 を共通因子としてもつ．同様にして第 j 列 $(j=1,2,\cdots,n-1)$ は x_j-x_1 を共通因子としてもつ．共通因子を行列式の外にくくり出すと

$$
V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\overbrace{\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
{x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
{x_2}^{n-3} & {x_3}^{n-3} & \cdots & {x_n}^{n-3} \\
{x_2}^{n-2} & {x_3}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2}
\end{vmatrix}}^{n-1} \tag{773}
$$

である．このとき

$$
V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\prod_{1<j\le n}(x_j-x_1)\right)V(x_2,x_3,\cdots,x_n) \tag{774}
$$

が成り立つ．行列式のサイズがひとつ小さくなった．これを繰り返すと

$$
\begin{align}
& V(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{775} \\
&=\left(\prod_{1<j\le n}(x_j-x_1)\right)\left(\prod_{2<j\le n}(x_j-x_2)\right)V(x_3,x_4,\cdots,x_n) \tag{776} \\
&=\left(\prod_{1<j\le n}(x_j-x_1)\right)\left(\prod_{2<j\le n}(x_j-x_2)\right)\cdots\left(\prod_{n-2<j\le n}(x_j-x_{n-2})\right)V(x_{n-1},x_n) \tag{777} \\
&=\left(\prod_{1<j\le n}(x_j-x_1)\right)\left(\prod_{2<j\le n}(x_j-x_2)\right)\cdots\left(\prod_{n-2<j\le n}(x_j-x_{n-2})\right)\left(\prod_{n-1<j\le n}(x_j-x_{n-1})\right) \tag{778} \\
&=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i) \tag{779}
\end{align}
$$

を得る． □

例 4.100 **(ファンデアモントの具体例)**

$$V(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1\,. \tag{780}$$

$$V(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\,. \tag{781}$$

$$V(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & {x_4}^2\\ {x_1}^3 & {x_2}^3 & {x_3}^3 & {x_4}^3\end{vmatrix} \tag{782}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\,. \tag{783}$$

□

定義 4.101 **(コンパニオン行列式)** 行列式

$$F = \underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & -1 & & & & \\ a_1 & x & -1 & & & \\ a_2 & & x & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & & & & \ddots & -1 \\ a_n & & & & & x \end{vmatrix}}_{n+1} \tag{784}$$

を**コンパニオン行列式(companion determinant)**という. □

定理 4.102 コンパニオン行列式は

$$F = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \tag{785}$$

が成り立つ.

(証明)行列式を

$$F(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n; x) = \underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & -1 & & & & \\ a_1 & x & -1 & & & \\ a_2 & & x & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & & & & \ddots & -1 \\ a_n & & & & & x \end{vmatrix}}_{n+1} \tag{786}$$

とおく. 第 1 行目を余因子展開すると

$$F(a_0, a_1, \cdots, a_n; x) = a_0 \underbrace{\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}}_{n} -(-1) \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & & & \\ a_2 & x & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & & & \ddots & -1 \\ a_n & & & & x \end{vmatrix}}_{n} \tag{787}$$

となる. 前の項の行列式は上三角行列なので対角線分の積で表される. 後の項の行列式はサイズと係数が異なるコンパニオン行列式となる. よって

$$F(\overbrace{a_0, a_1, \cdots, a_n}^{n+1}; x) = a_0x^n + F(\overbrace{a_1, \cdots, a_n}^{n}; x) \tag{788}$$

と表される．これを繰り返すと

$$F(\overbrace{a_0, a_1, \cdots, a_n}^{n+1}; x) = a_0 x^n + F(\overbrace{a_1, \cdots, a_n}^{n}; x) \tag{789}$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + F(\overbrace{a_2, \cdots, a_n}^{n-1}; x) \tag{790}$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + F(\overbrace{a_3, \cdots, a_n}^{n-2}; x) \tag{791}$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2 + F(\overbrace{a_{n-1}, a_n}^{2}; x) \tag{792}$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n \tag{793}$$

を得る．

□

例 4.103 **（コンパニオン行列式の具体例）**

$$F(a_0, a_1; x) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0 x - (-1) a_1 = a_0 x + a_1 \,. \tag{794}$$

$$F(a_0, a_1, a_2; x) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & \\ a_1 & x & -1 \\ a_2 & & x \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 \\ & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & x \end{vmatrix} \tag{795}$$

$$= a_0 x^2 + a_1 x - (-1) a_2 = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \,. \tag{796}$$

$$F(a_0, a_1, a_2, a_3; x) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & & \\ a_1 & x & -1 & \\ a_2 & & x & -1 \\ a_3 & & & x \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & \\ & x & -1 \\ & & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & \\ a_2 & x & -1 \\ a_3 & & x \end{vmatrix} \tag{797}$$

$$= a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \,. \tag{798}$$

□

問 4.104 **(行列式の計算)**

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & d & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0 \tag{799}$$

となることを示せ.

(証明)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & d & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & d & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & d & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{800}$$

$\square$