No.

Date

偏微分

§ 2変数関数

$\boxed{\text{定義}}$ 2変数関数

(2変数関数)

$$z = f(x, y)$$

x, y … 独立変数

z … 従属変数

実数のみを取り扱う

$\boxed{\text{例}}$ (2変数関数の具体例)

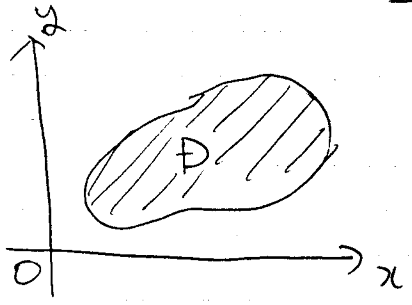
$$f(x,y) = x^2 + 5xy + 2y^2$$

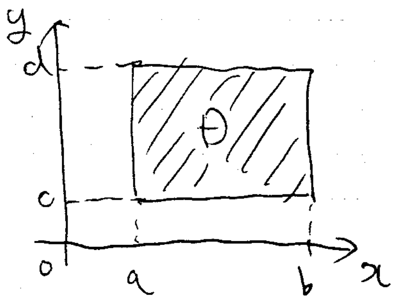
$$\begin{aligned} f(2,-3) &= (2)^2 + 5(2)(-3) + 2(-3)^2 \\ &= 4 + (-30) + 18 \\ &= 22 - 30 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{定義}}$ 定義域

(定義域)

$z = f(x,y)$ の $\underbrace{\text{定義域}}_{}$(domain) D は xy 平面上の領域となる



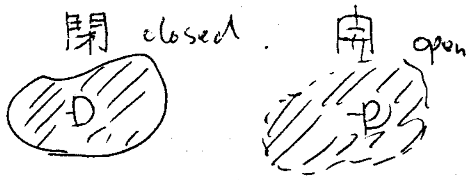


境界を含む場合 $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$

境界を含まない場合 $D = \{(x,y) \mid a < x < b,\ c < y < d\}$

$\boxed{\text{定義}}$ 境界を含む領域 … 閉領域 (closed domain)

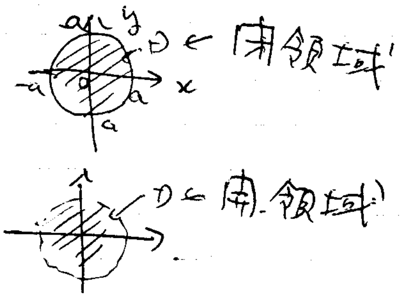
(開領域, 境界を含まない領域 … 開領域 (open domain)
開領域)



$\boxed{\text{例}}$ (定義域の具体例)

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$

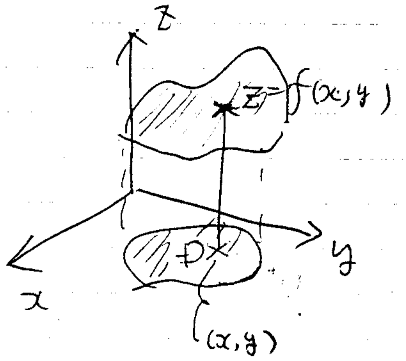
$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<a\}$



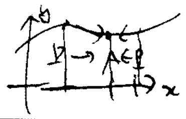
2変数関数のグラフ

$z=f(x,y)$

3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の点 (z, x, y) で表す.



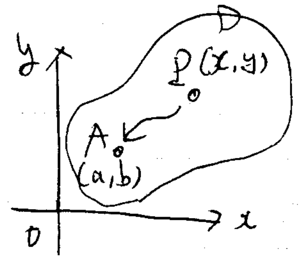
1変数の場合は近づけ方が

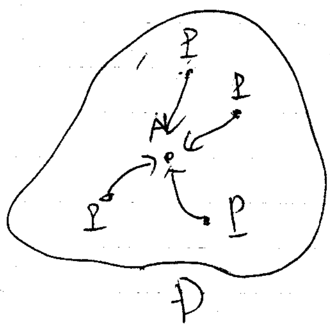


2通り。

2変数の場合は全方向より近づく

§ 極限





定義 （極限）

定義域内の点P(x,y)を点A(a,b)に近づける。
ただし (x,y) ≠ (a,b) とする。

このとき、近づき方に依らず関数 $f(x,y)$ の値が、同じ1つの値 c に近づくならば、$f(x,y)$ は極限 c が存在するという。

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = c$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$$

$$\iff \lim_{P\to A} f(x,y) = c$$

$$\iff f(x,y) \to c \quad (x\to a,\ y\to b)$$

$\iff$ $f(x,y)$ は c に収束する。

注意 （極限に関する注意）

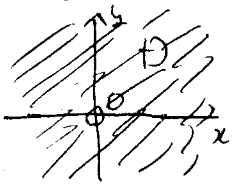
– $A \in D$ とは限らない。

– 近づけ方によって $f(x,y)$ の値が異なるときは、極限が存在しない。

例 （極限が存在しない具体例）

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

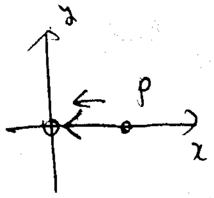
定義域 $D = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ ← 原点を除く全平面。



原点 O(0,0) に近づけるときの $f(x,y)$ の極限は？

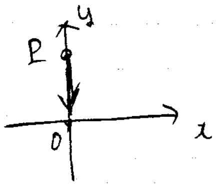
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

(a) x軸に沿って P(x,y) を原点 O へ近づける.



$$\lim_{\substack{y=0\\x\to0}} f(x,y) = \lim_{x\to0} f(x,0) = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+0} = \lim_{x\to0} 1 = 1$$

(b) y軸に沿って P→O.



$$\lim_{\substack{x=0\\y\to0}} f(x,y) = \lim_{y\to0} f(0,y) = \lim_{y\to0}\frac{0}{0+y} = \lim_{y\to0} 0 = 0$$

近づけ方によって値が異なるので極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

§ 連続性

定義 (連続性)　関数 $f(x,y)$ は次の条件を満たすとき点 $A(a,b)$ において連続であるという。

(i) $f(a,b)$ が定義されている。

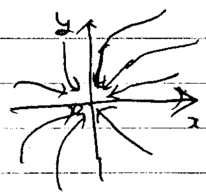
(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在する。

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ が成立する。

例 (連続性の具体例)

(1) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

? $f(x,y)$ は原点において連続?



(a) x軸 ($y=0$) に沿って近づく $\iff \begin{cases} y=0 \\ x\to 0 \end{cases}$

(b) y軸 ($x=0$) に沿って近づく $\iff \begin{cases} x=0 \\ y\to 0 \end{cases}$

(c) 直線 ($y=mx$) に沿って近づく $\iff \begin{cases} y=mx \\ x\to 0 \end{cases}$

(a) $$\lim_{\substack{y=0\\x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

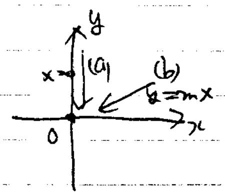
(b) $$\lim_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0+y^3}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} y = 0.$$

(c) $$\lim_{\substack{y=mx\\x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+(mx)^3}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+m^3}{1+m^2}\right) x = 0.$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$ $\Longrightarrow$ $f(x,y)$ は原点Oにおいて連続。

注　(c)のとき $m=0$ とすれば (a) の場合も含まれる。
場合分けは　— y軸
　　　　　　— 直線 $y=mx$　で良い。

(2). $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \end{cases}$



(a) $x=0,\ y \to 0$ として近づける.

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0\times y}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

(b) $y=mx,\quad x\to 0$

$$\lim_{\substack{y=mx\\x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{x\times(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}\cdot\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$$

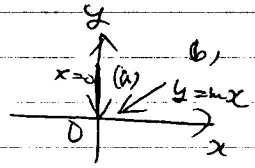
$$= \lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

$\left.\begin{array}{l} m=0 \text{ のとき } \lim f = 0 \\ m\neq 0 \text{ のとき } \lim f \neq 0 \end{array}\right\}$ となる.

$\Rightarrow$ 極根 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない

$\Rightarrow$ $f(x,y)$ は原点において不連続.

(3) $f(x,y) = \begin{cases} xy & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 2 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$



(a) $x=0,\ y\to 0$.

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

(b) $y=mx,\ x\to 0$

$$\lim_{\substack{y=mx\\x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} mx^2 = 0$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.\quad \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq f(0,0)=2$

$\Rightarrow$ $f(x,y)$ は原点で連続ではない.

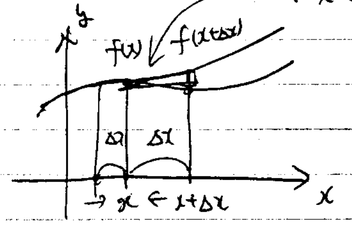
しかし.

$f(0,0)=0$ と定義しなおすと
$f(x,y)$ は原点で連続となる.

この不連続点は除きうる不連続点である.
(removable discontinuity)

§偏微分

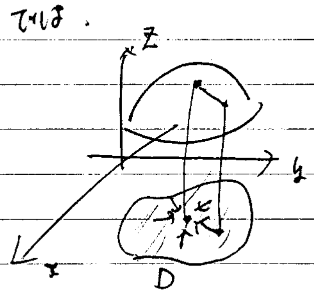
1変数では



傾き $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.　$\Delta x \to 0$ における傾きの極限が 導関数 $\frac{df(x)}{dx}$.

近づけ方は x軸方向のみ

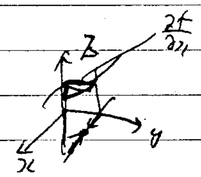
2変数では.



近づけ方は xy平面内の全方向から.

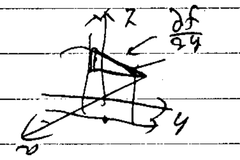
yの値を固定して x軸方向のみで近づける

xの値を固定して y軸方向のみで近づける.



$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$



極限が存在すれば偏微分可能とよぶ
(partial differentiable)

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ を $f(x,y)$ の x に関する偏導関数 (partial derivative) とよぶ.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ を $f(x,y)$ の y に 〜.

書き方

$z = f(x,y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ f_x,\ f_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ z_x,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\ f_y,\ f_y(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ z_y.$$

$f(x,y)$ の偏導関数を求めることを偏微分するという.

例

$$f(x,y) = 2x^3 + 5xy + 2y^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3 + 5xy + 2y^2\right)$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + 5y\frac{\partial}{\partial x}(x) + 2y^2\frac{\partial}{\partial x}(1)$$

$$= 2\times(3x^2) + 5y\times 1 + 2y^2\times 0$$

$$= 6x^2 + 5y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3 + 5xy + 2y^2\right)$$

$$= 2x^3\frac{\partial}{\partial y}(1) + 5x\frac{\partial}{\partial y}(y) + 2\frac{\partial}{\partial y}(y^2)$$

$$= 2x^3\times 0 + 5x\times 1 + 2\times(2y)$$

$$= 5x + 4y$$

定義 (多変数関数の導関数)

$$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

…… n 変数関数

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x_1 \cdots, x_n)}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \cdots, x_n)}{h}$$

ベクトルで表す.

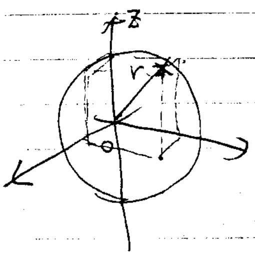
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

$$= f(\boldsymbol{x})$$

$$, \ f : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{\boldsymbol{x}}} \to \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{z}}$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x})}{h}.$$

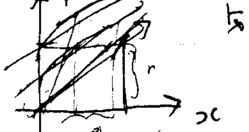
例 $r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$



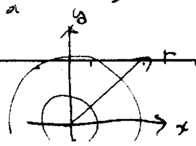
$$r_x = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}.$$

$$r_y = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\sqrt{}} = \frac{y}{r}$$

$$r_z = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{}} = \frac{z}{\sqrt{}} = \frac{z}{r}$$



$$r_x = \frac{x}{r}$$



No.

Date

§ 高階偏導関数

$\boxed{\text{定義}}$ (高階偏導関数)

関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を
さらに偏微分したものを <u>2階偏導関数</u> とよぶ.

f_x を x で偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y)$

f_x を y 〜 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x,y)$ ← x,y の順に偏微分

f_y を x 〜 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x,y)$ ← y,x の順に偏微分

f_y を y 〜 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y)$

更に高階の場合や
多変数の場合も
同様

$\boxed{\text{例}}$ $f(x,y) = 2x^3 + 5xy + 2y^2$

$f_x = 6x + 5y$

$f_y = 5x + 4y$

$f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x} f_x = \dfrac{\partial}{\partial x}(6x+5y) = 6$

$f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y} f_x = \dfrac{\partial}{\partial y}(6x+5y) = 5$

$f_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x} f_y = \dfrac{\partial}{\partial x}(5x+4y) = 5$

$f_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y} f_y = \dfrac{\partial}{\partial y}(5x+4y) = 4$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx} = 0$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy} = 0$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx} = 0$

$= f_{xyy} = 0$

$= f_{yxx} = 0$

$= f_{yxy} = 0$

$\boxed{\text{注意}}$

一般的には偏微分は交換可能ではない,

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$$

$$f_{xy} \neq f_{yx}$$

$\boxed{\text{定理}}$

f_{xy} と f_{yx} が存在して連続

$$\Longrightarrow f_{xy} = f_{yx}$$

(注) 逆は成り立たない.

"普通"の関数はこの条件をみたす

$\boxed{\text{注意}}$ 偏微分が可換となる十分条件は他にも色々ある.

No.

Date

§ ランダウの記号

定義 (ランダウの記号)

関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \overset{\text{def}}{\iff} f(x)=o(g(x)) \quad (x\to a)$$

— $x\to a$ において $f(x)$ は $g(x)$ に比べて無視できるという.
— $o(\cdot)$ はランダウ (Landau) の記号と呼ばれる.

定義 (ランダウの記号)

関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b, \quad \infty > \exists b \in \mathbb{R}.$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} f(x)=O(g(x)) \quad (x\to a)$$

— $x\to a$ において $f(x)$ は $g(x)$ で押さえられるという.
— $O(\cdot)$ はランダウの記号と呼ばれる.

例 (ランダウの記号の使用例)

$$\sin x = O(x) \quad (x\to 0)$$
$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5) \quad (x\to 0)$$
$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4) \quad (x\to 0)$$

∵ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad <\infty$

∵ $\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)=R(x)$
$=\frac{\sin\xi}{5!}x^5$
$0\le\xi\le x$

$\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{x^5}=\frac{\sin\xi}{5!}<\infty.$

$\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{x^4}=0.$

No.

Date

$\sqrt{x+x^2} = O(x) \quad (x\to\infty)$ $\quad \because \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+1} = 1 < \infty$

$\sqrt{x+x^2} = o(x^2) \quad (x\to\infty)$ $\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+x^2}}{x^2} = 0$.

$\boxed{定義}$.（無限小・無限大の比較）

$f(x)\to 0,\ g(x)\to 0,\ f(x) = o(g(x)) \quad (x\to a)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ は $g(x)$ より高次の無限小，
$g(x)$ は $f(x)$ より低次の無限小．

$f(x)\to\pm\infty,\ g(x)\to\pm\infty,\ f(x) = o(g(x)) \quad (x\to a)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ は $g(x)$ より低次の無限大，
$g(x)$ は $f(x)$ より高次の無限大．

$f(x)\to 0,\ g(x)\to 0,\ f(x) = O(g(x)) \quad (x\to a)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ と $g(x)$ とは同次の無限小．

$f(x)\to\pm\infty,\ g(x)\to\pm\infty,\ f(x) = O(g(x)) \quad (x\to a)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ と $g(x)$ とは同次の無限大．

$\boxed{例}$.

$x\to 0$ において $\sin x$ と x とは同次の無限小．

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R(x)$ とする．

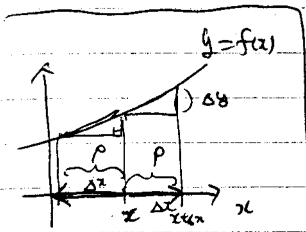
$x\to 0$ において．$R(x)$ は x^5 と同次の無限小．
〃 $R(x)$ は x^4 より高次の無限小．
〃 $R(x)$ は x^4 に比べて無視できる．

$x\to\infty$ において，$\sqrt{x+x^2}$ と x とは同次の無限大．
〃 $\sqrt{x+x^2}$ は x^2 より低次の無限大．
〃 $\sqrt{x+x^2}$ は x^2 に比べて無視できる．

§ 全微分

1変数関数 $y=f(x)$ にもどって、微分可能性を再定義.

$\boxed{\text{定義}}$ (1変数関数の微分可能性).



(注) $\rho\to 0$ のとき
$|\Delta x|\to 0$ より
$\begin{cases}\Delta x\to +0 & \text{右極限}\\ \Delta x\to -0 & \text{左極限}\end{cases}$
2つの極限を考える.

一変数関数 : $y=f(x)$
点 x から点 $x+\Delta x$ への増分 : $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$
点 x と点 $x+\Delta x$ との距離 : $\rho=|\Delta x|$

関数 $y=f(x)$ に対して

$$\Delta y = \alpha\cdot\Delta x + o(\rho)\quad(\rho\to 0)$$

をみたす $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在するとき,
$f(x)$ は <u>微分可能である</u> という.

このとき,

$$dy = \alpha\, dx$$

と表記し, dy を関数 $y=f(x)$ の <u>微分</u> とよぶ.

$\boxed{\text{定理}}$ (微分可能性と導関数の存在性)

$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ が有限確定.

$$\Leftrightarrow\quad dy = f'(x)\,dx\quad\Leftrightarrow\quad \Delta y = f'(x)\,\Delta x + o(\rho)\quad(\rho\to 0)$$

$$\left(\alpha = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

(証明) $\Delta y = \alpha\,\Delta x + \varepsilon(\rho)$ とおく.

$\to\ \varepsilon(\rho) = \Delta y - \alpha\,\Delta x$.

$\displaystyle\to\ \frac{\varepsilon(\rho)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \alpha = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \alpha.$

$\rho=|\Delta x|\to 0$ のとき $\Delta x\to 0$ $(\Delta x\to\pm 0)$ である.

$$\pm\lim_{\rho\to 0}\frac{\varepsilon(\rho)}{\rho} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\alpha\right)$$

よって

$$\varepsilon(\rho) = o(\rho)\quad(\rho\to 0)\quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ \text{が有限確定}$$

$$\left(\lim_{\rho\to 0}\frac{\varepsilon(\rho)}{\rho} = 0\right)$$

No.

Date

$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=x(t) \end{array}\right\}$ とする. 合成関数 $y=y(t)=f(x(t))$ の微分 $\dfrac{dy(t)}{dt}$ を考える.

関数 $f=f(x)$, $x=x(t)$ は微分可能とする.
すなわち.

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ が存在する} \iff df=\frac{df(x)}{dx}dx.$$

$$\iff \left(\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x) \text{ とおく.}\right)$$

$$\Delta f=\frac{df(x)}{dx}\Delta x+o(|\Delta x|) \quad (|\Delta x|\to 0)$$

$$\iff \Delta f=\frac{df(x)}{dx}\Delta x+\varepsilon_1(\Delta x)$$

$$\text{ただし} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x}=0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \text{ が存在する.} \iff dx=\frac{dx(t)}{dt}dt$$

$$\iff \Delta x = x(t+\Delta t)-x(t) \text{ とおく,}$$

$$\Delta x=\frac{dx(t)}{dt}\Delta t+o(|\Delta t|) \quad (|\Delta t|\to 0)$$

$$\iff \Delta x=\frac{dx(t)}{dt}\Delta t+\varepsilon_2(\Delta t)$$

$$\text{ただし} \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t}=0$$

これらより

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\frac{f(x(t+\Delta t))-f(x(t))}{\Delta t}$$

$$=\frac{f(x(t)+\Delta x)-f(x(t))}{\Delta t}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$=\frac{\frac{df(x)}{dx}\Delta x+\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\frac{dx(t)}{dt}\Delta t+\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$=\left(\frac{df(x)}{dx}+\frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x}\right)\left(\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t}\right)$$

ここで $\Delta t\to 0$ のとき

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta x=\lim_{\Delta t\to 0}\left(x(t+\Delta t)-x(t)\right)=x(t)-x(t)=0.$$

であるから $\Delta x\to 0$ となる.

No.

Date

よって

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{df(x)}{dx} + \frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x}\right) \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t}\right)$$

$$= \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

以上より

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{df(x(t))}{dt} = \frac{df(x(t))}{dx}\frac{dx(t)}{dt}$$

を得る.

(参照) 教科書(p.52) 問題 3-3 4,5. とその解答.

2変数関数の微分可能性

定義（2変数関数の全微分可能性）

2変数関数：$z=f(x,y)$
点$P(x,y)$から点$\tilde{P}(x+\Delta x, y+\Delta y)$へ移動．
点$P,\tilde{P}$間の距離：$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$
増分：$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$

関数$z=f(x,y)$に関して

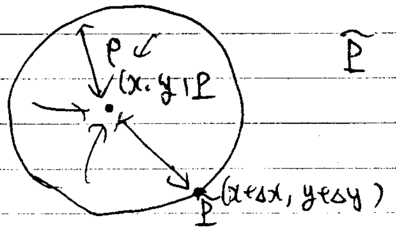
$$\Delta z=\alpha\Delta x+\beta\Delta y+o(\rho)\quad(\rho\to 0)$$

をみたす$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$が存在するとき，
関数$z=f(x,y)$は<u>全微分可能</u>または<u>微分可能</u>という．
このとき

$$dz=\alpha dx+\beta dy$$

と表記し，dzを$z=f(x,y)$の<u>全微分</u>または<u>微分</u>と呼ぶ．

注意



$\tilde{P}$をPへ近づけるときは
全方向から近づける．

$\left.\begin{array}{l}\rho\to 0\\ (\Delta x,\Delta y)\to 0\\ \tilde{P}\to P\\ (x+\Delta x, y+\Delta y)\to(x,y)\end{array}\right\}$ あらゆる方向から．

定義（n変数関数の全微分）

$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$に対して．

$$\Delta z=\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\cdots+\alpha_n\Delta x_n+o(\rho)\quad(\rho\to 0)$$

$$\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad dz=\alpha_1dx_1+\alpha_2dx_2+\cdots+\alpha_ndx_n$$

定理

関数 $z=f(x,y)$ に対して.

$z=f(x,y)$ が全微分可能

$$\Longleftrightarrow$$

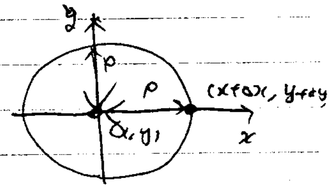
$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が存在して

$dz=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ が成り立つ.

(証明) $z=f(x,y)$ が全微分可能であれば

$$\Delta z=\alpha\Delta x+\beta\Delta y+o(\rho) \quad (\rho\to 0)$$

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$



が成り立つ. x軸に沿って $\rho\to 0$ とする.
すなわち $\Delta y=0,\ \Delta x\to 0$ とする.
このとき

$$\Delta z=\alpha\Delta x+o(|\Delta x|) \quad (|\Delta x|\to 0)$$

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=\alpha\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-\alpha=\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ が存在.}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-\alpha\right)=0$$

同様にして. y軸に沿って $\rho\to 0$ とする. $\Delta x=0,\ \Delta y\to 0$ とする.

$$\Delta z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\beta\Delta y+o(|\Delta y|) \quad (|\Delta y|\to 0)$$

$$\frac{o(|\Delta y|)}{\Delta y}=\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}-\beta$$

$$0=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{o(|\Delta y|)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}-\beta\right)$$

$$\Rightarrow \beta=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \text{ が存在する.}$$

$$=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

証明終了

No.

Date

定理 関数 $z=f(x,y)$ に対して
$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が存在して連続
$\Rightarrow$ $z=f(x,y)$ は全微分可能。

(注) 逆は成り立たない。

注意
全微分可能となる十分条件は他にも色々ある。

例

$z=f(x,y)=x^2e^{xy}$

$f_x(x,y)=2xe^{xy}+x^2ye^{xy}=(2x+x^2y)e^{xy}$

$f_y(x,y)=x^3e^{xy}$

f_x, f_y は連続 $\Rightarrow$ $dz=f_x dx+f_y dy$

$dz=(2x+x^2y)e^{xy}dx+x^3e^{xy}dy$

定理

$z=f(x,y)$ が全微分可能 $\Rightarrow$ $z=f(x,y)$ は連続。

(注) 逆は成り立たない。

(証明) 全微分可能であれば

$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

$=\alpha\Delta x+\beta\Delta y+o(\rho)\quad(\rho\to 0)\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ とする。このとき $\rho\to 0$ である。

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(\text{右辺})=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(\alpha\Delta x+\beta\Delta y+o(\rho))=0$.

これより $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)=0$

よって $f(x,y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(x+\Delta x,y+\Delta y)$

が成り立つ。点 (x,y) における値 $f(x,y)$ とその点に近づく極限値が存在し等しいので、点 (x,y) は連続である。

No.
Date

§ 合成関数の導関数

2変数関数 $z=f(x,y)$ と 1変数関数 $x=x(t),\ y=y(t)$ の合成関数 $z=z(t)=f(x(t),y(t))$ を考える.
これは t に関する 1変数関数となる.
合成関数 $z=z(t)$ の導関数 $\dfrac{dz(t)}{dt}$ を求める.

$\boxed{\text{定理}}$ $z=f(x,y),\ x=x(t),\ y=y(t)$ は微分可能とする.
このとき 合成関数 $z=z(t)=f(x(t),y(t))$ の導関数は

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial y}\cdot\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

で与えられる.

(証明) $f=f(x,y)$ は微分可能であるから

$$\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_x\Delta x+f_y\Delta y+o(\rho)\quad(\rho\to 0)$$
$$=f_x\Delta x+f_y\Delta y+\varepsilon_1(\rho)$$

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

ただし $\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\rho}=0$

$x=x(t),\ y=y(t)$ は微分可能であるから.

$$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)=\frac{dx(t)}{dt}\cdot\Delta x+\varepsilon_2(\Delta t)\quad \text{ただし}\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t}=0$$
$$\Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)=\frac{dy(t)}{dt}\cdot\Delta y+\varepsilon_3(\Delta t)\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon_3(\Delta t)}{\Delta t}=0$$

これらより $z=z(t)=f(x(t),y(t))$ の導関数は

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}=\frac{f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t))-f(x(t),y(t))}{\Delta t}$$
$$=\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta t}=\frac{f_x\Delta x+f_y\Delta y+\varepsilon_1(\rho)}{\Delta t}$$
$$=f_x\frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\Delta t}=f_x\left(\frac{dx}{dt}+\frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t}\right)+f_y\left(\frac{dy}{dt}+\frac{\varepsilon_3(\Delta t)}{\Delta t}\right)+\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\Delta t}$$

$\Delta t\to 0$ とする. このとき $\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)\to 0,\ \Delta y\to 0$ であり $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ となる.

$$\frac{dz(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=f_x\left(\frac{dx}{dt}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t}\right)+f_y\left(\frac{dy}{dt}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon_3(\Delta t)}{\Delta t}\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\Delta t}$$

ここで $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t}=0,\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon_3(\Delta t)}{\Delta t}=0,\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}\cdot\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\rho}=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\times\lim_{\rho\to 0}\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\rho}=$

より $\displaystyle\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ を得る.

No.

Date

例 $z=f(x,y)$, $x=at+b$, $y=ct+d$.

$z=f(at+b,\quad ct+d)$

$\frac{dz(t)}{dt}=?$

$\frac{dx}{dt}=a$, $\frac{dy}{dt}=c$. より

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}=af_x(at+b,ct+d)+cf_y(at+b,ct+d)$$

定理 n変数関数

$z=f(x_1,x_2,\cdots x_n)=f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

と1変数関数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}$

の合成関数 $z=z(t)=f(\boldsymbol{x}(t))$ の導関数は.

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}.$$

で与えられる. また

$$\frac{dz(t)}{dt}=\nabla f(\boldsymbol{x}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}.$$

とも表される.

ただし.

$$\nabla=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\\frac{\partial}{\partial x_2}\\\vdots\\\frac{\partial}{\partial x_n}\end{pmatrix},\quad \nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\\\vdots\\\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{pmatrix},\quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\\frac{dx_2}{dt}\\\vdots\\\frac{dx_n}{dt}\end{pmatrix}$$

と定義する.

例 $z=xy^2-x^2y$, $x=t^2$, $y=e^t$, $\frac{dz}{dt}=?$

$z_x=y^2-2xy$, $z_y=2xy-x^2$, $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=e^t$

$$\frac{dz}{dt}=z_x\frac{dx}{dt}+z_y\frac{dy}{dt}=(y^2-2xy)(2t)+(2xy-x^2)e^t=(e^{2t}-2t^2e^t)(2t)+(2t^2e^t-t^4)e^t$$

$$=2te^{2t}-4t^3e^t+2t^2e^{2t}-t^4e^t=(2t+2t^2)e^{2t}-(4t^3+t^4)e^t$$

No.

Date

定理　2変数関数 $z=f(x,y)$ と 2変数関数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ の合成関数 $z=z(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$ の偏導関数は

$$\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}$$

で与えられる.

定理　n 変数関数 $z=f(x_1,x_2\cdots x_n)=f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ と

m 変数関数 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1(u_1u_2\cdots u_m)\\x_2(u_1u_2\cdots u_m)\\\vdots\\x_n(u_1u_2\cdots u_m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(\boldsymbol{u})\\x_2(\boldsymbol{u})\\\vdots\\x_n(\boldsymbol{u})\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_m\end{pmatrix}$ との

合成関数 $z=z(u_1,u_2,\cdots,u_m)=f(x_1(u_1\cdots u_m),x_2(u_1\cdots u_m),\cdots,x_n(u_1\cdots u_m))=f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}))$

の偏導関数は

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial u_1}\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial u_2}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial u_2}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial u_2}\\\quad\vdots\\\dfrac{\partial z}{\partial u_m}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_m}+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial u_m}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial u_m}\end{cases}$$

で与えられる. まとめると

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u_1}\\\frac{\partial z}{\partial u_2}\\\vdots\\\frac{\partial z}{\partial u_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}&\frac{\partial x_2}{\partial u_1}&\cdots&\frac{\partial x_n}{\partial u_1}\\\frac{\partial x_1}{\partial u_2}&\frac{\partial x_2}{\partial u_2}&\cdots&\frac{\partial x_n}{\partial u_2}\\\vdots&&&\\\frac{\partial x_1}{\partial u_m}&\frac{\partial x_2}{\partial u_m}&\cdots&\frac{\partial x_n}{\partial u_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\\frac{\partial f}{\partial x_2}\\\vdots\\\frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

と表される. 更にまとめると.

$$\underbrace{\nabla_u z(\boldsymbol{u})}_{m\text{次ベクトル}}=\underbrace{J}_{m\times n\text{行列}}\ \underbrace{\nabla_x f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}))}_{n\text{次ベクトル}}$$

と表される. ただし

$$J=\left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\right)_{\substack{i=1,2,\cdots,m\\j=1,2,\cdots,n}},\quad \nabla_u=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u_1}\\\frac{\partial}{\partial u_2}\\\vdots\\\frac{\partial}{\partial u_m}\end{pmatrix},\quad \nabla_x=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\\frac{\partial}{\partial x_2}\\\vdots\\\frac{\partial}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$m\times n$ 行列

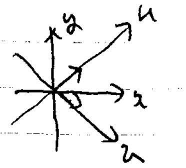
と定義する.

No. ____

Date

例

$$z = xy^2 + x^2y,\quad x = u+v,\ y = u-v \iff \begin{cases} u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ v = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$



$$\begin{cases} z_x = y^2 + 2xy \\ z_y = 2xy + x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_u = 1, \\ y_u = 1, \end{cases} \begin{cases} x_v = 1 \\ y_v = -1 \end{cases}$$

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = (y^2+2xy)\times 1 + (2xy+x^2)\times 1 = y^2+2xy+2xy+x^2$$
$$= x^2+y^2+4xy = (u+v)^2 + (u-v)^2 + 4(u+v)(u-v)$$
$$= u^2+v^2+\cancel{2uv} + u^2+v^2-\cancel{2uv} + 4u^2 - 4v^2 = 6u^2 - 2v^2$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = (y^2+2xy)\times 1 + (2xy+x^2)\times(-1) = y^2+2xy-2xy-x^2$$
$$= -x^2 + y^2 = -(u+v)^2 + (u-v)^2 = \cancel{-u^2} \cancel{-v^2} - 2uv + \cancel{u^2} + \cancel{v^2} - 2uv$$
$$= -4uv$$

例 (極座標)

$$z = f(x,y)$$

$$F = F(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = x(r,\varphi) \\ y = r\sin\varphi = y(r,\varphi) \end{cases}$$

$$F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = ?$$

$$z = f(x,y) = f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = z(r,\varphi)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix} z_r \\ z_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}$$

$\det(J) = r > 0$ とする.

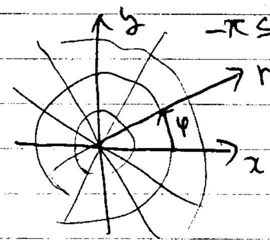
$$\to \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_r \\ z_\varphi \end{bmatrix}$$

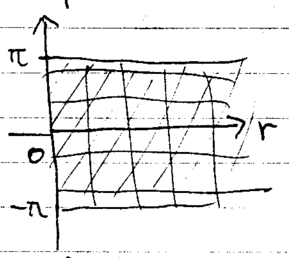
$$F = (z_x)^2 + (z_y)^2$$
$$= \left(\cos\varphi\, z_r - \frac{1}{r}\sin\varphi\, z_\varphi\right)^2 + \left(\sin\varphi\, z_r + \frac{1}{r}\cos\varphi\, z_\varphi\right)^2$$
$$= z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\varphi^2$$

$$F(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = F(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$\leq \tilde{F}(r,\varphi)$$

$r > 0$

$-\pi \leq \varphi < \pi$

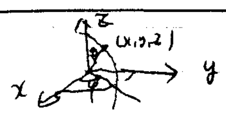




直交座標	極座標
$\nabla_{(r,\varphi)} z = J\, \nabla_{(x,y)}$	$\det J \neq 0$ のとき J^{-1} は存在する.
$J^{-1}\nabla_{(r,\varphi)} z = J^{-1}J\, \nabla_{(x,y)} z$	$\det(J)$ をヤコビの行列式 or ヤコビアン (Jacobian) という.
$J^{-1}\nabla_{(r,\varphi)} z = \nabla_{(x,y)} z$	$J^{-1} = \begin{bmatrix} +\frac{\lvert J_{11}\rvert}{\lvert J\rvert} & -\frac{\lvert J_{21}\rvert}{\lvert J\rvert} \\ -\frac{\lvert J_{12}\rvert}{\lvert J\rvert} & +\frac{\lvert J_{22}\rvert}{\lvert J\rvert} \end{bmatrix}$

$$\nabla_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \nabla_{(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

問 (3次元の極座標)



$$u = u(x,y,z),\ x = x(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

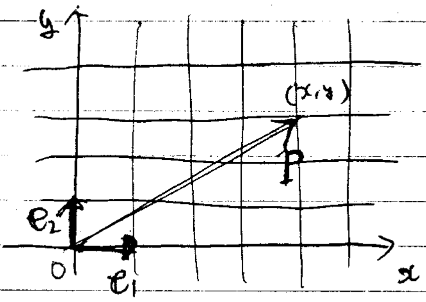
$$F = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \tilde{F}(r,\theta,\varphi) = ?$$

No.

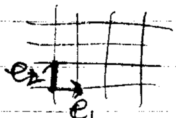
Date

§ 斜交座標

☆ 直交座標



基底 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

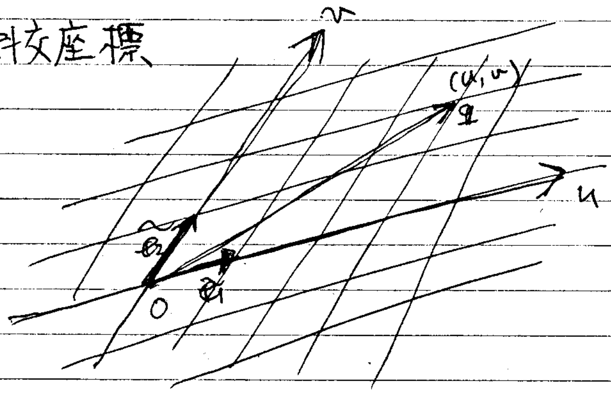


直交座標での成分表示

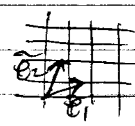
任意の（位置）ベクトル $\mathbf{p} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$

座標系 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ — 座標成分 (x, y)

☆ 斜交座標



基底 $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$



直交座標での成分表示

任意の（位置）ベクトル $\mathbf{q} = u\,\tilde{\mathbf{e}}_1 + v\,\tilde{\mathbf{e}}_2$

座標系 $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ — 座標成分 (u, v)

$\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ は

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}$$

$$x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 = u\,\tilde{\mathbf{e}}_1 + v\,\tilde{\mathbf{e}}_2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 & \tilde{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ただし $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$

$$E \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

No.

Date

$$\begin{cases} x = \alpha u + \gamma v \\ y = \beta u + \delta v \end{cases}$$ より.

$$f_u = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \alpha f_x + \beta f_y$$

$$f_v = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \gamma f_x + \delta f_y .$$

$$\begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{(u,v)} f = A^T \nabla_{(x,y)} f$$

ただし $\nabla_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$, $\nabla_{(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}(\delta x - \beta y) \\ v = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}(-\gamma x + \alpha y) \end{cases}$$

$$f_x = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$= \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} f_u + \frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} f_v$$

$$f_y = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$= \frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} f_u + \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} f_v .$$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{(x,y)} f = A^{-T} \nabla_{(u,v)} f$$

ただし. $\nabla_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$, $\nabla_{(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(\delta\frac{\partial}{\partial u} - \gamma\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(-\beta\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)$$ より

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \dfrac{1}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\left(\delta\dfrac{\partial}{\partial u} - \gamma\dfrac{\partial}{\partial v}\right)\left(\delta\dfrac{\partial}{\partial u} - \gamma\dfrac{\partial}{\partial v}\right) = \dfrac{1}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\left(\delta^2\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\delta\gamma\dfrac{\partial^2}{\partial u\partial v} + \gamma^2\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{1}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\left(-\beta\dfrac{\partial}{\partial u} + \alpha\dfrac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\beta\dfrac{\partial}{\partial u} + \alpha\dfrac{\partial}{\partial v}\right) = \dfrac{1}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\left(\beta^2\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\alpha\beta\dfrac{\partial^2}{\partial u\partial v} + \alpha^2\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \end{cases}$$

ラプラシアンは

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$= \frac{1}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\left((\beta^2+\delta^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2(\alpha\beta+\delta\gamma)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + (\alpha^2+\gamma^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right),$$

となる.

☆ e_1, e_2 が正規直交基底のとき A は直交行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となる.

$$\left(\begin{array}{l} |e_1| = |e_2| = 1,\ e_1\cdot e_2 = 0 \\ e_1\cdot e_1 = 1 \\ e_2\cdot e_2 = 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\because\ A^TA = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^Te_1 & e_1^Te_2 \\ e_2^Te_2 & e_2^Te_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1\cdot e_1 & e_1\cdot e_2 \\ e_2\cdot e_2 & e_2\cdot e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I\right)$$

このとき.

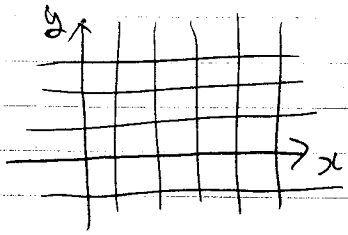
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because\ \det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ \beta^2 + \delta^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \alpha\beta + \delta\gamma = \cos\theta\sin\theta + \cos\theta(-\sin\theta) = 0 \\ \alpha^2 + \gamma^2 = \cos^2\theta + (-\sin\theta)^2 = 1. \end{array}\right)$$

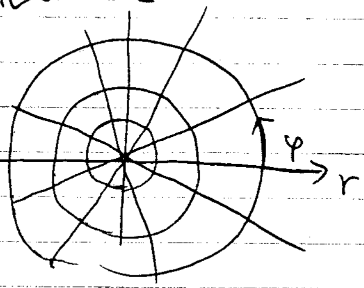
と表される.

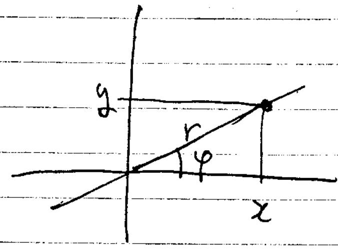
§ 極座標

2次元の場合



直交座標





極座標.

r, φ … 独立変数
x, y … 従属変数.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = x(r,\varphi) \\ y = r\sin\varphi = y(r,\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} f_r = \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial x}{\partial r} f_x + \dfrac{\partial y}{\partial r} f_y \\ f_\varphi = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} f_x + \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} f_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} f_r \\ f_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$|A| = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\varphi \end{bmatrix}$$

x, y … 独立変数
r, φ … 従属座標.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = r(x,y) \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \varphi(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{1/x}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial r}{\partial x} f_r + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} f_\varphi \\ f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial r}{\partial y} f_r + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} f_\varphi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\varphi \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} f_r \\ f_\varphi \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & +\dfrac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & -\dfrac{y}{r^2} \\ \dfrac{y}{r} & \dfrac{x}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

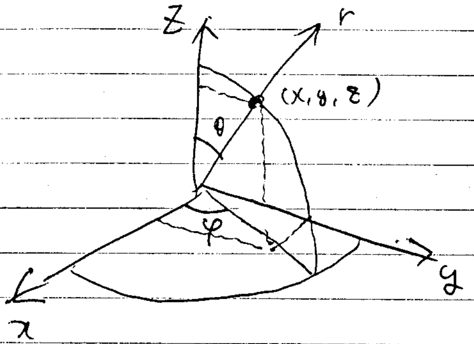
(注) $AB = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

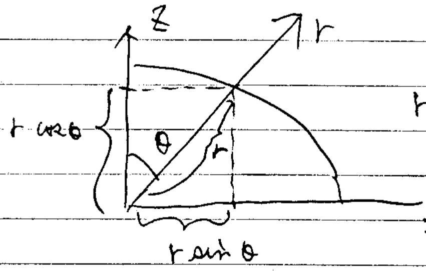
$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

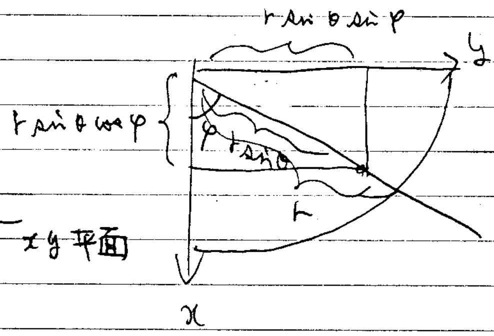
$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

3次元の場合







$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

§方向微分

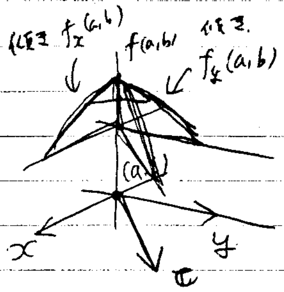
関数 $z=f(x,y)$ に対して

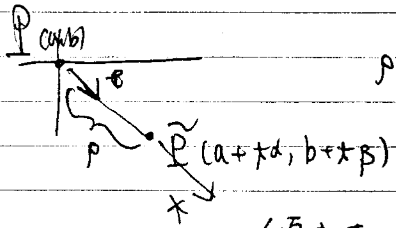
点 (a,b) における x軸方向の傾きは $f_x(a,b)$

〃 y軸方向 〃 $f_y(a,b)$

では、

ベクトル $e=(\alpha,\beta)$ 方向の傾きは?





$$\rho = t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$f(P)=f(a,b)$$

$$f(\tilde{P})=f(a+t\alpha, b+t\beta)$$

傾きは $\dfrac{f(\tilde{P})-f(P)}{\rho} = \dfrac{f(a+t\alpha, b+t\beta)-f(a,b)}{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \to ?\ (t\to 0)$

$f(x,y)$ を全微分可能とする

$$(\text{傾き}) = \frac{f_x(a,b)t\alpha + f_y(a,b)t\beta + o(t\sqrt{\alpha^2+\beta^2})}{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad (t\to 0)$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial e} = f_x(a,b)\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + f_y(a,b)\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

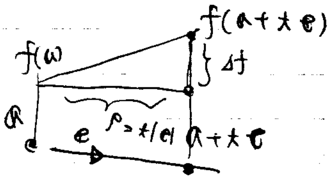
$$= \left(f_x(a,b), f_y(a,b)\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) = \nabla f(a,b)\cdot \boxed{\frac{e}{|e|}}$$

← 長さ1のベクトル
規格化された
ベクトル
正規化

定義 (方向微分)

関数 $z=f(x)$ の 点 a における e方向の微分係数 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}, e=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f(a)}{\partial e} = \frac{1}{|e|}\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}f(a+te) = \nabla f(a)\cdot\frac{e}{|e|} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}\frac{\alpha_j}{|e|}$$



$$\frac{\Delta f}{\rho} = \frac{f(a+te)-f(a)}{t|e|} \quad (t\to 0)$$

$$= \frac{1}{|e|}\frac{d}{dt}f(a+te) \quad (t\to 0) = \frac{1}{|e|}\nabla f(a+te)\cdot\frac{d(a+te)}{dt} \quad (t\to 0)$$

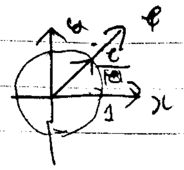
$$= \frac{1}{|e|}\nabla f(a)\cdot\frac{e}{|e|}$$

No.

Date

$\boxed{例}$ (方向微分の例)

$z=f(x,y)=x^2+y^2$



点 (a,b) における $e=(1,1)$ 方向の微分係数は?

$f_x=2x,\ f_y=2y,\ \frac{e}{|e|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\alpha,\beta)$

$f_x(a,b)=2a,\ f_y(a,b)=2b$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial e} = f_x(a,b)\,\alpha + f_y(a,b)\,\beta = \frac{2a}{\sqrt{2}}+\frac{2b}{\sqrt{2}} \quad //$$

No.

Date

§ ライプニッツ則

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(f(x)\,g(x)\big) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}f(x)}{dx^{n-k}}\,\frac{d^k g(x)}{dx^k}.$$

(証明)

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

$$= \lim_{y\to x}\frac{df(x)}{dx}g(y) + f(x)\frac{dg(y)}{dy} = \lim_{y\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x)g(y)$$

$$= \lim_{y\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\quad\right)f(x)g(y)$$

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)g(x) = \lim_{y\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x)g(y)$$

$$= \lim_{y\to x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k}{\partial y^k}f(x)g(y)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial y}$ は可換.
$f(x), g(x)$ が $n+1$ 回以上微分可能であれば

$$= \lim_{y\to x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}f(x)}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k g(y)}{\partial y^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}f(x)}{dx^{n-k}}\frac{d^k g(x)}{dx^k}.$$

~~(参)~~ 教科書 (p.73) 章末問題 [3]

例

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'g + gf'$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x)g(x) = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$\frac{d^3}{dx^3}f(x)g(x) = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + g'''$$

$$\frac{d^4}{dx^4}f(x)g(x) = f^{(4)}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + g^{(4)}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

問 $\frac{d^{10}}{dx^{10}}f(x)g(x)$ を求めよ.

§ テイラー展開

1変数関数 $f(x)$ のテイラー展開は、点 a のまわりで、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$\xi = a + (x-a)\theta \quad (0<\theta<1)$$

$x = a+h$ とおくと、

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{n}\frac{h^j}{j!}\frac{d^jf(a)}{dx^j} + R_{n+1}.$$

2変数関数 $f(x,y)$ のテイラー展開は？
点 (a,b) のまわりで点 $(a+h, b+k)$ について展開する。
まず関数

$$F(t) = f(a+ht, b+kt)$$

を考える。これを t で全微分すると

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{\partial f(a+ht,b+kt)}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}(a+ht)}_{=h} + \frac{\partial f(a+ht,b+kt)}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}(b+kt)}_{=k}$$

$$= h\frac{\partial f}{\partial x}(a+ht, b+kt) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+ht, b+kt)$$

$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+ht, b+kt)$$

を得る。更に繰り返して t で全微分すると、

$$\frac{d^n}{dt^n}F(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+ht,b+kt)$$

$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+ht, b+kt)$$

となる。$t=0$ とおくと、

$$\frac{d^nF(0)}{dt^n} = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$$

である。

No.

Date

今 $F(t)$ について $t=0$ のまわりでテイラー展開すると、

$$F(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} \frac{d^j F(0)}{dt^j} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} F(t\theta)}{dt^{n+1}} \quad (0<\theta<1)$$

となる。$F(t) = f(a+ht, b+kt)$ を代入すると、

$$f(a+ht, b+kt) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+ht\theta, b+kt\theta)$$

を得る。$t=1$ とおくと、

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b) + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+h\theta, b+k\theta)$$

$$(0<\theta<1)$$

となる。これが2変数関数のテイラー展開である。
更に式を展開し、別の表現も得る。

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{j!} \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m}} \frac{\partial^{j-m}}{\partial x^{j-m}} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(a,b) + R_{n+1}$$

$$\frac{1}{j!}\binom{j}{m} = \frac{1}{j!}\frac{j!}{(j-m)!\,m!} = \frac{1}{(j-m)!\,m!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{m=0}^{j} \frac{h^{j-m} k^m}{(j-m)!\,m!} \frac{\partial^j}{\partial x^{j-m} \partial y^m} f(a,b) + R_{n+1}$$

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{l+m=j \\ 0 \le l,m \le j}} \frac{h^l k^m}{l!\,m!} \frac{\partial^j f(a,b)}{\partial x^l \partial y^m} + R_{n+1}$$

更に $h \to x-a$, $k \to y-b$ と置き換える。

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l+m=j} \frac{1}{l!\,m!} \frac{\partial^j f(a,b)}{\partial x^l \partial y^m} (x-a)^l (y-b)^m + R_{n+1}$$

まとめると、

定理（2変数関数のテイラー展開）　$f(x,y)$ が $n+1$ 回微分可能なとき、点 (a,b) まわりのテイラー展開

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b) + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+h\theta, b+k\theta)$$

$$(0<\theta<1)$$

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{l+m=j \\ 0 \le l,m \le j}} \frac{h^l k^m}{l!\,m!} \frac{\partial^j f(a,b)}{\partial x^l \partial y^m} + R_{n+1}$$

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{l+m=j \\ 0 \le l,m \le j}} \frac{1}{l!\,m!} \frac{\partial^j f(a,b)}{\partial x^l \partial y^m} \times (x-a)^l (y-b)^m + R_{n+1}$$

No.

Date

例 （2変数関数のテイラー展開の具体例）

$$f(a+h,\ b+k) = \underbrace{f(a,b)}_{j=0} + \underbrace{h f_x(a,b) + k f_y(a,b)}_{j=1}$$

$$+ \frac{1}{2}h^2 f_{xx}(a,b) + hk\, f_{xy}(a,b) + \frac{1}{2}k^2 f_{yy}(a,b) \quad \leftarrow j=2$$

$$+ \frac{1}{3!}h^3 f_{xxx}(a,b) + \frac{1}{2}h^2k\, f_{xxy}(a,b) + \frac{1}{2}hk^2 f_{xyy}(a,b) + \frac{1}{3!}k^3 f_{yyy}(a,b) \quad \leftarrow j=3$$

$$+ \frac{1}{4!}h^4 f_{xxxx}(a,b) + \frac{1}{3!}h^3k\, f_{xxxy}(a,b) + \frac{1}{2\cdot 2}h^2k^2 f_{xxyy}(a,b) + \frac{1}{3!}hk^3 f_{xyyy}(a,b)$$

$$+ \frac{1}{4!}k^4 f_{yyyy}(a,b) \quad \leftarrow j$$

$$+ R_5$$

例 （テイラー展開の使用例）

$f(x,y) = x^2y + 4y - 5$ を点 $(1,-1)$ のまわりで点 (x,y) について展開する。

$f_x = 2xy$, $f_y = x^2+4$

$f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x$, $f_{yy} = 0$

$f_{xxx} = 0$, $f_{xxy} = 2$, $f_{xyy} = 0$, $f_{yyy} = 0$

$f_{xxxx} = 0$, $f_{xxxy} = 0$, $f_{xxyy} = 0$, $f_{xyyy} = 0$, $f_{yyyy} = 0$.

$$f(x,y) = \boxed{f(1,-1)}^{-10} + f_x(1,-1)^{=-2}(x-1) + f_y(1,-1)^{=5}(y+1)$$

$$+ \frac{1}{2}f_{xx}(1,-1)^{-2}(x-1)^2 + f_{xy}(1,-1)^{=2} \times (x-1)(y+1) + \frac{1}{2}f_{yy}(1,-1)^{=0}(y+1)^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\underbrace{f_{xxx}(1,-1)}_{=0}(x-1)^3 + \frac{1}{2}\underbrace{f_{xxy}(1,-1)}_{=2} \times (x-1)^2(y+1) + \frac{1}{2}f_{xyy}(1,-1)^{=0} \times (x-1)(y+1)^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\underbrace{f_{yyy}(1,-1)}_{=0}(y+1)^3$$

$$+ 0 + 0 + \cdots$$

$$f(x,y) = -10 - 2(x-1) + 5(y+1) - (x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (x-1)^2(y+1)$$

例

$f(x,y) = e^{x+2y}$ を点 $(0,0)$ まわりで $n=1$ 次まで展開。

$f(0,0) = 1$

$f_x = e^{x+2y}$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y = 2e^{x+2y}$, $f_y(0,0) = 2$

$f_{xx} = e^{x+2y}$, $f_{xx}(0,0) = 1$, $f_{xy} = 2e^{x+2y}$, $f_{xy}(0,0) = 2$, $f_{yy} = 4e^{x+2y}$, $f_{yy}(0,0) = 4$.

$$f(h,k) = f(0,0) + f_x(0,0)h + f_y(0,0)k + \frac{1}{2}f_{xx}(\theta h, \theta k)h^2 + f_{xy}(\theta h, \theta k)hk + \frac{1}{2}f_{yy}(\theta h, \theta k)k^2$$

$$= 1 + 1\times h + 2\times k + \frac{1}{2}e^{\theta h+2\theta k}h^2 + 2e^{\theta h+2\theta k}hk + \frac{1}{2}\times 4e^{\theta h+2\theta k}k^2$$

$$= 1 + h + 2k + \frac{1}{2}(h^2 + 4hk + 4k^2)e^{\theta h+2\theta k}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

No.

Date

$\boxed{\text{定理}}$ （n変数関数のテイラー展開）

関数 $f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x)$ の点 $(a_1 a_2 \cdots a_n) = a$ まわりのテイラー展開

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \cdots, a_n+h_2) = f(a+h)$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{j!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j f(a) + R_{\nu+1}$$

$$R_{\nu+1} = \frac{1}{(\nu+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu+1} f(a+\theta h) \quad (0<\theta<1)$$

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_n=j \\ 0 \le l_i \le j \\ i=1,2,\cdots,n}} \frac{h_1^{l_1} h_2^{l_2} \cdots h_n^{l_n}}{l_1!\, l_2! \cdots l_n!} \frac{\partial^j f(a)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \cdots \partial x_n^{l_n}} + R_{\nu+1}$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_n=j} \frac{1}{l_1!\, l_2! \cdots l_n!} \frac{\partial^j f(a)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \cdots \partial x_n^{l_n}} (x_1-a_1)(x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n) + R_{\nu+1}$$

$n=1$ とすると.

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad (0<\theta<1)$$

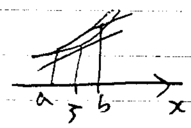
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h)$$

$h \to b-a$ とおきかえ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \qquad a<b \text{ とすると } a<\xi<b.$$

$\boxed{\text{定理}}$ (平均値の定理)

$$f(x) \in C^1,\ a<b \implies \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi),\quad a<\exists\xi<b$$

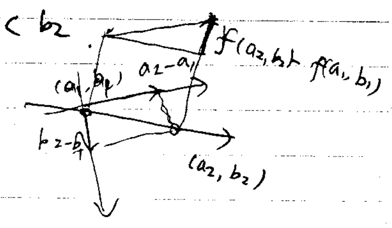


同様に2変数の場合では.

$\boxed{\text{定理}}$ (平均値の定理)

$$\begin{array}{l} f(x,y)\in C^1 \\ a_1<a_2 \\ b_1<b_2 \end{array} \implies \begin{array}{l} f(a_2,b_2)-f(a_1,b_1) \\ = f_x(\xi,\eta)(a_2-a_1) + f_y(\xi,\eta)(b_2-b_1) \end{array}$$

$$a_1<\exists\xi<a_2,\quad b_1<\exists\eta<b_2.$$



§ 陰関数

定義 (陰関数)

xとyに$F(x,y)=0$という関係があるとき，yはxの関数$y=f(x)$とみなせる．すなわち

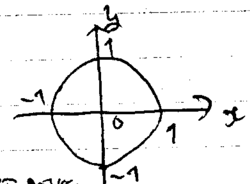
$$F(x,f(x))=0$$

をみたす$y=f(x)$を$F(x,y)=0$で定義される陰関数(implicit function)という．

同様にx,y,zに$F(x,y,z)=0$という関係があるとき，zはx,yの関数$z=f(x,y)$であり，$F(x,y,z)=0$で定義される陰関数という．

例

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0$$



$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$ 2価関数.

$$=f(x)$$ ← 陽に(explicit)表される場合もある.

$$F(x,y)=x^3+3xy+4xy^2+y^2+y-2=0$$

$F(x,f(x))=0$ より $y=f(x)$. ← 陽には表しにくい.

$$F(x,y,z)=x^2+3xy-2yz+xz+z^2-15=0$$

$F(x,y,f(x,y))=0$ より $z=f(x,y)$

陰関数の逆関数を求める.

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0.$$

であるとき両辺をxで微分すると,

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(1)=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(x^2)=2x \\ \dfrac{d}{dx}(y^2)=\dfrac{d}{dx}(y(x))^2=\dfrac{d}{dy}y^2\times\dfrac{dy(x)}{dx}=2y\dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{d}{dx}1=0 \end{cases}$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

となる. よって $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ を得る.

No.

Date

一般的には $F(x,y)=0,\ y=f(x)$ のとき
$$F(x, f(x))=0$$
であるから両辺を x で微分すると、
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=0.$$
$$F_x(x,y)+F_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$
$$\to \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$
を得る.

$\boxed{\text{定理}}$ (陰関数の導関数)

$F(x,y)=0,\ y=f(x)$ に対して、
$$F_y(x,y)\neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

関係式
$$F(x,y,z)=x^2+3xy-2yz+xz+z^2-15=0$$
をみたす　陰関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を求める.
$F(x,y,z)=0$ を x で偏微分すると、
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2)+3\frac{\partial}{\partial x}(xy)-2\frac{\partial}{\partial x}(yz)+\frac{\partial}{\partial x}(xz)+\frac{\partial}{\partial x}(z^2)-\frac{\partial}{\partial x}15=0.$$

独立変数 x,y
従属変数 z

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}x^2=2x \\ \frac{\partial}{\partial x}(xy)=\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)y+x\times\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=y. \\ \frac{\partial}{\partial x}(yz)=\frac{\partial}{\partial x}y\,z(x,y)=y\frac{\partial z}{\partial x}. \\ \frac{\partial}{\partial x}(xz)=\frac{\partial}{\partial x}x\,z(x,y)=\frac{\partial x}{\partial x}z+x\frac{\partial z}{\partial x}=z+x\frac{\partial z}{\partial x}. \\ \frac{\partial}{\partial x}(z^2)=\frac{\partial}{\partial x}z(x,y)^2=\frac{dz^2}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=2z\frac{\partial z}{\partial x}.\end{cases}$$

$$\to 2x+3y-2y\frac{\partial z}{\partial x}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$
$$(2x+3y+z)+(-2y+x+2z)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+3y+z}{-2y+x+2z}$$
を得る. 次の y で偏微分すると
$$\frac{\partial}{\partial y}x^2+3\frac{\partial}{\partial y}xy-2\frac{\partial}{\partial y}yz+\frac{\partial}{\partial y}xz+\frac{\partial}{\partial y}z^2+\frac{\partial}{\partial y}(-15)=0$$

$$\to \quad 0 + 3x - 2\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + x\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 0 = 0$$

$$(3x - 2z) + (-2y + x + 2z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\to \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x - 2z}{-2y + x + 2z}$$

一般的には $F(x,y,z)=0$, $z=f(x,y)$ より

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,f(x,y))$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\boxed{\frac{\partial x}{\partial x}}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\boxed{\frac{\partial y}{\partial x}}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= F_x(x,y,z) + F_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\to \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,f(x,y))$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=z_y}$$

$$= F(x,y,z) + F_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\to \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

を得る。

定理 (陰関数の偏導関数)

$F(x,y,z)=0$ で定義される陰関数 $z=f(x,y)$ に対して

$$F_z(x,y,z) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \end{cases}$$

問 (陰関数の高階導関数)

$F(x,y)=0$ で定義される陰関数 $y=f(x)$ の高階導関数

$\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ を求めよ。

また、$F(x,y,z)=0$ で定義される陰関数 $z=f(x,y)$ の高階偏導関数

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \ldots$ を求めよ。

No.

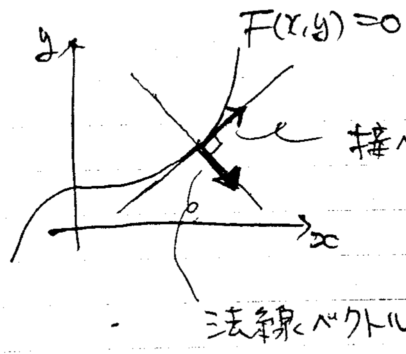
Date

$\boxed{問}$ $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ において点 $(0,1)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ を に接する接線の方程式をそれぞれ求めよ.

$\boxed{問}$ $F(x,y)=x^3+3x^2y+4xy^2+y^2+y-2=0$ 上の点 $(1,-1)$ における接線の方程式を求めよ.

$\boxed{問}$ $F(x,y)=x^3+xy^2-2=0$ で定義される陰関数 $y=f(x)$ に対し, y', y'' を x, y を用いて表せ.

§ 接平面



xy平面内の曲線 $F(x,y)=0$ を考える。

法線ベクトルを求める。x,yをパラメータ表示し $x=x(t)$, $y=y(t)$ とおく。このとき

$$F(x(t), y(t))=0$$

となる。両辺を微分すると

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t))=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0$$

$$F_x(x,y,z)\frac{dx}{dt}+F_y(x,y,z)\frac{dy}{dt}=0$$

となる。ここで

$$\mathbf{t}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

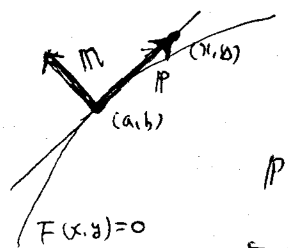
$$\mathbf{n}=\left(F_x(x,y,z), F_y(x,y,z)\right)=\nabla F(x,y,z) \quad \text{ただし } \nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

とおくと

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$$

が成り立つ。$\mathbf{t}$ と $\mathbf{n}$ は直交する。$\mathbf{t}$ は接ベクトルを表すので、それに垂直な $\mathbf{n}$ は法線ベクトルである。

曲線 $F(x,y)=0$ の点 (a,b) における接線の方程式を求める。



図より
$$\begin{cases}\mathbf{n}=(F_x(a,b), F_y(a,b)) \\ \mathbf{p}=(x-a, y-b)\end{cases}$$
とおく。

$$\mathbf{p}\perp\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}=0 \rightarrow F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

よって接線の方程式は

$$F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

である。特に $F(x,y)=f(x)-y=0$ のとき

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

となる。

$$F_x=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{df}{dx}=f'(x)$$

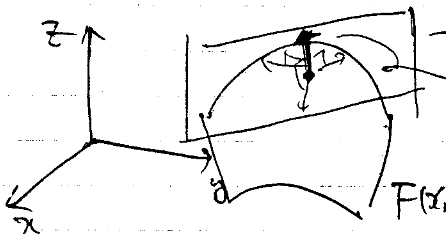
$$F_y=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial y}=0-1=-1$$

$b=f(a)$, $F_x(a,b)=f'(a)$, $F_y(a,b)=-1$

No.

Date

xyz 空間内の曲面 $F(x,y,z)=0$ を考える.



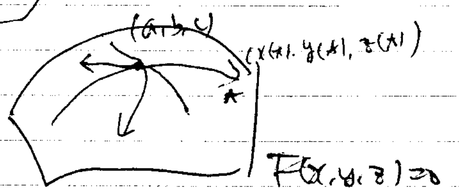
接平面 (tangent plane)

法線ベクトル (normal vector)

任意の接ベクトル $\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$ が成す平面が接平面である.

曲面 $F(x,y,z)=0$ 上で点 (a,b,c) を通る任意の曲線 $(x(t), y(t), z(t))$ を考える.
(ただし $t=0$ のとき 点 (a,b,c) を通るとする. $(x(0), y(0), z(0))=(a,b,c)$)

法線ベクトルを求める. $F(x,y,z)=0$ より



$$F(x(t), y(t), z(t))=0$$

となる. 両辺を t で微分すると

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0.$$

$$F_x(x,y,z)\frac{dx}{dt}+F_y(x,y,z)\frac{dy}{dt}+F_z(x,y,z)\frac{dz}{dt}=0$$

となる. ここで

$$\mathbf{t}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\mathbf{n}=\left(F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)\right)=\nabla F(x,y,z)$$

とおくと. $\quad \nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$$

が成り立つ. $\mathbf{t}$ は曲線 $(x(t), y(t), z(t))$ の接ベクトルであり, $\mathbf{n}$ はそれに直交する.
点 (a,b,c) における任意の接ベクトル

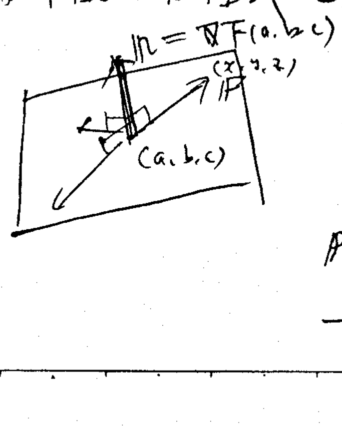
$$\mathbf{t}(0)=\left(\frac{dx(0)}{dt}, \frac{dy(0)}{dt}, \frac{dz(0)}{dt}\right)$$

に対して ベクトル

$$\mathbf{n}(t=0)=\left(F_x(a,b,c), F_y(a,b,c), F_z(a,b,c)\right)=\nabla F(a,b,c)$$

は直交するので. $\mathbf{n}(0)$ が法線ベクトルである.

接平面の方程式を求める.



$$\begin{cases} \mathbf{n}=\nabla F(a,b,c)=\left(F_x(a,b,c), F_y(a,b,c), F_z(a,b,c)\right) \\ \mathbf{p}=(x-a, y-b, z-c) \end{cases}$$

$$\mathbf{p}\perp\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}=0$$

$$\rightarrow F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0.$$

No.

Date

接平面の方程式は

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$$

となる. 特に $F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$ であるときは

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

となる.

$\boxed{\text{注}}$

接平面の方程式は

$$z=f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

と書ける. これは $f(x,y)$ の点 (a,b) まわりの テイラー展開の1次近似の式である.

$\boxed{\text{例}}$

曲面 $z=f(x,y)=4x^2y+xy^3$ 上の点 $(-1,1,3)$ における接平面は

$$z-f(-1,1)=f_x(-1,1)(x+1)+f_y(-1,1)(y-1)$$

より

$$z=-7x+y-5$$

である.

No.

Date

§ 極値

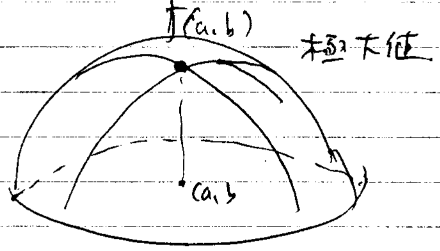
定義 (極大値, 極小値)

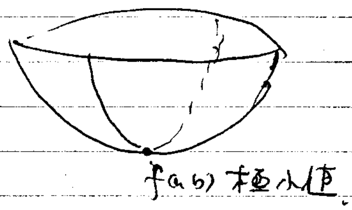
関数 $f(x,y)$ において点 (a,b) とそれ以外の近傍の任意の点 $(a+h, b+k)$ に対して、

$f(a,b) > f(a+h, b+k)$ ⇒ $f(x,y)$ は点 (a,b) で<u>極大値</u> $f(a,b)$ をとる。

$f(a,b) < f(a+h, b+k)$ ⇒ $f(x,y)$ は点 (a,b) で<u>極小値</u> $f(a,b)$ をとる。

極大値, 極小値を総称して<u>極値</u>という。





定理

$f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとる。 ⇒ $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$

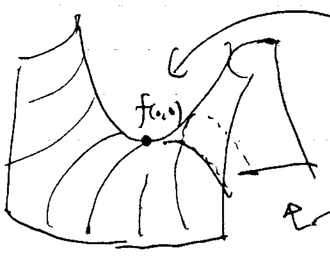
(注) 逆は成り立たない。

(証明) 平面 $y=b$ での切り口での曲線は極値をとるので、 $f_x(a,b)=0$
平面 $x=a$ 〃 $f_y(a,b)=0$ 終

例 $f(x,y) = x^2 - y^2$

$f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ となるが $f(0,0)$ は極値ではない。

<u>鞍点 (saddle point)</u>



← 馬の鞍のような形

No.

Date

定理

関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における極値の判定条件は次のようになる。

$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0,\ D=f_{xy}(a,b)^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$ とする。

$D<0,\ f_{xx}(a,b)>0 \Rightarrow$ $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小値をとる

$D<0,\ f_{xx}(a,b)<0 \Rightarrow$ $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大値をとる。

$D>0 \Rightarrow$ $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらない。

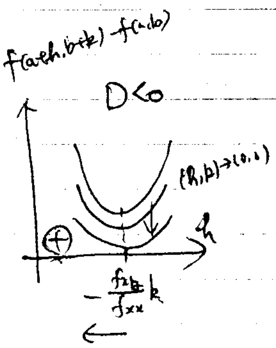
$D=0 \Rightarrow$ 個別に判定する。

(証明) $f(x,y)$ を点 (a,b) でテイラー展開すると、

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+\frac{1}{2}f_{xx}(a,b)h^2+f_{xy}(a,b)hk+\frac{1}{2}f_{yy}(a,b)k^2+o(\rho^2),\quad \rho=\sqrt{h^2+k^2}$$

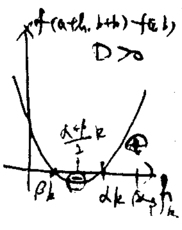
$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ より、h についての2次式とみて式を展開する。

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)-f(a,b)&=\frac{1}{2}f_{xx}(a,b)h^2+f_{xy}(a,b)hk+\frac{1}{2}f_{yy}(a,b)k^2+o(\rho^2)\\&=\frac{1}{2}f_{xx}\left(h^2+\frac{2f_{xy}}{f_{xx}}hk+\frac{f_{yy}}{f_{xx}}k^2\right)+o(\rho^2)\\&=\frac{1}{2}f_{xx}\left\{\left(h+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2+\frac{f_{yy}k^2}{f_{xx}}-\frac{(f_{xy})^2k^2}{(f_{xx})^2}\right\}+o(\rho^2)\\&=\frac{1}{2}f_{xx}\left\{\left(h+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2+\frac{f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2}{(f_{xx})^2}k^2\right\}+o(\rho^2)\\&=\frac{1}{2}f_{xx}\left\{\underbrace{\left(h+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2}_{\geq 0}-D\times\underbrace{\left(\frac{k}{f_{xx}}\right)^2}_{\geq 0}\right\}+o(\rho^2)\end{aligned}$$



$D<0,\ f_{xx}>0$ のとき $f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$
$D<0,\ f_{xx}<0$ のとき $f(a+h,b+k)-f(a,b)<0$
を得る。 → 極小 / 極大

$D>0$ のとき



$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}f_{xx}(h-\alpha k)(h-\beta k)+o(\rho^2)$$

ただし、$\alpha+\beta=-\frac{2f_{xy}}{f_{xx}},\ \alpha\beta=\frac{f_{yy}}{f_{xx}}$

$h=(2\alpha-\beta)k,\ k\to 0$ としたときの点を考える

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}f_{xx}(\alpha-\beta)k\times 2(\alpha-\beta)k+o(\rho^2)=f_{xx}(\alpha-\beta)^2k^2+o(\rho^2)$$

$h=\frac{\alpha+\beta}{2}k,\ k\to 0$ としたときの点を考える。

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}f_{xx}\frac{-\alpha+\beta}{2}k\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}k+o(\rho^2)=-\frac{1}{8}f_{xx}(\alpha-\beta)^2k^2+o(\rho^2)$$

この2つの点は符号が異なる。よって極値をとらない。

No.

Date

例

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$ の極値は?

$f_x=2x=0$, $f_y=2y=0$ より $(x,y)=(0,0)$

$f_{xx}=2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=2$ より

$D=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy}=-4<0$

$f_{xx}=2>0$

よって $f(0,0)=0$ は極小値.

(2) $f(x,y)=x^2+y^3$ の極値は?

$f_x=2x=0$, $f_y=3y^2=0$ より $(x,y)=(0,0)$.

$f_{xx}=2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=6y$

$D=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy}=0-2\times 6y=-12y$.

$D(0,0)=0$ → 不明.

$h>0$ として $f(0,h)-f(0,0)=h^3>0$

$f(0,-h)-f(0,0)=-h^3<0$

よって 点$(0,0)$は極値ではない.

問 $f(x,y)=1-2x^2-xy-y^2+2x-3y$ の極値を求めよ.

問 $f(x,y)=x^2-2xy+y^2-x^4-y^4$ の極値を求めよ.

§ 条件つき極値問題

変数 x と y が条件 $g(x,y)=0$ をみたしながら動くときの関数 $f(x,y)$ の極値を考える.

条件 $g(x,y)=0$ が成り立つので y は x の陰関数 $y=\varphi(x)$ であり
x は y の陰関数 $y=\psi(y)$ とみなせる.
このとき関数 $f(x,y)$ は

$$p(x)=f(x,\varphi(x))$$
$$q(y)=f(\psi(y),y)$$

のように, x の関数 $p(x)$, y の関数 $q(y)$ と表せる.

$$f(x,y) \text{ は } (a,b) \text{ で極値をもつ.} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dp}{dx}(a)=0 \\ \dfrac{dq}{dy}(b)=0 \end{cases}$$

$\frac{dp}{dx}(a)=0$, $\frac{dq}{dy}(a)=0$ を展開する.

$$\frac{dp}{dx}(a)=\left(\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=f_x(a,b)+f_y(a,b)\varphi'(a)=0$$
$$\frac{dq}{dy}(b)=\left(\frac{d}{dy}f(\psi(y),y)\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=f_x(a,b)\psi'(b)+f_y(a,b)=0$$

$y=\varphi(x)$, $x=\psi(y)$ は $g(x,y)=0$ で定義される陰関数なので

$$\varphi'(x)=-\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}, \quad \psi'(y)=-\frac{g_y(x,y)}{g_x(x,y)}$$

である. これより,

$$\begin{cases} f_x(a,b)-f_y(a,b)\dfrac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}=0 \\ -f_x(a,b)\dfrac{g_y(a,b)}{g_x(a,b)}+f_y(a,b)=0 \end{cases}$$

を得る. ただし $g_x(a,b)\neq 0$, $g_y(a,b)\neq 0$ とする.
この二つの式は

$$(\ast) \qquad f_x(a,b)g_y(a,b)-f_y(a,b)g_x(a,b)=0$$

のように一つの式にまとまる.
この方程式を解くことで極値の候補 (a,b) が求まる.

No.

Date

しかしながら、このままの式では解くのはむずかしい。
以下のように式を変形する。
(*) を変形して、

$$(**) \qquad \frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)} = \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)} = \alpha$$

とおく。これを (*) へ代入して、

$$\begin{cases} f_x(a,b) - \alpha\, g_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) - \alpha\, g_y(a,b) = 0. \end{cases}$$

を得る。α は (**) で定まる定数であるが、未知の定数であると考える。
すなわち　(x, y, λ) についての連立方程式

$$(***) \quad \begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

を解き (a, b, α) を求める。
ここで

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

とおくと、(***) は

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$$

と表せる。

$\boxed{\text{定理}}$ (ラグランジュの未定定数法)

条件 $g(x,y)=0$ のもとでの関数 $f(x,y)$ の極値を考える。

$f(x,y)$ は (a,b) で極値をもつ。 $g_x(a,b) \neq 0$, $g_y(a,b) \neq 0$ $\Rightarrow$ $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

$$\begin{cases} F_x(a,b,\alpha) = 0 \\ F_y(a,b,\alpha) = 0 \\ F_\lambda(a,b,\alpha) = 0 \end{cases}$$ をみたす α が存在する。

(x, y, λ) についての連立方程式 $\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$ を解き (a,b,λ) を求めることで

極値の候補がみつかる。
この方法を<u>ラグランジュの未定定数法</u>と呼ぶ。

No.

Date

例

条件 $g(x,y)=x^2-\frac{1}{4}y^2-1=0$ のもとでの関数 $f(x,y)=x^3+y$ の極値を求める。

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおく。

$$\left.\begin{array}{lll}(1) & F_x = & x(2x-3\lambda)=0 \\ (2) & F_y = & 1+\frac{1}{2}\lambda y=0 \\ (3) & -F_\lambda = & x^2-\frac{1}{4}y^2-1=0\end{array}\right\}$$

これを解く。(1)より、$x=0$ とする。このとき(3)より $y=\pm\sqrt{-4}$ となり実解をもたないので不適。
(1)より $x=\frac{3}{2}\lambda$ とする。このとき $\lambda\neq 0$ である。(2)より $y=-\frac{2}{\lambda}$ となる。これらを(3)へ代入すると、

$$(4\lambda^2+3)(\lambda^2-3)=0$$
$$\lambda=\pm\sqrt{3}$$

を得る。よって、

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\mp\frac{2}{\sqrt{3}},\pm\sqrt{3}\right)\quad(\text{複合同順})$$

が求まる。点 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ が極値の候補となる。

$g(x,y)=0$ より $y=\varphi(x)$ とする。すなわち $g(x,\varphi(x))=0$ をみたす。
このとき

$$p(x)=f(x,\varphi(x))$$

とおく。

$$p'(x)=f_x(x,y)+f_y(x,y)\varphi'(x)=f_x(x,y)-f_y(x,y)\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}$$
$$=(3x^2)-(1)\times\frac{2x}{-\frac{1}{2}y}=3x^2+4\frac{x}{y}$$

$$p''(x)=6x+4\times\frac{1\cdot y-x\cdot y'}{y^2}=6x+\frac{4}{y}-4\frac{x}{y^2}\cdot\varphi'(x)=6x+\frac{4}{y}-4\frac{x}{y^2}\times\left(4\frac{x}{y}\right)$$
$$=6x+\frac{4}{y}-16\frac{x^2}{y^3}$$

$(x,y)=\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\mp\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ とする。

$$p'\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=3\times\left(\frac{\pm 2}{\sqrt{3}}\right)^2+4\times\frac{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}}{\mp\frac{2}{\sqrt{3}}}=3\times\frac{4}{3}-4=0.$$

$$p''\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=6\times\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\frac{4}{\mp\frac{2}{\sqrt{3}}}-16\times\frac{\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\mp\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3}=\pm4\sqrt{3}\mp2\sqrt{3}-16\times\frac{\cancel{\frac{4}{3}}}{\left(\mp\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\times\cancel{\frac{4}{3}}}$$
$$=\pm2\sqrt{3}\pm\cancel{16}^{8}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}=\pm10\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}p'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=0,\ p''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)>0 \\ p'\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=0,\ p''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)<0.\end{array}\right\}$$

よって、$(x,y)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき極小値 $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとる。
$(x,y)=\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき極大値 $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとる。 //

No.

Date

P.116

問題 5-1.

1. $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$

$$f(0,1) = 0^3 - 2\times 0^2 \times 1 + 3\times 1^3 = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$f(1,1) = 1^3 - 2\times 1^2 \times 1 + 3\times 1^3 = 1 - 2 + 3 = 2$$
$$f(2,0) = 2^3 - 2\times 2^2 \times 0 + 3\times 0^3 = 8 - 0 + 0 = 8$$
$$f(1,-1) = 1^3 - 2\times 1^2 \times (-1) + 3\times(-1)^3 = 1 + 2 - 3 = 0.$$

2. 原点での連続性は?

(1) $f(x,y) = x^2 + y$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} y = 0. \\ \lim\limits_{\substack{y=mx\\x\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+mx) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(x,y) = 0$$

$\Rightarrow$ $f(x,y)$は原点で連続.

(2) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ for $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

$$\lim_{\substack{y=mx\\x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在しない $\Rightarrow$ $f(x,y)$は原点で不連続.

(3) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$, $f(0,0) = 1$

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

$$\lim_{\substack{y=mx\\x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+mx)}{x+mx} = \lim_{\xi\to 0} \frac{\sin\xi}{\xi} = 1.$$

($\xi = (1+m)x$とおく)

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1$ $\Rightarrow$ $f(x,y)$は原点で連続.

No.

Date

P119

問題 5-2

1. $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^2 + 3y^4.$

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 6xy^2$$

$$f_y(x,y) = -6x^2y + 12y^3.$$

$$f_x(1,1) = f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 4-6 = -2$$

$$f_x(1,-1) = f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = 4-6 = -2$$

$$f_y(1,1) = f_y(x,y)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -6+12 = 6$$

$$f_y(1,-1) = f_y(x,y)\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = 6-12 = -6$$

2. (1). $f(x,y) = x^5 + 3x^4y^2 + 4xy^3 + y^4$

$$f_x = 5x^4 + 12x^3y^2 + 4y^3$$

$$f_y = 6x^4y + 12xy^2 + 4y^3.$$

$$f_{xx} = 20x^3 + 36x^2y^2.$$

$$f_{xy} = 24x^3y + 12y^2$$

$$f_{yx} = 24x^3y + 12y^2$$

$$f_{yy} = 6x^4 + 24xy + 12y^2$$

$$f_{xxx} = 60x^2 + 72xy^2$$

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = 72x^2y$$

$$f_{yyx} = f_{xyy} = f_{yxy} = 24x^3 + 24y$$

$$f_{yyy} = 24x + 24y$$

$$f_{xxxx} = 120x + 72y^2$$

$$f_{xxxy} = 144xy$$

$$f_{xxyy} = 72x^2$$

$$f_{xyyy} = 24$$

$$f_{yyyy} = 24$$

(2) $f(x,y) = e^{xy^2}$

$$f_x = y^2 e^{xy^2}$$

$$f_y = 2xy\, e^{xy^2}$$

$$f_{xx} = y^4 e^{xy^2}$$

$$f_{xy} = 2y e^{xy^2} + y^2 x (2y\,x)\, e^{xy^2}$$

$$= 2(y^3x + y) e^{xy^2}$$

$$f_{yx} = 2y\, e^{xy^2} + 2xy\, xy^2 e^{xy^2}$$

$$= 2(xy^3 + y)\, e^{xy^2}$$

$$f_{yy} = 2x e^{xy^2} + (2xy)\times(2xy) e^{xy^2}$$

$$= (2x + 4x^2y^2)\, e^{xy^2}$$

(3) $f(x,y) = \sin(2x+3y)$

$f_x = 2\cos(2x+3y)$, $f_y = 3\cos(2x+3y)$

$f_{xx} = -4\sin(2x+3y)$, $f_{yy} = -9\sin(2x+3y)$

$f_{xy} = -6\sin(2x+3y)$, $f_{yx} = -6\cos(2x+3y)$

No.

Date

P.123

問題 5-3

1. (1) $z = x^4y + x^2y^3 + xy^4$

$z_x = 4x^3y + 2xy^3 + y^4$, $z_y = x^4 + 3x^2y^2 + 4xy^3$

$dz = z_x dx + z_y dy = (4x^3y + 2xy^3 + y^4)dx + (x^4 + 3x^2y^2 + 4xy^3)dy$

(2) $z = x\cos y - y\cos x$

$z_x = \cos y + y\sin x$, $z_y = -x\sin y - \cos x$

$dz = z_x dx + z_y dy = (\cos y + y\sin x)dx - (x\sin y + \cos x)dy$

(3) $u = xy + yz + zx$

$u_x = y + z$, $u_y = x + z$, $u_z = y + x$.

$du = u_x dx + u_y dy + u_z dz = (y+z)dx + (x+z)dy + (y+x)dx$.

(4) $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\theta_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $\theta_y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$d\theta = \theta_x dx + \theta_y dy = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

2. $z = f(x, y)$, $y = g(x)$.

$z = f(x, g(x)) = z(x)$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$\xi = x$ とする.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial \xi} \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dg}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dg}{dx}.$$

3. (1) $u = x^3y^2$, $x = t^2$; $y = t^4$

$u_x = 3x^2y^2$, $u_y = 2x^3y$, $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 4t^3$

$\frac{du}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_y\frac{dy}{dt} = 3x^2y^2 \times 2t + 2x^3y \times 4t^3 = 6x^2y^2t + 8x^3yt^3$

$= 6(2t)^2(t^4)^2t + 8(t^2)^3(t^4)t^3 = 24t^{11} + 8t^{13}$.

(2) $u = x\cos y - y\cos x$, $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$

$u_x = \cos y + y\sin x$, $u_y = -x\sin y - \cos y$, $\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$

$\frac{du}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_y\frac{dy}{dt} = (\cos y + y\sin x)(-2\sin 2t) + (-x\sin y - \cos y)(2\cos 2t)$

$= -2(\cos y + y\sin x)\sin 2t - 2(x\sin y + \cos y)\cos 2t$.

(3) $u = t^2 + 2tx + 3x^2$, $x = \log t$. $\frac{\partial u}{\partial t} = 2t + 2x$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2t + 6x$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

$\frac{du}{dt} = u_t + u_x\frac{dx}{dt} = 2t + 2x + (2t + 6x)\frac{1}{t} = 2t + 2x + 2 + \frac{6x}{t} = 2t + 2 + \frac{2t + 6\log t}{t}.$

No.

Date

P127

問題 5-4.

1. $\log \frac{x+y}{2} = \frac{x+y-2}{x+y-\theta(x+y-2)}$ $(0<\theta<1,\ x>0,\ y>0)$

$f(x,y) = \log \frac{x+y}{2}$ とおく.

$f_x(x,y) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x+y}{2}} = \frac{1}{x+y}$, $f_y(x,y) = \frac{1}{x+y}$

左辺 $= f(x,y) = f(1,1) + f_x(1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1))(x-1)$
$+ f_y(1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1))(y-1)$

$= \underset{\log 1 = 0}{\log \frac{1+1}{2}} + \frac{x-1}{1+\theta(x-1)+1+\theta(y-1)} + \frac{y-1}{1+\theta(x-1)+1+\theta(y-1)}$

$= \frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)} \underset{\theta \to 1-\theta}{=} \frac{x+y-2}{x+y-\theta(x+y-2)} =$ 右辺.

2. $f(x,y) = \sin xy$ $(x,y) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ でテイラー展開

$f(\frac{\pi}{2}, 1) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$f_x = y\cos xy$, $f_y = x\cos xy$, $f_x(\frac{\pi}{2},1) = 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $f_y(\frac{\pi}{2},1) = \frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

$f_{xx} = -y^2\sin xy$, $f_{xy} = \cos xy - xy\sin xy$, $f_{yy} = -x^2\sin xy$

$f_{xx}(\frac{\pi}{2},1) = -1\cdot\sin\frac{\pi}{2} = -1$, $f_{xy}(\frac{\pi}{2},1) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot 1\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, $f_{yy}(\frac{\pi}{2},1) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{4}$.

$f(x,y) = f(\frac{\pi}{2},1) + f_x(\frac{\pi}{2},1)(x-\frac{\pi}{2}) + f_y(\frac{\pi}{2},1)(y-1)$
$+ \frac{1}{2}f_{xx}(\frac{\pi}{2},1)(x-\frac{\pi}{2})^2 + f_{xy}(\frac{\pi}{2},1)(x-\frac{\pi}{2})(y-1) + \frac{1}{2}f_{yy}(\frac{\pi}{2},1)(y-1)^2 + o(\rho^2)$

$= 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 - \frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})(y-1) - \frac{\pi^2}{8}(y-1)^2 + o(\rho^2)$ $\rho = \sqrt{(x-\frac{\pi}{2})^2+(y-1)^2}$

No.

Date

p.133

問題 5-5.

1. (1) $x^3+3x^2y+2xy^2+3y^3=4$.

$3x^2+6xy+3x^2\frac{dy}{dx}+2xy^2+4xy\frac{dy}{dx}+9y^2\frac{dy}{dx}=0$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+6xy+2xy^2}{3x^2+4xy+9y^2}$$

(2) $x+y=e^{xy}$

$1+\frac{dy}{dx}=e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$

$1+\frac{dy}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\frac{dy}{dx}$

$(1-xe^{xy})\frac{dy}{dx}=ye^{xy}-1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{xy}-1}{1-xe^{xy}}$$

(3) $\log(x^2+y^2)-2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=0$.

$\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}-2\frac{-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=0$

$\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{2(x+y)}{x^2+y^2}=\frac{2(x-y)}{x^2+y^2}\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

3. (1) $3x^3+4y^2z-z^4=0$, $z=f(x,y)$

$9x^2+4y^2\frac{\partial z}{\partial x}-4z^3\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$4(y^2-z^3)z_x=-9x^2$

$$z_x=\frac{-9x^2}{4(y^2-z^3)}$$

$0+8yz+4y^2z_y-4z^3z_y=0$.

$4(y^2-z^3)z_y=-8yz$

$$z_y=\frac{-8yz}{4(y^2-z^3)}=\frac{-2yz}{y^2-z^3}$$

(2) $x^2+2y+3z+5=\log z$

$2x+3z_x=\frac{1}{z}z_x$

$\left(3-\frac{1}{z}\right)z_x=-2x$

$$z_x=\frac{-2x}{3-\frac{1}{z}}=\frac{-2xz}{3z-1}.$$

$2+3z_y=\frac{1}{z}z_y$

$\left(3-\frac{1}{z}\right)z_y=-2$

$$z_y=\frac{-2z}{3z-1}.$$

(3) $z=e^x\sin(y+z)+1$.

$z_x=e^x\sin(y+z)+e^x\cos(y+z)z_x$.

$$z_x=\frac{e^x\sin(y+z)}{1-e^x\cos(y+z)}$$

$z_y=e^x\cos(y+z)(1+z_y)$

$$z_y=\frac{e^x\cos(y+z)}{1-e^x\cos(y+z)}$$

No.

Date

4.(1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10$.

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y + 4 = 0 \end{cases} \to (x,y) = (1,-2)$$

よって. $f(1,-2)$ は極小値.
$\quad\; \shortparallel$
$1+4-2-8+10$
$\quad\; \shortparallel$
5

$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 2$.

$D(x,y) = f_{xy}{}^2 - f_{xx}f_{yy} = -4 < 0$.

$f_{xx} > 0$.

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 + 3x = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2 \\ x = -y^2. \end{cases}$$

$(-x^2)^2 + x = 0$
$x^4 + x = 0$
$x(x^3+1) = 0$
$x = 0, -1$
$y = 0, -1$
$(x,y) = (0,0), (-1,-1)$

$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = 3,\ f_{yy} = 6y$.

$D(x,y) = f_{xy}{}^2 - f_{xx}f_{yy}$
$= 9 - 6x \times 6y$
$= 9 - 36xy$

$\underline{(x,y) = (0,0) \text{ のとき}}$

$f_{xx}(0,0) = 0$, $D(0,0) = 9 > 0$. $f(0,0)$ は極値ではない

$\underline{(x,y) = (-1,-1) \text{ のとき}}$

$f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$, $D(-1,-1) = 9 - 36 = -27 < 0$

$f(-1,-1) = -1-1+3 = 1$

$f(-1,-1)$ は極大値.

No.

Date

p.154　5章演習問題

[1]

(1) $z = \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$

$x=0,\ y\to 0$ とする.

$$\lim_{x=0,\,y\to 0} z = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y^2}-1}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{1}+y^2+\frac{1}{2}y^4+O(y^6)\cancel{-1}}{y^2} = \lim_{y\to 0}\left(1+\frac{1}{2}y^2+O(y^4)\right)=1.$$

$y=mx,\ x\to 0$ とする.

$$\lim_{y=mx,\,x\to 0} z = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+m^2x^2}-1}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{(1+m^2)x^2}-1}{(1+m^2)x^2} = \lim_{\xi\to 0}\frac{e^{\xi}-1}{\xi} = \lim_{\xi\to 0}\left(1+\frac{1}{2}\xi+O(\xi^2)\right)=1.$$

$\xi=(1+m^2)x^2$

$z(0,0)=1$ と定義すると $z(x,y)$ は $(0,0)$ で連続となる.

(2) $z = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

$x=0,\ y\to 0$ とする.　　$y=mx,\ x\to 0$ とする.

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} z = \lim_{y\to 0} 0 = 0. \qquad \lim_{\substack{y=mx\\ x\to 0}} z = \lim_{x\to 0}\frac{x^2m^2x^2}{x^4+m^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{m^2}{1+m^4}\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} = \frac{m^2}{1+m^4}\neq 0$$

極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} z$ は存在しない. $z(x,y)$ は $(0,0)$ で不連続である.

[2]

(1) $f(x,y)=x^3-x^2y+xy^2-y^3+1$

$f_x=3x^2-2xy+y^2,\quad f_y=-x^2+2xy-3y^2$

$f_{xx}=6x-2y,\ f_{xy}=-2x+2y,\ f_{yx}=-2x+2y,\ f_{yy}=2x-6y$

(2) $f(x,y)=x^2\cos y-y^2\cos x$.

$f_x=2x\cos y+y^2\sin x,\ f_y=-x^2\sin y-2y\cos x.$

$f_{xx}=2\cos y+y^2\cos x,\ f_{xy}=-2x\sin y+2y\sin x,\ f_{yx}=-2x\sin y+2y\sin x,\ f_{yy}=x^2\cos y-2\cos x.$

(3) $f(x,y)=\arctan(x^2y)$

$$f_x=\frac{2xy}{1+(x^2y)^2}=\frac{2xy}{1+x^4y^2},\quad f_y=\frac{x^2}{1+x^4y^2}$$

$$f_{xx}=\frac{2y(1+x^4y^2)-2xy\times(4x^3y^2)}{(1+x^4y^2)^2}=\frac{2y+2x^4y^3-8x^4y^3}{(1+x^4y^2)^2}=\frac{2y-6x^4y^3}{(1+x^4y^2)^2}$$

$$f_{xy}=\frac{2x(1+x^4y^2)-2xy(2x^4y)}{(1+x^4y^2)^2}=\frac{2x+2x^5y^2-4x^5y^2}{(\sim)^2}=\frac{2x-2x^5y^2}{(1+x^4y^2)^2}$$

$$f_{yx}=\frac{2x(1-x^2(4x^3y^2))}{(1+x^4y^2)^2}=\frac{2x+2x^5y^2-4x^5y^2}{(\sim)^2}=\frac{2x-2x^5y^2}{(1+x^4y^2)^2}$$

$$f_{yy}=\frac{-x^2(2x^4y)}{(1+x^4y^2)^2}=\frac{-2x^6y}{(1+x^4y^2)^2}$$

No.

Date

[3]

(1) $z = x^2 + 4xy + y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x + 3y^2.$$

(2) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2}.$$

(3) $z = \sin(2x+1)\cos(y^2+4)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x+1)\cos(y^2+4), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y\sin(2x+1)\sin(y^2+4)$$

(4) $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 20$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+4y^2-5z^2) = \frac{\partial}{\partial x}(20) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(3x^2+4y^2-5z^2) = \frac{\partial}{\partial y}(20)$$

$$6x - 10z\frac{\partial z}{\partial x} = 0. \qquad 8y - 10z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6x}{10z} = \frac{3x}{5z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{8y}{10z} = \frac{4y}{5z}$$

(5) $\sin xy + \sin yz + \sin xz = 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin xy + \sin yz + \sin xz) \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial y}(\sin xy + \sin yz + \sin xz)$$

$$= y\cos xy + y\cos yz\frac{\partial z}{\partial x} + \cos xz\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0. \qquad = x\cos xy + \cos yz\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + x\cos xz\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$(y\cos xy + z\cos xz) + (y\cos yz + x\cos xz)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad = (x\cos xy + z\cos yz) + (y\cos yz + x\cos xz)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y\cos xy + z\cos xz}{y\cos yz + x\cos xz} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x\cos xy + z\cos yz}{y\cos yz + x\cos xz}.$$

[4] $f = f(x,y)$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & -\frac{y}{r^2} \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\varphi \end{bmatrix}$$

(1) $f_\varphi = -yf_x + xf_y = 0$ ⇒ fはφに関して定数 ⇒ fはrだけの関数.

(2) $f_r = \frac{1}{r}(xf_x + yf_y) = 0$ ⇒ fはrに関して定数 ⇒ fはφだけの関数.

No.

Date

(3) $\begin{cases} f_x = \cos\varphi f_r - \frac{1}{r}\sin\varphi f_\varphi \\ f_y = \sin\varphi f_r + \frac{1}{r}\cos\varphi f_\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)f \\ \frac{\partial}{\partial y} f = \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)f \end{cases}$

x を独立変数　　r, φ を独立変数

y を独立変数　　r, φ を独立変数

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi f_r - \frac{1}{r}\sin\varphi f_\varphi\right)$$

$$= \cos^2\varphi f_{rr} - \frac{2}{r}\sin\varphi\cos\varphi f_{r\varphi} + \frac{1}{r^2}\sin^2\varphi f_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\sin^2\varphi f_r + \frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi f_\varphi$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi f_r + \frac{1}{r}\cos\varphi f_\varphi\right)$$

$$= \sin^2\varphi f_{rr} + \frac{2}{r}\sin\varphi\cos\varphi f_{r\varphi} + \frac{1}{r^2}\cos^2\varphi f_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\cos^2\varphi f_r - \frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi f_\varphi$$

$$f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi}$$ //

[5] ~~$F(x,y,z)=0$ を x, y, z でそれぞれ偏微分して.~~

$$F_x + F_y\frac{\partial y}{\partial x} + F_z\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad F_x\frac{\partial x}{\partial y} + F_y + F_z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\quad F_x\frac{\partial x}{\partial z} + F_y\frac{\partial y}{\partial z} + F_z = 0$$

~~(1) z を定数として.~~

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z=c} = -\frac{F_x}{F_y},\quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z=c} = -\frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z=c} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z=c}}$$ //

(2). $$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z=c} = -\frac{F_y}{F_x},\quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{x=c} = -\frac{F_z}{F_y},\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=c} = -\frac{F_x}{F_z}.$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z=c}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{x=c}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=c} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1.$$ //

[6] 全微分 $dF = F_x\,dx + F_y\,dy = P\,dx + Q\,dy$

$$\rightarrow F_x = P,\ F_y = Q \rightarrow F_{xy} = P_y,\ F_{yx} = Q_x \rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

[7] p次同次関数 $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p F(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(F(\lambda x,\lambda y)\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^p F(x,y)\right)$$

$$F_x(\lambda x,\lambda y)\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda x) + F_y(\lambda x,\lambda y)\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda y) = p\lambda^{p-1}F(x,y)$$

$$xF_x(\lambda x,\lambda y) + yF_y(\lambda x,\lambda y) = p\lambda^{p-1}F(x,y)$$

$\lambda = 1$ とおく.

$$xF_x(x,y) + yF_y(x,y) = pF(x,y)$$ //

(例) $F(x,y) = a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3$　3次同次関数

$$F(\lambda x,\lambda y) = a_1\lambda^3x^3 + a_2\lambda^3x^2y + a_3\lambda^3xy^2 + a_4\lambda^3y^3 = F(x,y)$$

$$F_x = 3a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2$$

$$xF_x = 3a_1x^3 + 2a_2x^2y + a_3xy^2$$

$$F_y = a_2x^2 + 2a_3xy + 3a_4y^2$$

$$yF_y = a_2x^2y + 2a_3xy^2 + 3a_4y^3$$

$$\rightarrow xF_x + yF_y = 3F.$$

No.

Date

[8]

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

ただし $\nabla_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$

ただし $\nabla_{(r,\theta,\varphi)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$

$$\nabla_{(r,\theta,\varphi)} f = A\left(\nabla_{(x,y,z)} f\right)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$\nabla_{(x,y,z)} f = A^{-1} \nabla_{(r,\theta,\varphi)} f$ をもとめる.

$$\det(A) = |A| = r^2\sin\theta$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} +\frac{|A_{11}|}{|A|} & -\frac{|A_{21}|}{|A|} & +\frac{|A_{31}|}{|A|} \\ -\frac{|A_{12}|}{|A|} & +\frac{|A_{22}|}{|A|} & -\frac{|A_{32}|}{|A|} \\ +\frac{|A_{13}|}{|A|} & -\frac{|A_{23}|}{|A|} & +\frac{|A_{33}|}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_x = \sin\theta\cos\varphi\, f_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\, f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} f_\varphi \\ f_y = \sin\theta\sin\varphi\, f_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\, f_\theta + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} f_\varphi \\ f_z = \cos\theta\, f_r - \frac{1}{r}\sin\theta\, f_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f = \left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) f \\ \frac{\partial}{\partial y} f = \left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) f \\ \frac{\partial}{\partial z} f = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) f \end{cases}$$

No.

Date

$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x$

$= \left(\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\theta\cos\varphi f_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi f_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} f_\varphi\right)$

$= \sin\theta\cos\varphi(\sin\theta\cos\varphi f_r)_r + \sin\theta\cos\varphi\left(\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi f_\theta\right)_r + \sin\theta\cos\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}f_\varphi\right)_r$

$+ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi(\sin\theta\cos\varphi f_r)_\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\left(\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi f_\theta\right)_\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}f_\varphi\right)_\theta$

$- \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}(\sin\theta\cos\varphi f_r)_\varphi - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\left(\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi f_\theta\right)_\varphi - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}f_\varphi\right)_\varphi$

$(\sin\theta\cos\varphi f_r)_r = \sin\theta\cos\varphi(f_r)_r = \sin\theta\cos\varphi f_{rr}$

$\left(\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi f_\theta\right)_r = \cos\theta\cos\varphi\left(\frac{f_\theta}{r}\right)_r = \cos\theta\cos\varphi\left(-\frac{f_\theta}{r^2} + \frac{f_{r\theta}}{r}\right)$

$\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}f_\varphi\right)_r = -\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{f_\varphi}{r}\right)_r = -\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(-\frac{f_\varphi}{r^2} + \frac{f_{r\varphi}}{r}\right)$

$(\sin\theta\cos\varphi f_r)_\theta = \cos\varphi(\sin\theta f_r)_\theta = \cos\varphi(\cos\theta f_r + \sin\theta f_{r\theta})$

$\left(\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi f_\theta\right)_\theta = \frac{1}{r}\cos\varphi(\cos\theta f_\theta)_\theta = \frac{1}{r}\cos\varphi(-\sin\theta f_\theta + \cos\theta f_{\theta\theta})$

$\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}f_\varphi\right)_\theta = -\frac{1}{r}\sin\varphi\left(\frac{f_\varphi}{\sin\theta}\right)_\theta = -\frac{1}{r}\sin\varphi\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}f_\varphi + \frac{f_{\theta\varphi}}{\sin\theta}\right)$

$(\sin\theta\cos\varphi f_r)_\varphi = \sin\theta(\cos\varphi f_r)_\varphi = \sin\theta(-\sin\varphi f_r + \cos\varphi f_{r\varphi})$

$\left(\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi f_\theta\right)_\varphi = \frac{1}{r}\cos\theta(\cos\varphi f_\theta)_\varphi = \frac{1}{r}\cos\theta(-\sin\varphi f_\theta + \cos\varphi f_{\theta\varphi})$

$\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}f_\varphi\right)_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}(\sin\varphi f_\varphi)_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}(\cos\varphi f_\varphi + \sin\varphi f_{\varphi\varphi})$

$=$ まとめると $= \sin^2\theta\cos^2\varphi f_{rr} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi f_{\theta\theta} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}f_{\varphi\varphi}$

$+ \frac{1}{r}(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)f_r + \frac{1}{r^2}\left(-2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{\sin\theta}\right)f_\theta$

$+ \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}f_\varphi + \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi f_{r\theta} - \frac{2}{r}\sin\varphi\cos\varphi f_{r\varphi} - \frac{2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin\theta}f_{\theta\varphi}$

同様にして

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}f_y$

$= \left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\theta\cos\varphi f_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi f_\theta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}f_\varphi\right)$

No.
Date

$$f_{yy} = \sin^2\theta\cos^2\varphi f_{rr} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi f_{\theta\theta} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\theta} f_{\varphi\varphi}$$
$$+\frac{1}{r}(\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) f_r + \frac{1}{r^2}\left(-2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi + \frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{\sin\theta}\right) f_\theta$$
$$-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta} f_\varphi + \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi f_{r\theta} + \frac{2}{r}\sin\varphi\cos\varphi f_{r\varphi} + \frac{2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin\theta} f_{\theta\varphi}$$

同様にして.

$$f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} f_z = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta f_r - \frac{1}{r}\sin\theta f_\theta\right)$$
$$= \cos^2\theta f_{rr} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta f_r + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta - \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta f_{r\theta}.$$

足し合わせて

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$
$$= f_{rr} + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} f_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2\tan\theta} f_\theta$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f$$
$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) f.$$

[9] $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

ラプラス演算子 (Laplace operator), ラプラシアン (Laplacian)

$\Delta f = 0 \Longrightarrow f$: 調和関数 (harmonic function)

(1) $f = \frac{x}{x^2+y^2}$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{x}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_{xx} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_{yy}$$
$$= \left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)_x + \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)_y = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (-x^2+y^2)\times 2\times(x^2+y^2)\times(2x)}{(x^2+y^2)^4}$$
$$+ \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (-2xy)\times 2(x^2+y^2)\times(2y)}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{-4x(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)(-4x^3+4xy^2-8xy^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-4x(x^2+y^2)^2 + 4x(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = 0$$

または 極座標 ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) で表して.

$$f = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{r}\cos\varphi$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{1}{r}\cos\varphi\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r}\cos\varphi\right)_{rr} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\cos\varphi\right)_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}\cos\varphi\right)_{\varphi\varphi}$$

$$= \cos\varphi\left(\frac{1}{r}\right)_{rr} + \frac{1}{r}\cos\varphi\left(\frac{1}{r}\right)_r + \frac{1}{r^3}(\cos\varphi)_{\varphi\varphi}$$

$$= \cos\varphi(-1)\times(-2)\times\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r}\cos\varphi\left(-\frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^3}(-\cos\varphi)$$

$$= 2\frac{1}{r^3}\cos\varphi - \frac{1}{r^3}\cos\varphi - \frac{1}{r^3}\cos\varphi = 0$$

(2) $f = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\arctan\frac{y}{x}\right)_{xx} + \left(\arctan\frac{y}{x}\right)_{yy}$$

$$= \left(\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)_x + \left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)_y = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)_x + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_y$$

$$= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

または極座標で表して

$$f = \arctan\left(\frac{\cancel{r}\sin\varphi}{\cancel{r}\cos\varphi}\right) = \arctan(\tan\varphi) = \varphi$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\varphi = (\varphi)_{rr} + \frac{1}{r}(\varphi)_r + \frac{1}{r^2}(\varphi)_{\varphi\varphi} = 0+0+0 = 0$$

(3) $f = \log(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{2x-y-z}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx} \\ f_y = \dfrac{2y-x-z}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx} \\ f_z = \dfrac{2z-y-x}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{xx} = \dfrac{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)-(2x-y-z)^2}{(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2} = \dfrac{-2x^2+y^2+z^2+2xy-4yz+2zx}{(\sim)^2} \\ f_{yy} = \dfrac{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)-(2y-x-z)^2}{(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2} = \dfrac{x^2-2y^2+z^2+2xy+2yz-4zx}{(\sim)^2} \\ f_{zz} = \dfrac{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)-(2z-y-x)^2}{(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2} = \dfrac{x^2+y^2-2z^2-4xy+2yz+2zx}{(\sim)^2} \end{cases}$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

[11] 条件 $g(x,y) = x^2+y^2-a^2=0 \quad (a>0)$

$f(x,y) = 2xy$ の極値は?

$F = f + \lambda g$ とおく.

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda g_x = 2y + 2\lambda x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda g_y = 2x + 2\lambda y = 0 \\ -F_\lambda = g = x^2+y^2-a^2=0 \end{cases}$$

これより方程式

$$\begin{cases} y + \lambda x = 0 & \text{—①} \\ x + \lambda y = 0 & \text{—②} \\ x^2+y^2-a^2=0 & \text{—③} \end{cases}$$

を解く.

①より $y = -\lambda x$ を②へ代入して.

$$(1-\lambda^2)x = 0 \quad \text{—④}$$

④より $x=0$ or $\lambda=1$, or $\lambda=-1$.

$x=0$ のとき. ①②より $y=0$, また③より $y=\pm a$ となる. これは矛盾する.

$\lambda=1$ のとき

$$\begin{cases} x+y=0 & \to y=-x \\ x^2+y^2-a^2=0 & \to 2x^2-a^2=0 \to x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ y = \mp\frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$(x,y) = \left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$\lambda=-1$ のとき

$$\begin{cases} y-x=0 & \to y=x \\ x^2+y^2-a^2=0 & \to 2x^2-a^2=0 \to x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ y = \pm\frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$(x,y) = \left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

よって $(x,y) = \left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right), \left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を得る.

これらの点が極値であるか, 確める.

$g(x,y)=0$ より $y=\varphi(x)$ とおく. このとき $y' = \varphi'(x) = -\frac{g_x}{g_y} = -\frac{x}{y}$ である.

$p(x) = f(x, \varphi(x))$ とおく.

$$p'(x) = f_x + f_y\varphi'(x) = 2y + 2x \times \left(-\frac{x}{y}\right) = 2y - \frac{2x^2}{y}$$

$$p''(x) = \left(2y - \frac{2x^2}{y}\right)_x = 2y' - \frac{4x}{y} + \frac{2x^2}{y^2}y' = 2\left(-\frac{x}{y}\right) - \frac{4x}{y} + \frac{2x^2}{y^2}\left(-\frac{x}{y}\right)$$

$$= -6\frac{x}{y} - 2\frac{x^3}{y^3}.$$

$(x,y) = \left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ のとき.

$f = -a^2$ } 極小値 $f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -a^2$ //

$(x,y) = \left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ のとき

$f = a^2$ } 極大値

$f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = a^2$ //

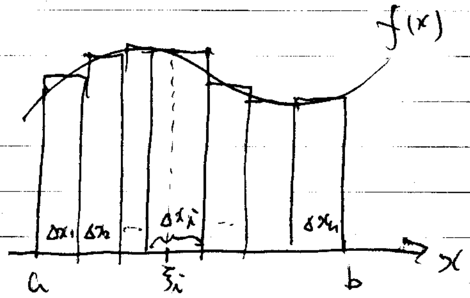
No.

Date

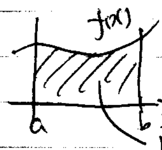
多重積分

§多重積分

1変数 $f(x)$ に対して．

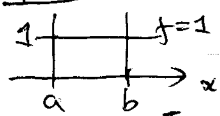


定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$



面積 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$．

f = 1 のとき



$I = [a, b]$

$\displaystyle\int_a^b dx = b-a$ … 区間 I の長さ．

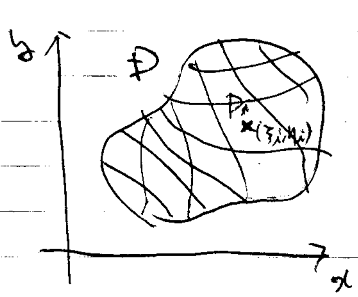
2変数関数 $f(x,y)$ に対して．

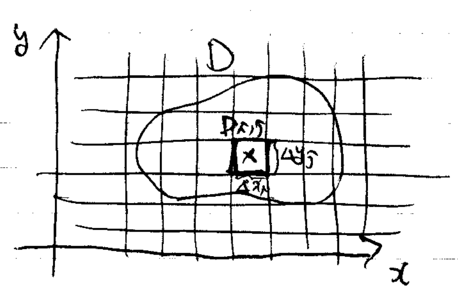
2重積分．

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta S_i$$

または

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$





領域 D

D を n 分割 $D_1, D_2, \cdots, D_n$

D の面積 S

D_i の面積 ΔS_i

D_i 内の点 (ξ_i, η_i)

領域 D

D を x 軸方向に n 分割，y 軸方向に m 分割

$D_{1,1}$ $D_{1,2}$ … $D_{1,n}$

$D_{2,1}$ $D_{2,2}$ …

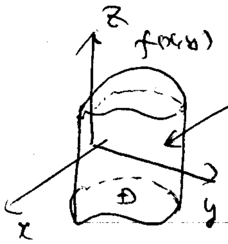
⋮

$D_{m,1}$ … $D_{m,n}$

D の面積 S

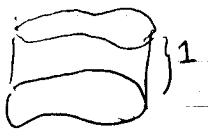
$D_{i,j}$ の面積 $\Delta x_i \Delta y_j$

$D_{i,j}$ 内の点 (ξ_i, η_j)



体積 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

<u>f=1のとき.</u>



$\iint_D dx\,dy = \iint_D dS = S$.

領域Dの面積となる

3変数関数 $f(x,y,z)$ に対して.

3重積分.

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta V_i$$

または

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{n,m,l\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

領域D
Dの体積 V
Dをn分割 $D_1, D_2, \cdots, D_n$
D_iの体積 ΔV_i
D_i内の点 (ξ_i,η_i,ζ_i)

領域D.
Dをx軸,y軸,z軸に平行に分割.
Dの体積 V
$D_{i,j,k}$の体積 $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$
$D_{i,j,k}$内の点 (ξ_i,η_j,ζ_k)

<u>f=1のとき</u>

$\iiint_D dx\,dy\,dz = \iiint dV = V$ …領域Dの体積

同様にして n変数関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して.

n重積分. $\underbrace{\iint\cdots\int}_{n}{}_D f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$

f=1のとき.

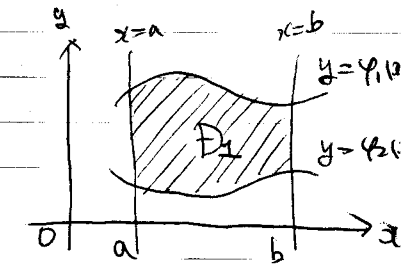
$\iint\cdots\int_D dx_1\,dx_2\cdots dx_n$

… n次元の体積

No.

Date

§ 累次積分

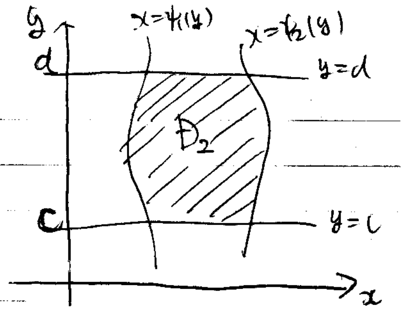


xに関して単純な領域

$$D_1 = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

yに関して単純な領域

$$D_2 = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

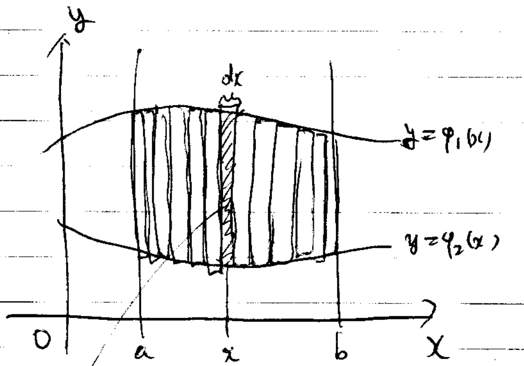


領域 D_1, D_2 に対して次の積分が成り立つ。

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

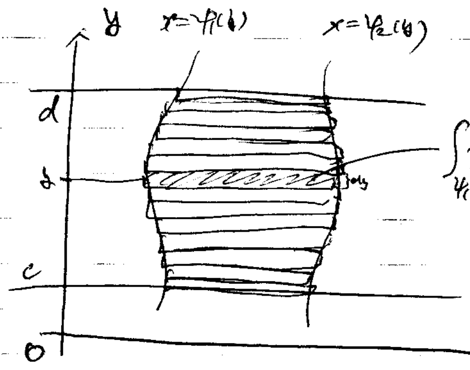
$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

これらの積分を累次積分という。



xを固定して、yについて積分。
xを動かして、全面積を足し合わせる。

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$



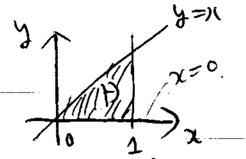
$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

yを固定して、xについて積分。
yを動かして、全てを足し合わせる。

No.

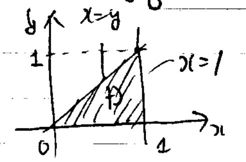
Date

例



$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x \}$

$\iint_D dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy = \int_0^1 dx \Big[y \Big]_0^x = \int_0^1 (x - 0)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ //



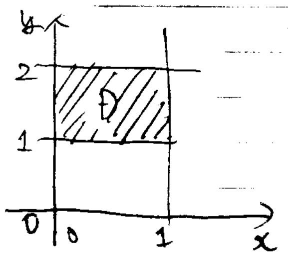
$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1 \}$

$\iint_D dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^1 dx = \int_0^1 dy \Big[x \Big]_y^1$

$= \int_0^1 (1 - y)\,dy = \Big[y - \frac{y^2}{2} \Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ //

(注) x, y に関してそれぞれ単純な領域であれば、
どちらで計算をしても同じ結果。

例

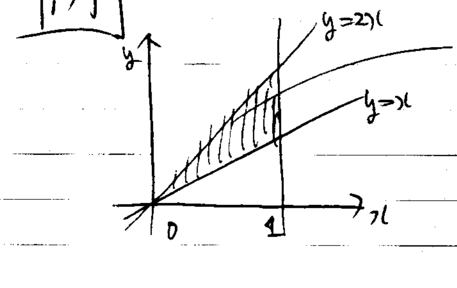


$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2 \}$

$\iint_D (x + y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_1^2 (x + y)\,dy = \int_0^1 dx \Big[xy + \frac{y^2}{2} \Big]_1^2$

$= \int_0^1 \Big(x + \frac{3}{2} \Big) dx = \Big[\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \Big]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ //

例

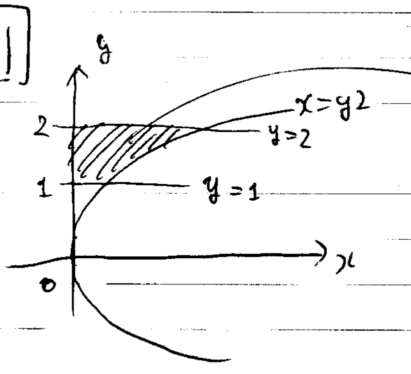


$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2x \}$

$\iint_D (x^2 + y^2 + 1)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x^2 + y^2 + 1)\,dy = \int_0^1 dx \Big[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \Big]_x^{2x}$

$= \int_0^1 \Big(\frac{10}{3} x^3 + x \Big) dx = \Big[\frac{10x^4}{12} + \frac{x^2}{2} \Big]_0^1 = \frac{4}{3}$ //

例



$D = \{ (x, y) \mid 1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq y^2 \}$

$\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_1^2 dy \int_0^{y^2} \frac{x}{y}\,dx = \int_1^2 dy \Big[\frac{x^2}{2y} \Big]_0^{y^2}$

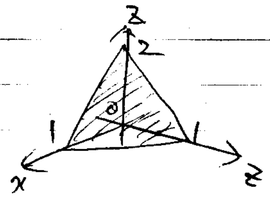
$= \int_1^2 \frac{y^3}{2}\,dy = \Big[\frac{y^4}{8} \Big]_1^2 = \frac{15}{8}$ //

No.

Date

3変数以上の積分でも同様に行う.

例



$$D=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 2-y\}$$

$$\iiint_D xyz\,dxdydz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{2-y}dz\ xyz$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\left[\frac{1}{2}xyz^2\right]_0^{2-y}$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}x(y^3-4y^2+4y)\,dy$$

$$=\int_0^1dx\left[\frac{1}{2}x\left(\frac{y^4}{4}-\frac{4y^3}{3}+\frac{4y^2}{2}\right)\right]_0^{1-x}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{4}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{12}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{24}+\frac{x^5}{15}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{24}\right)\right]_0^1=\frac{13}{240}$$

例

$$D=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x+1,\ 0\le z\le x+y\}$$

$$\iiint_D z\,dxdydz=\int_0^1dx\int_0^{x+1}dy\int_0^{x+y}z\,dz=\int_0^1dx\int_0^{x+1}dy\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{z=x+y}=\int_0^1dx\int_0^{x+1}\frac{(x+y)^2}{2}dy$$

$$=\int_0^1dx\left[\frac{(x+y)^3}{6}\right]_{y=0}^{y=x+1}=\int_0^1\left(\frac{(2x+1)^3}{6}-\frac{x^3}{6}\right)dx=\left[\frac{(2x+1)^4}{48}-\frac{x^4}{24}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{13}{8}$$

問

次の積分を計算せよ.

(1) $\iint_D(2x-y)\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\}$

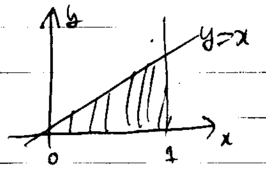
(2) $\iint_D x^2y\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2,\ y\ge 0\}$ ただし $a>0$

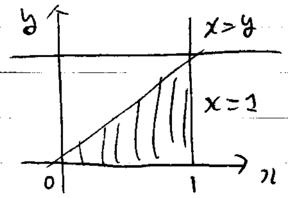
No.

Date

例　積分の順番を入れ換える.

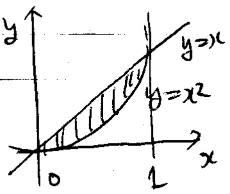
(1) $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$,　　$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$

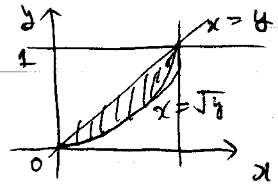




$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)\,dx.$$

(2) $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$　　$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ y\le x\le \sqrt{y}\}$

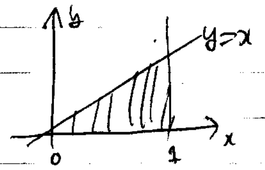


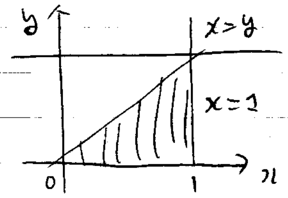


$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

例 積分の順番を入れ換える.

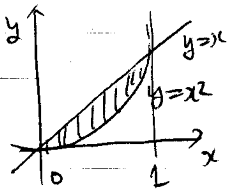
(1) $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$, $\quad D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$

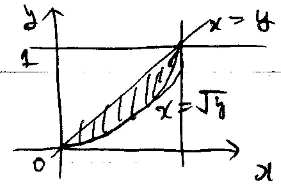




$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)\,dx.$$

(2) $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$ $\quad D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ y\le x\le \sqrt{y}\}$





$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

定理

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

$$\iint_D f(x)g(y)\,dx\,dy=\int_a^b f(x)\,dx\int_c^d g(y)\,dy=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\times\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

No.

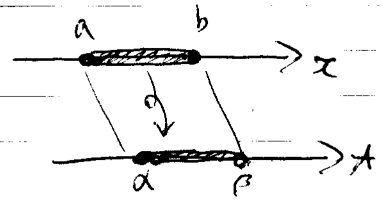
Date

§ 多重積分の変数変換

1変数では、

$x = x(t)$ と変数変換すると、

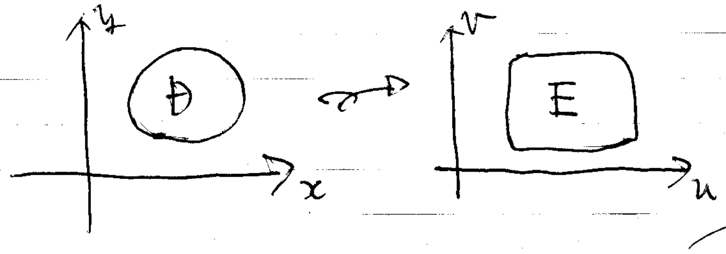
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx(t)}{dt}\,dt$$



$$\begin{cases} a = x(\alpha) \\ b = x(\beta) \end{cases}$$

2変数では、

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ と変数変換すると



絶対値

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

ただし $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$ とおく。

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ は ヤコビの行列式 または ヤコビアン (Jacobian) という

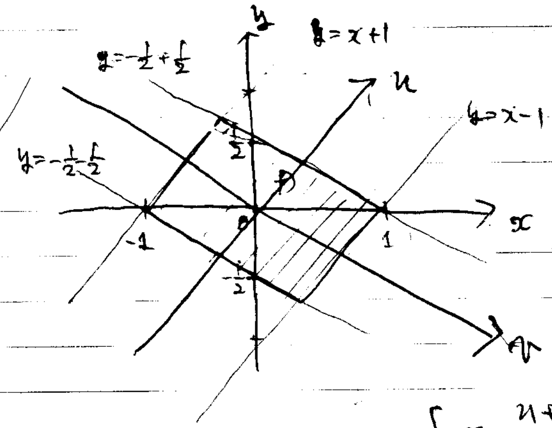
(注) 1変数の定積分では絶対値はつかないが、
多重積分では絶対値がつく。
これは面積要素に向き(符号)を考えていないためである。

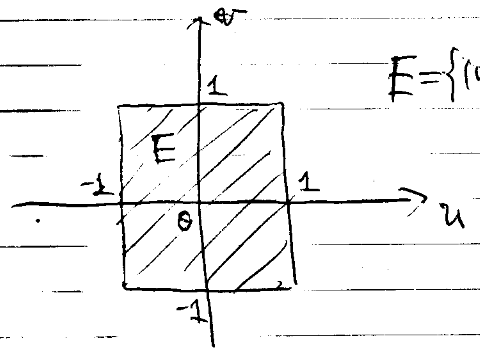
No.

Date

例 (斜交座標に変換する例)

$$\iint_D (x-y)^2 dx\,dy, \quad D=\{(x,y)\,|\,|x+2y|\le 1,\ |x-y|\le 1\}$$





$E=\{(u,v)\,|\,-1\le u\le 1,\ -1\le v\le 1\}$

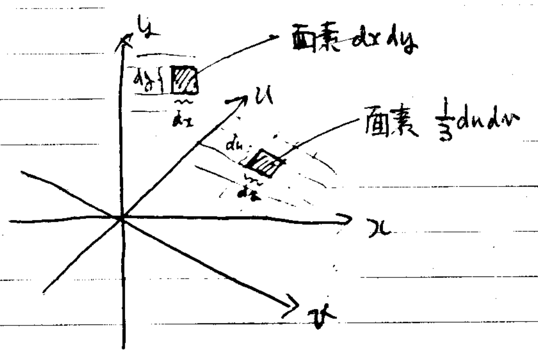
座標変換
$$\begin{cases} x=\dfrac{u+2v}{3} \\ y=\dfrac{u-v}{3} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} u=x+2y \\ v=x-y \end{cases}$$

ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{9}-\frac{2}{9} = -\frac{1}{3}$

$$\iint_D (x-y)^2 dx\,dy = \iint_E \left(\left(\frac{u+2v}{3}\right)-\left(\frac{u-v}{3}\right)\right)^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \iint_E v^2 \left|-\frac{1}{3}\right| du\,dv = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} v^2 dv = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} du \left[\frac{v^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}\right)du$$

$$= \frac{2}{9}\int_{-1}^{1} du = \frac{2}{9}\left[u\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{9}(1-(-1)) = \frac{4}{9}$$



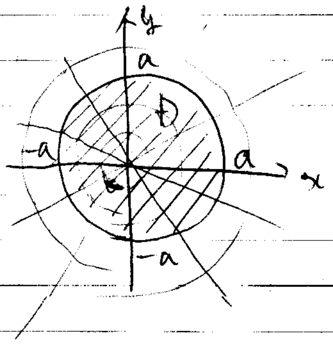
$dx\,dy = \frac{1}{3}du\,dv$

No.

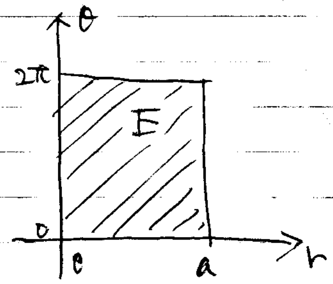
Date

$\boxed{例}$ (極座標に変換する例)

$$\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}, \quad a>0$$



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \longleftrightarrow$$

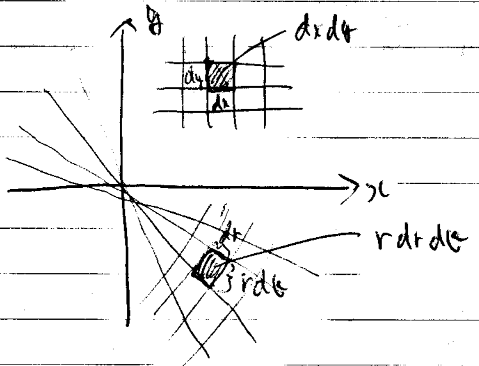


$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_E \left((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = \iint_E r^2 \times r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3\,dr = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \times \left(\int_0^a r^3\,dr\right) = \left(\left[\theta\right]_0^{2\pi}\right) \times \left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a\right) = 2\pi \times \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{2}\pi \,//$$



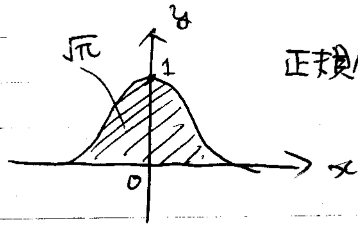
$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

No.

Date

例（定積分への応用例）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

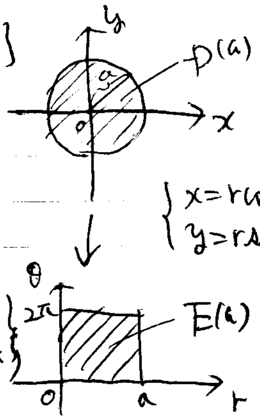


正規分布 $\begin{cases}\sigma=1\\ \mu=1\end{cases}$

まずは

$$\iint_{D(a)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$D(a)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$



$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

$$= \iint_{E(a)} e^{-(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)}\,r\,drd\theta$$

$E(a)=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\begin{array}{l}0\le r\le a,\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{array}\right\}$

$$= \iint_{E(a)} re^{-r^2}\,drd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a re^{-r^2}dr$$

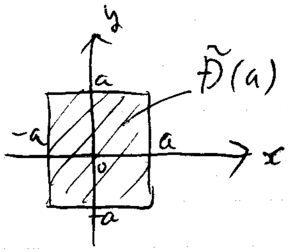
$$= \left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\times\left(\int_0^a re^{-r^2}dr\right) = \left(\left[\theta\right]_0^{2\pi}\right)\times\left(\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a\right)$$

$$= \pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

一方,

$$\iint_{\tilde{D}(a)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\tilde{D}(a)} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\int_{-a}^{a} e^{-y^2}dy$$

$$= \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)\times\left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2$$

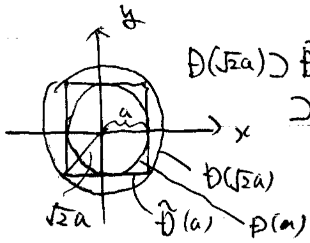


領域 $D(a)$, $\tilde{D}(a)$, $D(\sqrt{2}a)$ の積分を比較すると

$$\iint_{D(a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint_{\tilde{D}(a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint_{D(\sqrt{2}a)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$\pi\left(1-e^{-a^2}\right) \le \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 \le \pi\left(1-e^{-2a^2}\right)$$

$D(\sqrt{2}a)\supset\tilde{D}(a)\supset D(a)$



$a\to\infty$ とすると はさみうちの定理より

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi.$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

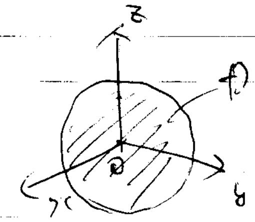
を得る.

No.

Date

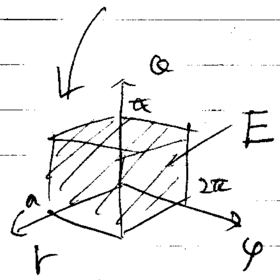
$\boxed{例}$ (3次元極座標へ変換する例)

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz, \quad D=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$$



変換 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

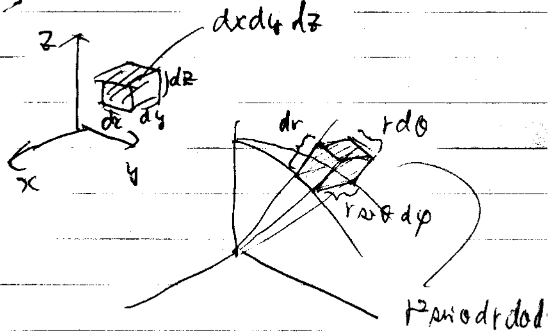
$$E=\{(r,\theta,\varphi) \mid 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$$



ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$

$$= \det\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = r^2\sin\theta.$$

$$\Rightarrow\ dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$



$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_E \left((r\sin\theta\cos\varphi)^2+(r\sin\theta\sin\varphi)^2+(r\cos\theta)^2\right) r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \iiint_E r^4\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta \int_0^a r^4\,dr$$

$$= \left(\left[\theta\right]_0^{2\pi}\right)\times\left(\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\right)\times\left(\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a\right) = (2\pi-0)(-\cos\pi+\cos 0)\left(\frac{a^5}{5}-0\right)$$

$$= \frac{4}{5}a^5\pi \ //$$

No.

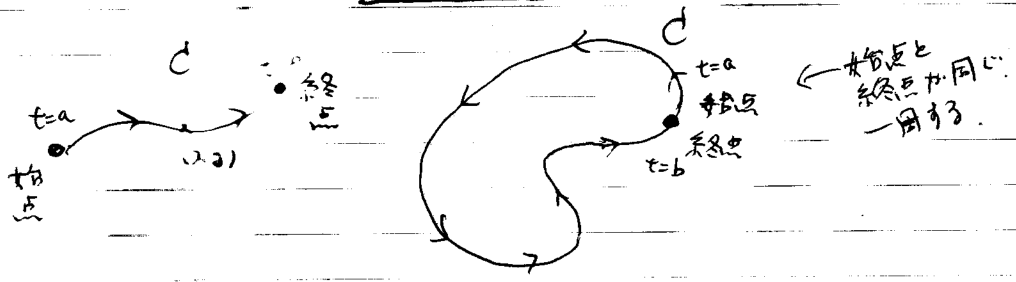
Date

§ 線積分

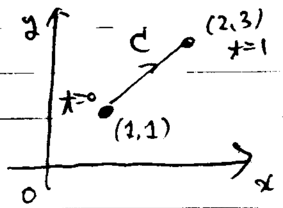
$\boxed{\text{定義}}$ （有向曲線）

$$C = \{(x,y) \mid x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t: a \to b\}$$

この向きつき曲線を<u>有向曲線</u>という



$\boxed{\text{例}}$ （有向曲線の具体例）

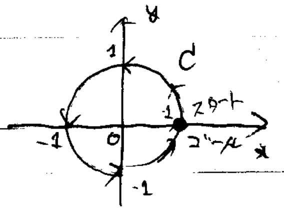


$$\begin{cases} x(t) = t+1 = \varphi(t) \\ y(t) = 2t+1 = \psi(t) \end{cases}$$

$t: 0 \to 1$

$$C = \{(x,y) \mid x = t+1,\ y = 2t+1,\ t: 0 \to 1\}$$

$\boxed{\text{例}}$ （有向曲線の具体例）



$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

$t: 0 \to 2\pi$

$$C = \{(x,y) \mid x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t;\ t: 0 \to 2\pi\}$$

No.

Date

定義 (線積分)

$$C = \{(x,y) \mid x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t: a \to b\}$$

$$\int_C f(x,y)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x,y)\frac{dx}{dt}\,dt = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

$$\int_C g(x,y)\,dy \overset{\text{def}}{=} \int_a^b g(x,y)\frac{dy}{dt}\,dt = \int_a^b g(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$$

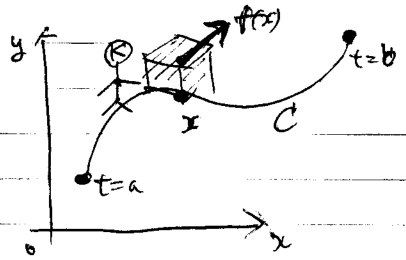
$$\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} \int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \overset{\text{def}}{=} \int_C f(x,y)\,dx + \int_C g(x,y)\,dy$$

ただし $\boldsymbol{x}=(x,y)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$ とする.

この積分を C に沿った $\boldsymbol{f}$ (または f) の線積分 (line integral) という.

曲線 C を積分路という.

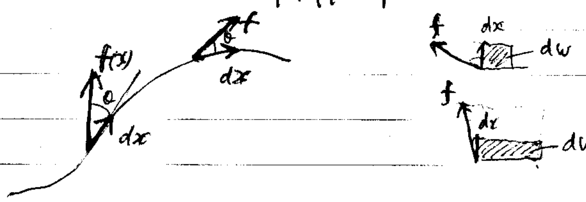
例 (線積分と仕事)



Kさんは荷を力 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ で曲線 C に沿って動かす.

微小距離 $d\boldsymbol{x}$ だけ動かしたときの仕事.

$$dW = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{f}||d\boldsymbol{x}|\cos\theta$$



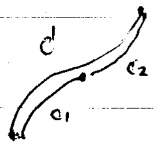
時間 $t=a$ から $t=b$ までで荷を動かしたときの仕事.

$$W = \int_C dW = \int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

定理

(1) $C = C_1 + C_2$

$$\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \int_{C_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} + \int_{C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x}$$



$C = C_1 + C_2$

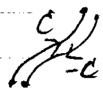
(2)

$$\int_{-C} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = -\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x}$$

$C = \{(x,y) \mid t: a \to b\}$

$-C = \{(x,y) \mid t: b \to a\}$

… C の逆向きの曲線

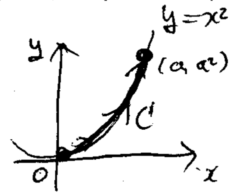


No.

Date

例 （線積分の計算例）

$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (x+y,\ x+y) = (f, g),\quad C = \{(x,y) \mid x = t,\ y = t^2,\ t: 0 \to a\} \\ \boldsymbol{x} = (x, y) \end{array} \right.$



$$\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_C (x+y)\,dx + (x+y)\,dy$$

$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2t \end{array} \right.$

ここで
$$\int_C (x+y)\,dx = \int_0^a (t+t^2)\frac{dx}{dt}\,dt = \int_0^a (t+t^2)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}$$

$$\int_C (x+y)\,dy = \int_0^a (t+t^2)\frac{dy}{dt}\,dt = \int_0^a (2t^2+3t^3)\,dt = \left[\frac{2t^3}{3} + \frac{t^4}{2}\right]_0^a = \frac{2a^3}{3} + \frac{a^4}{2}$$

より
$$\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \int_C (x+y)\,dx + \int_C (x+y)\,dy = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}\right) + \left(\frac{2a^3}{3} + \frac{a^4}{2}\right) = \frac{a^2}{2} + a^3 + \frac{a^4}{2} \quad //$$

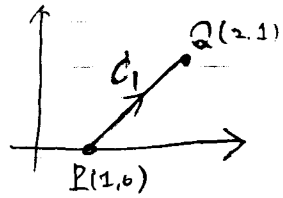
例 （線積分の計算例）

$\boldsymbol{x} = (x, y)$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (x-y,\ y) = (f(x,y),\ g(x,y))$

$$\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_C (x-y)\,dx + \int_C y\,dy$$

(1) $C = C_1$



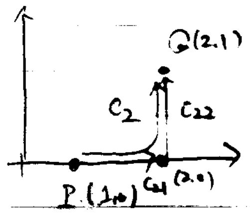
$\left\{ \begin{array}{l} x = t+1 \\ y = t \end{array} \right.$

$t: 0 \to 1$

$\left(\frac{dx}{dt} = 1,\ \frac{dy}{dt} = 1\right)$

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \int_{C_1} (x-y)\,dx + \int_{C_1} y\,dy$$
$$= \int_0^1 (t+1-t)\underbrace{\boxed{\frac{dx}{dt}}}_{1}dt + \int_0^1 t\,\underbrace{\boxed{\frac{dy}{dt}}}_{1}dt$$
$$= \int_0^1 (t+1)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad //$$

(2) $C = C_2$



$C_2 = C_{21} + C_{22}$

C_{21} $\left\{ \begin{array}{l} x = t+1 \\ y = 0 \end{array} \right.$

$t: 0 \to 1$

C_{22} $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = t \end{array} \right.$

$t: 0 \to 1$

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \int_{C_{21}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} + \int_{C_{22}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_{C_{21}} (x-y)\,dx + \int_{C_{21}} y\,dy + \int_{C_{22}} (x-y)\,dx + \int_{C_{22}} y\,dy$$
$$= \int_0^1 (t+1-0)\times 1\,dt + \int_0^1 0\times 0\,dt + \int_0^1 (2-t)\times 0\,dt + \int_0^1 t\cdot 1\,dt$$
$$= \int_0^1 (2t+1)\,dt = \left[t^2 + t\right]_0^1 = 2 \quad //$$

（注） P→Q への積分路が異なれば積分値が異なる.

No.

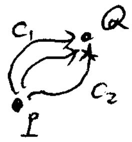
Date

定義

点Pから点Qへの経路によらず積分値が同じとき，その線積分を

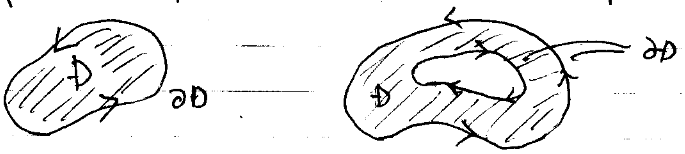
$$\int_P^Q \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x}$$

と書く．



定義

領域Dの境界を∂Dと表す．このときDの内部が進行方向の左手になるように向きを定める．

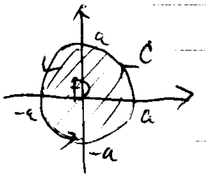


定理 （グリーンの定理）

領域D内で $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が連続．

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \int_{\partial D} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy$$

例



$$\int_C y\,dx - x\,dy = \iint_D (g_x - f_y)\,dx\,dy = \iint_D (-1-1)\,dx\,dy = -2\iint_D dx\,dy$$

$f = y,\ f_y = 1,\ g = -x,\ g_x = -1$

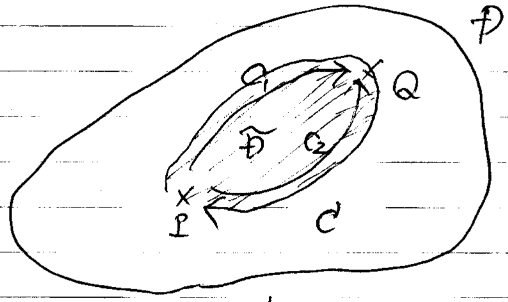
$$= -2\iint_{\tilde{D}} r\,dr\,d\theta = -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\,dr = -2\times 2\pi \times \frac{a^2}{2} = -2\pi a^2$$

例

$g_x = f_y$ をみたすとき．

$$\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \iint_D (g_x - f_y)\,dx\,dy = 0$$

領域 D 内で f, g が連続で $g_x = f_y$ をみたすとき.



$$C = C_1 - C_2$$

$$\partial D = C$$

$$C = C_1 - C_2$$

$$\int_C f(x)\cdot dx = \iint_D (g_x - f_y)\, dx\,dy = 0$$

$$\int_C f(x)\cdot dx = \int_{C_1 - C_2} f(x)\cdot dx = \int_{C_1} f(x)\cdot dx + \int_{-C_2} f(x)\cdot dx$$

$$= \int_{C_1} f(x)\cdot dx - \int_{C_2} f(x)\cdot dx$$

よって，$\displaystyle\int_{C_1} f(x)\cdot dx = \int_{C_2} f(x)\cdot dx$.

点Pから点Qへの線積分は経路によらず一定である.

$$W = \int_C f(x)\cdot dx = \int_P^Q f(x)\cdot dx$$

任意の積分路 C で仕事 W が一定であるとき，力 $f(x)$ を保存力という

このとき，ニュートンの運動方程式

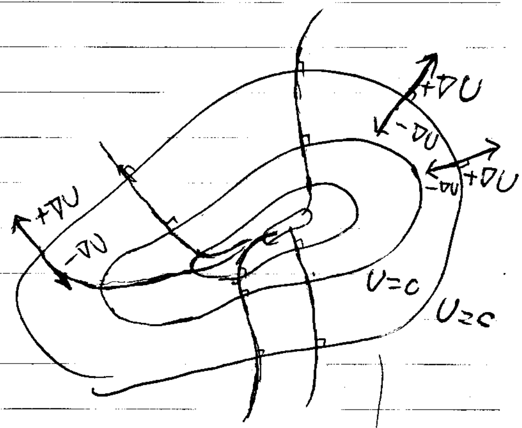
$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$$

を保存系と呼ぶ。

f が保存力であるとき，すなわち $g_x = f_y$ をみたすとき.

$$U(x,y) = -W(x,y) = -\int_{P(a,b)}^{Q(x,y)} f(x)\cdot dx$$

をポテンシャル(エネルギー)という。



ポテンシャルの等高線

($U=c=$定数としたときの曲線)

ここで

$$-dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy\right)$$

$$= dW = f(x)\cdot dx = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

より，

$$f(x,y) = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad g(x,y) = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\Rightarrow f = (f, g) = -(U_x, U_y) = -\nabla U = -\mathrm{grad}\, U$$

となる. 運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) = -\nabla U = -\mathrm{grad}\, U$$

となる。

微分方程式

§常微分方程式

$\boxed{\text{定義}}$ (常微分方程式)

関数 $y=y(x)$ とその導関数 $y', y'', \cdots$ の間に関係式

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

があるとき，この式を常微分方程式 (ordinary differential equation) という

または，単に微分方程式 (differential equation) という.

導関数のうち最高次のものが $y^{(n)}$ のとき，n階の微分方程式という.

微分方程式をみたす関数 $y(x)$ のことを解 (solution) という

(参) 偏導関数を含む場合は，偏微分方程式 (partial differential equation) という

$\boxed{\text{例}}$ (微分方程式の次数の具体例)

$y'' - y = x$ ← 2階の微分方程式

$2yy''' - (y')^2 = -4x$ ← 3階 〃

$3y' - y = \sin x$ ← 1階 〃

$\boxed{例}$ (微分方程式の解を考える.)

微分方程式 $y' = x$ を考える. この方程式の解を求める.

まず

(1) $\quad y = y(x) = \frac{1}{2}x^2$

とおく. これを方程式へ代入すると

$$左辺 = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x = 右辺$$

となり, (1) は方程式の解となる.

次に,

(2) $\quad y = y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$

とおく. ここで C は任意の定数とする. このとき方程式へ代入すると.

$$左辺 = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = x + 0 = x = 右辺$$

となり, これもまた解となる.

(!) 微分方程式の解には任意性が含まれる.

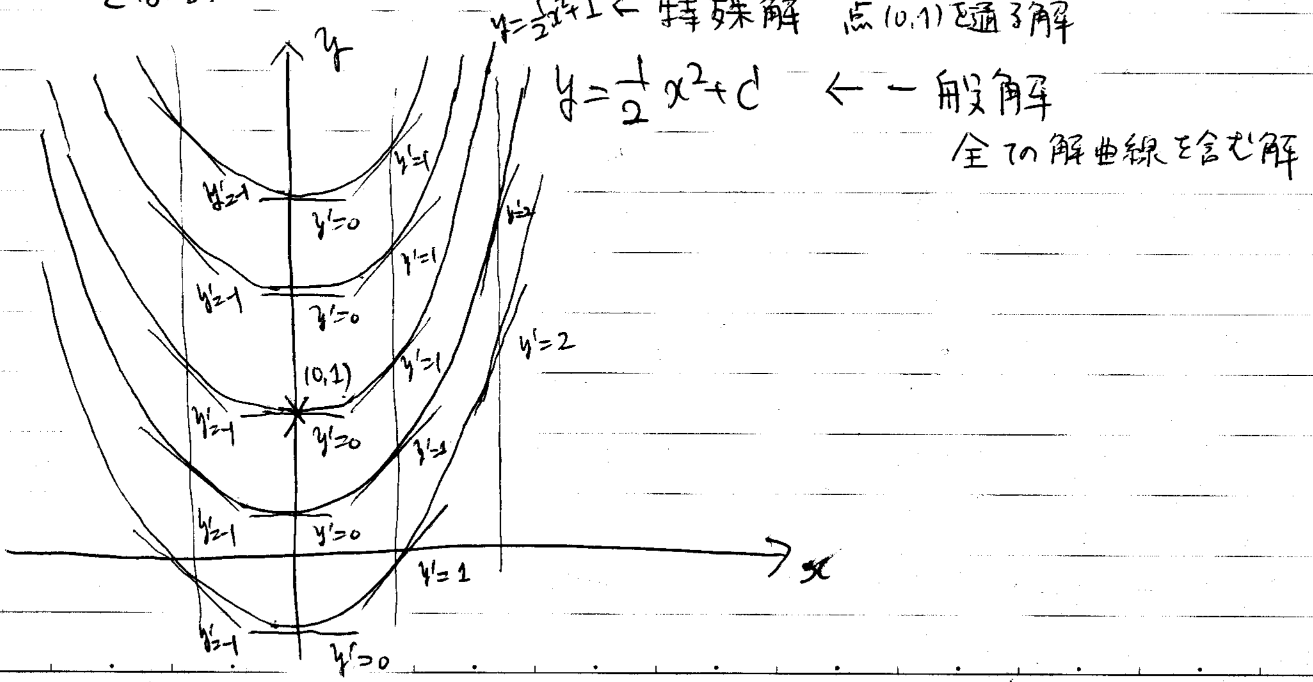
$x = 0$ のとき $y(0) = 1$ をみたす解を考える. (2) より. $x=0, y(0)=1$ を代入して.

$$1 = y(0) = \frac{1}{2} \times 0^2 + C \quad \rightarrow \quad C = 1$$

を得る. よって $(x, y) = (0, 1)$ を通る微分方程式の解は

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

となる.



定義 (初期条件, 一般解, 特殊解)

任意定数を含む解を<u>一般解</u> (<u>general solution</u>) という.

解に条件

$$x=x_0,\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ y''(x_0)=y_2,\ \cdots,\ y^{(n)}(x_0)=y_n$$

を課すとき, これを<u>初期条件</u> (<u>initial condition</u>) という.

$(x_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を<u>初期値</u> (<u>initial value</u>) という

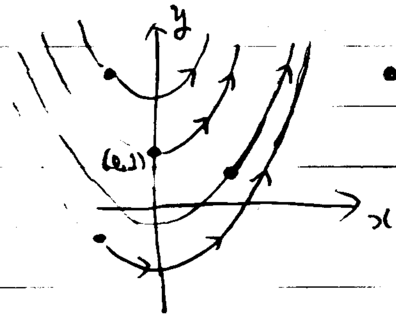
任意定数を含まない, ある特別な条件のもとでの解を

<u>特殊解</u> (<u>particular solution</u>) という.

例 (一般解, 特殊解の具体例)

微分方程式 $y'=x$ の一般解は $y=\frac{1}{2}x^2+C$ (C: 任意定数) である.

初期条件 $x=0, y(0)=1$ のもとでの特殊解は $y=\frac{1}{2}x^2+1$ である.



● 一 初期値.

§ 変数分離型常微分方程式

定義 (変数分離型)

常微分方程式が

$$y'=f(x)g(y)$$

の形をしているとき<u>変数分離型</u>であるという.

例 (変数分離型の具体例)

$y'=x$

$y'=\sin x$

$y'=y$

$y'=xy$

$y'=y(1-y)$

$\boxed{\text{例}}$ (変数分離型微分方程式の計算例)

(1) $y' = x$.

両辺を x で積分すると

$$\int y'\,dx = \int x\,dx$$

を得る. 両辺をそれぞれ計算すると

$$\text{左辺} = \int y'\,dx = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int dy = y + \tilde{C} \quad (\tilde{C}: \text{任意定数})$$

$$\text{右辺} = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{\tilde{C}} \quad (\tilde{\tilde{C}}: \text{任意定数})$$

となる. 任意定数をまとめて $C = \tilde{\tilde{C}} - \tilde{C}$ とおくと一般解として

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C: \text{任意定数})$$

を得る.

(2) $y' = \sin x$

両辺を x で積分すると

$$\int y'\,dx = \int \sin x\,dx$$

を得る. 両辺をそれぞれ計算すると

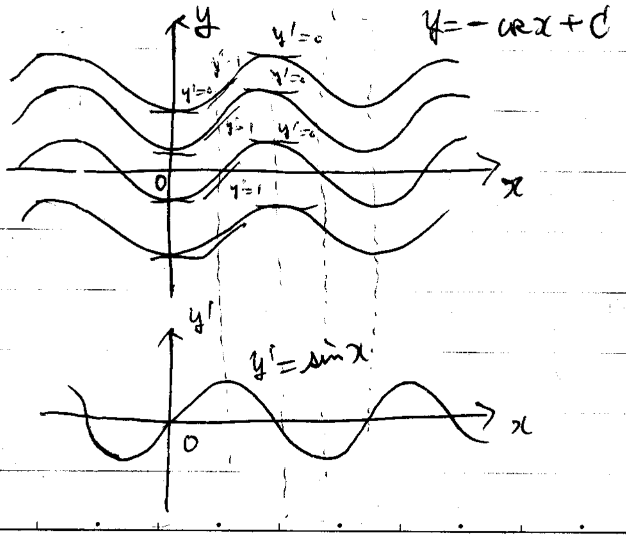
$$\text{左辺} = \int y'\,dx = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int dy = y + \tilde{C} \quad (\forall \tilde{C} \in \mathbb{R})$$

$$\text{右辺} = \int \sin x\,dx = -\cos x + \tilde{\tilde{C}} \quad (\forall \tilde{\tilde{C}} \in \mathbb{R})$$

となる. まとめると一般解として

$$y = -\cos x + C \quad (C: \text{任意定数})$$

を得る.



$\boxed{\text{例}}$

微分方程式 $y'=y$ を考える.
方程式を変形して

$$\frac{y'}{y}=1$$

とする. 両辺を x で積分すると,

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int dx.$$

となる. 両辺をそれぞれ計算すると.

$$\text{左辺} = \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y| + \tilde{C}$$

$$\text{右辺} = \int dx = x + \tilde{\tilde{C}}$$

となる. これらより

$$\log|y| + \tilde{C} = x + \tilde{\tilde{C}}$$

$$\to \log|y| = x + \tilde{\tilde{\tilde{C}}} \quad (\text{ただし } \tilde{\tilde{\tilde{C}}} = \tilde{\tilde{C}} - \tilde{C})$$

$$\to |y| = e^{x+\tilde{\tilde{\tilde{C}}}} = e^{\tilde{\tilde{\tilde{C}}}} \times e^{x}$$

$$\to y = \pm e^{\tilde{\tilde{\tilde{C}}}} e^{x}$$

となる. ここで $C = \pm e^{\tilde{\tilde{\tilde{C}}}}$ とおくと. C は $C \neq 0$ をみたす任意定数である.
よって解は

$$y = Ce^{x} \qquad (0 \neq {}^{\forall}C \in \mathbb{R})$$

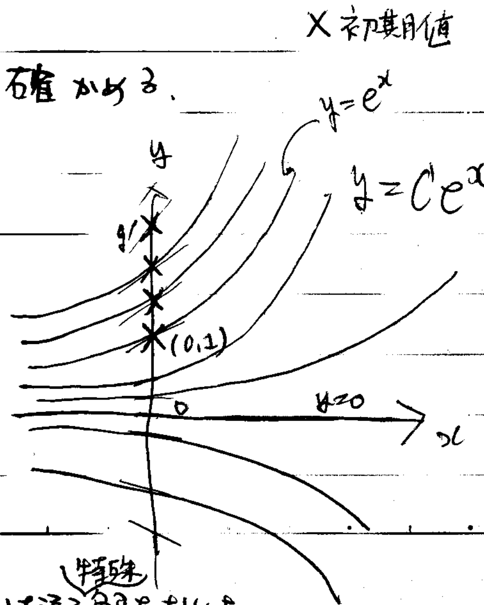
と表される.
更に $C=0$ のとき, すなわち $y=0$ が解となるか確かめる.
$y=0$ を $y'=y$ へ代入すると. これはみたされる
よって一般解として

$$y = Ce^{x} \qquad (C: \text{任意定数})$$

を得る. 初期条件 $x=0$, $y(0)=1$ をみたす解を考える.
代入すると $C=1$ を得る. よって特殊解として

$$y = e^{x}$$

を得る.



$\boxed{\text{問}}$ 点 $(x,y)=(0,1),(0,2),(0,3),\cdots,(0,n)$ を通る解を求めよ.

$\boxed{例}$

微分方程式 $y' = xy$ を考える.
方程式を変形して

$$\frac{y'}{y} = x$$

とする. 両辺を x で積分して

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int x\,dx$$

となる. 両辺をそれぞれ計算すると,

$$\text{左辺} = \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y| + \tilde{c}$$

$$\text{右辺} = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{\tilde{c}}$$

となる. これらをまとめて

$$\log|y| + \tilde{c} = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{\tilde{c}}$$

$$\to \log|y| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad (c = \tilde{\tilde{c}} - \tilde{c})$$

$$\to |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c} = e^{c} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\to y = \pm e^{c} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

となる. $\pm e^{c}$ を C とおきかえると,

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

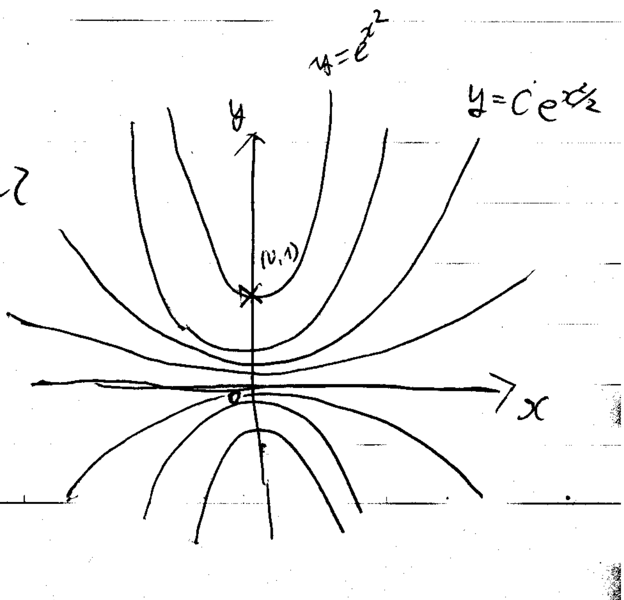
を得る. ただし $C \neq 0$ となる任意定数である.
$C=0$ のとき, すなわち $y=0$ も解となるので, 結局, 一般解として

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad (C: \text{任意定数})$$

を得る.
初期条件 $x=0, y(0)=1$ をみたす解を考える.
代入すると $C=1$ を得る. よって特殊解として

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

を得る.



$\boxed{問}$ 点 $(x,y) = (0,1), (0,2), (0,3), \cdots, (0,n)$ を通る特殊解を求めよ.

例

微分方程式 $y'=y(1-y)$ を考える.
方程式を変形して

$$\frac{y'}{y(1-y)}=1$$

とする両辺を積分して計算する.

$$\int\frac{y'}{y(1-y)}dx=\int dx$$

左辺 $=\displaystyle\int\frac{y'}{y(1-y)}dx=\int\frac{1}{y(1-y)}\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{dy}{y(1-y)}$

$\displaystyle =\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\right)dy=\log|y|-\log|1-y|+C$

$\displaystyle =\log\left|\frac{y}{1-y}\right|+C$

右辺 $=\displaystyle\int dx = x+C$

これらをまとめると

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right|=x+C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y}{1-y}\right|=e^{x+C}=e^{C}e^{x}$$

$\displaystyle\Rightarrow \frac{y}{1-y}=\pm e^{C}e^{x}=Ce^{x}$ (ここで $\pm e^{C}\to C$ とおきかえた. $C\neq 0$ とする)

逆数をとり $\displaystyle\Rightarrow \frac{1}{y}-1=\frac{1}{Ce^{x}}=C^{-1}e^{-x}=Ce^{-x}$ (ここで $C^{-1}\to C$ とおきかえた. $C\neq 0$ とする)

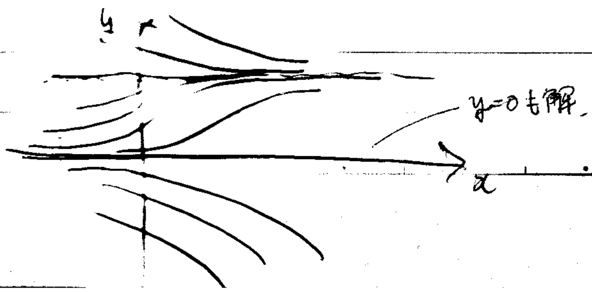
$$\Rightarrow \frac{1}{y}=1+Ce^{-x}$$

逆数をとり $\displaystyle\Rightarrow y=\frac{1}{1+Ce^{-x}}$ (ただし $C\neq 0$)

を得る. $C=0$ のとき すなわち $y=1$ のときも解となる よって一般解として

$$y=\frac{1}{1+Ce^{-x}}$$

を得る.



まとめ

変数分離型常微分方程式

$$y' = f(x)g(y)$$

は変形して x で積分すると

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dx}{f(x)} + C'$$

となる. この積分が計算できれば, 関数 $y(x)$ が定まる.

例

(変数分離型の応用例)

微分方程式 $y' = x + y$ を考える. これは変数分離型ではない.

これを変形して変数分離型にする. まず

$$z = z(x) = x + y(x)$$

とおく. これを両辺 x で微分すると

$$z' = 1 + y'$$

となる. よって $y' = z' - 1$ と表せる. $y = z - x$ とともに方程式に代入すると.

$$z' - 1 = z$$

となる. これを変形する.

$$\Rightarrow z' = z + 1$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{z+1} = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{z'}{z+1} dx = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z+1} = \int dx$$

$$\Rightarrow \log|z+1| = x + C$$

$$\Rightarrow z + 1 = ce^x \quad (c \neq 0)$$

$$\Rightarrow z = -1 + ce^x$$

これで z についての解を得る. y についてもどすと

$$x + y = -1 + ce^x$$

$$\Rightarrow y = -1 - x + ce^x \quad (\forall c \neq 0)$$

を得る. $c = 0$ のとき, すなわち $y = -1 - x$ も解となるので一般解として

$$y = -1 - x + ce^x \quad (c: \text{任意定数})$$

を得る.

$\boxed{\text{問}2}$ (変数分離型)

次の微分方程式の一般解を求めよ.

また $\underbrace{x=\frac{1}{2},\ y\left(\frac{1}{2}\right)=1}_{\text{初期条件}}$ をみたす特殊解を求めよ. さらには解を図示せよ.

(1) $y' = x^2 y$

(2) $xy' + y = 2xy$

(3) $y' = \dfrac{y}{x(x+1)}$

(4) $y' = \dfrac{1+y}{1-x}$

(5) $y' = x + 2y - 1$ (ヒント) $z = z(x) = x + 2y(x) - 1$

(6) $y' = e^{x+y} - 1$ (ヒント) $z = z(x) = x + y(x)$

§ 線形常微分方程式

$\boxed{定義}$

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = q(x)$$

n 階線形常微分方程式 (n-th order linear ODE)

$q(x) = 0$ のとき 同次形 (homogeneous)
$q(x) \neq 0$ のとき 非同次形 (inhomogeneous)

係数 $p_{n-1}(x), \cdots, p_0(x)$ が全て定数係数 $p_{n-1}(x) = a_{n-1}, \cdots, p_0(x) = a_0$ のとき

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = q(x)$$

を定数係数線形常微分方程式という.

$\boxed{定理}$

同次線形 ODE が解 $u(x), v(x)$ をもつとき
$\alpha u(x) + \beta v(x)$ $(\forall\alpha, \forall\beta \in \mathbb{R})$ もまた解となる.

(証明)

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1 \frac{d}{dx} + p_0\right)}_{= L \ \leftarrow \text{微分演算子}} y = 0$$

$$L y = 0.$$

$u(x), v(x)$ を解とすると

$$L u = 0, \quad L v = 0$$

が成り立つ. このとき

∵ Lは線形演算子

$$L(\alpha u + \beta v) = L(\alpha u) + L(\beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v) = 0 + 0 = 0$$

より, $\alpha u + \beta v$ もまた解である. □

$\boxed{注意}$ 同次線形 ODE の解の集合はベクトル空間となる.

§ 定数係数線形常微分方程式

同次定数係数 ODE

$$(☆)\quad y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$$

特性多項式

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

$\varphi(\lambda)$ の根を $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ とする.
このとき

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \cdots,\ e^{\lambda_n x}$$

は (☆) の解となる. これを基本解という.
(☆) の一般解は

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+c_ne^{\lambda_n x}$$
$$(c_1,c_2,\cdots,c_n:\text{任意定数})$$

と表される.

! n 階 ODE の一般解は n 個の任意定数をもつ.

$\boxed{\text{注意}}$

$\varphi(\lambda)$ が重根をもつときは基本解を変更する.
λ を $\varphi(\lambda)$ の m 重根とするとき, 対応する m 個の基本解を

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \cdots,\ x^{m-1}e^{\lambda x}$$

と変更する.

$\boxed{\text{注意}}$

$\varphi(\lambda)$ の根 λ が複素数のときは $e^{\lambda x}$ は複素関数となる.
このとき任意定数 c もまた複素数と考えて, 一般解全体で実関数となるように調整する.

$\boxed{\text{注意}}$

n 個の基本解は 1次独立な関数である.

$\boxed{\text{例}}$

(☆) $y'' + 2by' + cy = 0$.

解として $e^{\lambda x}$ を仮定する. (☆) へ代入すると

$$(e^{\lambda x})'' + 2b(e^{\lambda x})' + c(e^{\lambda x}) = 0$$
$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 2b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0$$
$$(\lambda^2 + 2b\lambda + c)\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0$$

(☆☆) $\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$. ← 特性多項式

となる. (☆☆) の根は

$$\alpha = -b + \sqrt{b^2 - c} = -b + \sqrt{d},$$
$$\beta = -b - \sqrt{b^2 - c} = -b - \sqrt{d}$$

である. よって $\alpha \neq \beta$ のときの 基本解 は

$$e^{\alpha x},\ e^{\beta x}$$

であり, $\alpha = \beta$ のときの基本解は

$$e^{\alpha x},\ x e^{\alpha x}$$

である. よって 一般解は

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} = (c_1 + c_2 x) e^{\alpha x} \quad (\alpha = \beta)$$

$$(c_1, c_2 : \text{任意定数})$$

となる.

$xe^{\alpha x}$ が解であるか確認する.

(☆) へ代入すると.

$$(xe^{\alpha x})'' + 2b(xe^{\alpha x})' + c(e^{\alpha x}) = 0$$

ここで

$$(xe^{\alpha x})' = 1 e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x} = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}$$

$$(xe^{\alpha x})'' = (e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x} = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}$$

より

$$(2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}) + 2b(e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}) + cxe^{\alpha x} = 0$$

$$\{(2\alpha + 2b) + (\alpha^2 + 2b\alpha + c)x\}e^{\alpha x} = 0$$

となる.

$$\left.\begin{array}{ll} (*) & 2\alpha + 2b = 0 \\ (**) & \alpha^2 + 2b\alpha + c = 0 \end{array}\right\}$$

α は $\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ の根 なので (**) は成立.
$\alpha = -b$ であるから (*) も成立.

以上より $xe^{\alpha x}$ は解となる.

(ii) $d = b^2 - c < 0$ のとき.

α, β は複素数である.

$$\alpha = -b + \sqrt{d} = -b + \sqrt{-d}\sqrt{-1} = -b + \omega i$$
$$\beta = -b - \sqrt{d} = -b - \sqrt{-d}\sqrt{-1} = -b - \omega i$$
$$\omega = \sqrt{-d} = \sqrt{c - b^2}$$
$$\sqrt{-1} = i$$

とおく.

一般解は

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} = c_1 e^{(-b+\omega i)x} + c_2 e^{(-b-\omega i)x}$$
$$= e^{-bx}\left(c_1 e^{\omega x i} + c_2 e^{-\omega x i}\right)$$

となる。ここでオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

より

$$y = e^{-bx}\left\{c_1(\cos\omega x + i\sin\omega x) + c_2(\cos\omega x - i\sin\omega x)\right\}$$
$$= e^{-bx}\left\{(c_1+c_2)\cos\omega x + i(c_1-c_2)\sin\omega x\right\}$$

となる。任意定数を

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$　　$c_1 + c_2 \to c_1 \in \mathbb{R}$

$i(c_1 - c_2) \to c_2 \in \mathbb{R}$

ととりかえる。よって一般解は

$$y = e^{-bx}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x) \quad (c_1, c_2 : 任意定数)$$

と得られる。

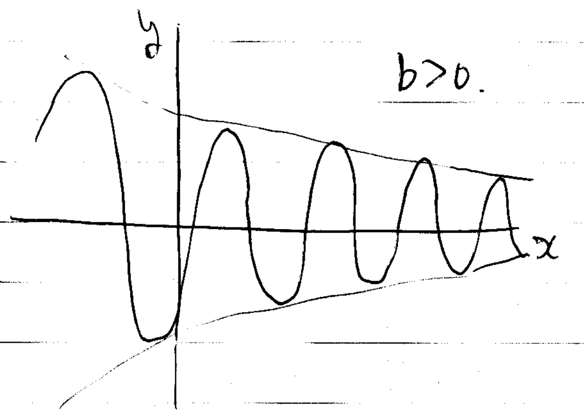
また、この解は

$$y = Ae^{-bx}\cos(\omega x - \varphi)$$
$$(A, \varphi : 任意定数)$$

とも表される。

注 任意定数の個数は変らない。

問 これを示せ.



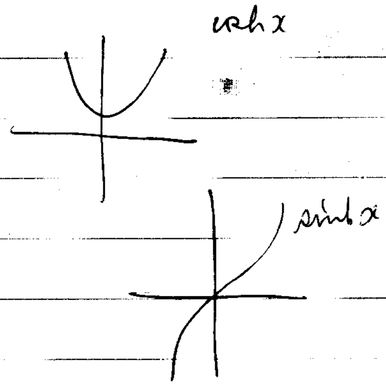
(iii) $d = b^2 - c > 0$ のとき

α, β は実数である。

$$\alpha = -b + \sqrt{d} = -b + \omega,$$
$$\beta = -b - \sqrt{d} = -b - \omega,$$
$$\omega = \sqrt{b^2 - c} = \sqrt{d}$$

とおく。

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} = c_1 e^{(-b+\omega)x} + c_2 e^{(-b-\omega)x}$$
$$= e^{-bx}(c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x})$$



ここで

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

より

$$e^x = \cosh x + \sinh x,$$
$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

を用いると、

$$y = e^{-bx}\{c_1(\cosh\omega x + \sinh\omega x) + c_2(\cosh\omega x - \sinh\omega x)\}$$
$$= e^{-bx}\{(c_1 + c_2)\cosh\omega x + (c_1 - c_2)\sinh\omega x\}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \to c_1 \\ c_1 - c_2 \to c_2 \end{cases}$$

よって

$$y = e^{-bx}(c_1 \cosh\omega x + c_2 \sinh\omega x)$$

と表される。

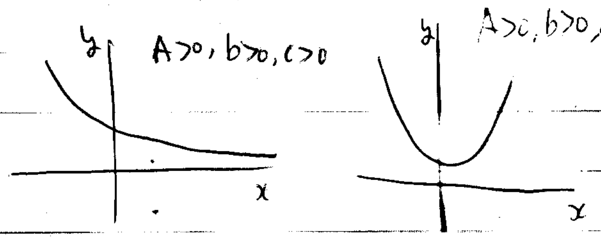
また、この解はパラメータによって

$$y = A e^{-bx} \cosh(\omega x + \varphi)$$

または　　　　(A, φ : 任意定数)

$$y = A e^{-bx} \sinh(\omega x + \varphi)$$

とも表される。

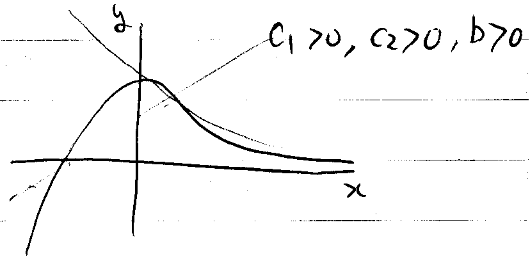


問 これを示せ。

(iii) $d = b^2 - c = 0$ のとき

$\alpha = \beta = -b$ となる.

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\alpha x} = (c_1 + c_2 x)e^{-bx}.$$



以上 (i), (ii), (iii) より一般解は.

$b^2 < c$ のとき
$$y = e^{-bx}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x),$$
$$\omega = \sqrt{c-b^2}$$

$b^2 > c$ のとき
$$y = e^{-bx}(c_1 \cosh \omega x + c_2 \sinh \omega x),$$
$$\omega = \sqrt{b^2-c}$$

$b^2 = c$ のとき
$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-bx}$$

(c_1, c_2 : 任意定数)

と得られる.

$\boxed{\text{問}}$

b, c, c_1, c_2 の値をいろいろ変化させたときの一般解の概形をかけ.

$\boxed{\text{問}}$

初期条件 $(y(0), y'(0)) = (y_0, y_1)$ を変化させたときの特殊解の概形を書け.

例 $(y(0), y'(0)) = (1,1), (1,0), (1,-1)$

$\boxed{\text{問}}$

関数 y, y' の x を消去して (y, y') の軌道図を書け.

まとめ

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (a_j \in \mathbb{R})$$

特性多項式：$\varphi(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0.$

$\varphi(t) = 0$ の根：$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \quad , \lambda_n$ ← n個

一般解：

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x)$$
$$(\forall c_1, \forall c_2, \cdots, \forall c_n \in \mathbb{R})$$

基本解：$u_1(x), u_2(x), \quad \cdots \quad , u_n(x).$ ← n個

λ_j：実数根 $\quad u_j(x) = e^{\lambda_j x}.$

λ_j：m重根 $\quad (\lambda_j = \lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_{j+m-1})$

$$\left.\begin{aligned} u_j(x) &= e^{\lambda_j x} \\ u_{j+1}(x) &= x e^{\lambda_j x} \\ u_{j+2}(x) &= x^2 e^{\lambda_j x} \\ &\vdots \\ u_{j+m-1}(x) &= x^{m-1} e^{\lambda_j x} \end{aligned}\right\} \text{m個}$$

λ_j：複素根 $\quad (\lambda_j = \overline{\lambda_{j+1}})$

$$\left.\begin{aligned} u_j(x) &= e^{\alpha x} \cos \beta x \\ u_{j+1}(x) &= e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}\right\} \text{2個}$$

ただし $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}) = \mathrm{Re}(\lambda) \\ \beta = \frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda}) = \mathrm{Im}(\lambda) \end{cases}$

λが複素根のとき $\bar{\lambda}$ もまた根と

$0 = \varphi(\lambda) \Rightarrow \bar{0} = \overline{\varphi(\lambda)} \Rightarrow 0 = \overline{\Sigma}$

$\Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{\lambda}_j^{\,j} \Rightarrow 0 = \varphi($

$\boxed{\text{例}}$

$(☆)\quad y'' + 3y' + 4y = 0$

$y = e^{\lambda x}$ と仮定する．(☆)へ代入すると

$$(e^{\lambda x})'' + 3(e^{\lambda x})' + 4(e^{\lambda x}) = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 3\lambda e^{\lambda x} + 4 e^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 4) e^{\lambda x} = 0 \qquad (e^{\lambda x} > 0 \text{ より})$$

$$(*)\quad \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

を得る．$(*)$より

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \qquad (i = \sqrt{-1})$$

となる．ここで

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i = \alpha - \beta i$$

とおく．このとき基本解は

$$u_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$

$$u_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

となる．基本解の1次結合はまた $\overbrace{\ }^{\text{1次独立な}}$ 基本解である．

$$\tilde{u}_1(x) = \frac{1}{2}(u_1(x) + u_2(x))$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\alpha x} e^{i\beta x} + e^{\alpha x} e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2} e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})$$

$$= \frac{1}{2} e^{\alpha x}(\cos\beta x + \cancel{i\sin\beta x} + \cos\beta x - \cancel{i\sin\beta x})$$

$$= e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\tilde{u}_2(x) = \frac{1}{2i}(u_1(x) - u_2(x))$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{\alpha x} e^{i\beta x} - e^{\alpha x} e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2i} e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})$$

$$= \frac{1}{2i} e^{\alpha x}(\cancel{\cos\beta x} + i\sin\beta x - \cancel{\cos\beta x} + i\sin\beta x)$$

$$= e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (u_1, u_2)\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} \end{bmatrix}}_{\text{正則}}$$

$$= (u_1, u_2)P$$

$$(u_1, u_2) \xrightarrow[P]{} (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$$

基底の変換

とおくと $\tilde{u}_1(x), \tilde{u}_2(x)$ はまた基本解である．

よって一般解は

$$y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$$
$$= C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$
$$= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

$$\therefore\ y(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left\{C_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right\}$$
$$(\forall C_1, \forall C_2 \in R)$$

を得る.

初期条件 $(y(0), y'(0)) = (1, 1)$ をみたす特殊解を求める.

まず $y'(x)$ を求める. 一般解より計算すると

$$\therefore\ y'(x) = e^{\alpha x}\{(\alpha C_1 + \beta C_2)\cos\beta x + (\alpha C_2 - \beta C_1)\sin\beta x\}$$

を得る. 初期条件を代入すると,

$$\begin{cases} 1 = y(0) = e^0\{C_1\cos(0) + C_2\sin(0)\} = C_1 \\ 1 = y'(0) = e^0\{(\alpha C_1 + \beta C_2)\cos 0 + (\alpha C_2 - \beta C_1)\sin(0)\} \\ \qquad = \alpha C_1 + \beta C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ \alpha C_1 + \beta C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \dfrac{1-\alpha C_2}{\beta} = \dfrac{5}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

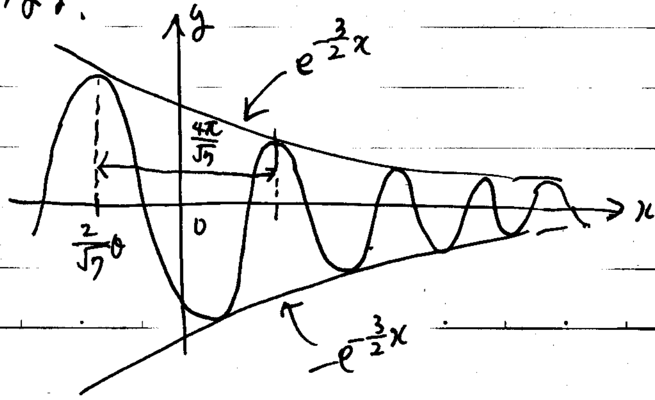
となるので特殊解は

$$y(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \frac{5}{\sqrt{7}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right\}$$

となる. またこの解は

$$y(x) = \sqrt{\frac{31}{7}}\, e^{-\frac{3}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x - \theta\right),\quad \theta = \arctan\left(\frac{5}{\sqrt{7}}\right)$$

と表せるのでグラフは図のようになる.



$\boxed{\text{例}}$

$(\star)\ y'' + 4y' + 4y = 0.$

$y = e^{\lambda x}$ と仮定する. $(\star)$ へ代入すると.

$$(e^{\lambda x})'' + 4(e^{\lambda x})' + 4(e^{\lambda x}) = 0$$
$$(\lambda^2 + 4\lambda + 4)e^{\lambda x} = 0$$
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda + 2)^2 = 0$$
$$\therefore\ \lambda = -2\ (2\text{重根})$$

を得る. よって基本解は.

$$u_1(x) = e^{\lambda x} = e^{-2x}, \quad u_2(x) = xe^{\lambda x} = xe^{-2x}$$

である. よって一般解は.

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = (c_1 + xc_2)e^{\lambda x}$$
$$\therefore\ y(x) = (c_1 + xc_2)e^{-2x} \quad (\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R})$$

を得る.

初期条件 $(y(0), y'(0)) = (1, 1)$ をみたす特殊解を求める.

まず一般解より $y'(x)$ を求める. 計算すると

$$y'(x) = \{(c_2 + \lambda c_1) + \lambda c_2 x\}e^{\lambda x}$$

となる. 条件より

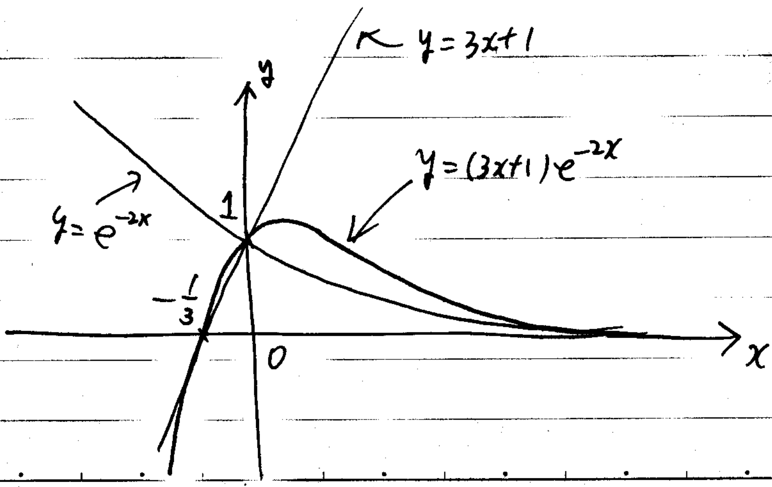
$$\begin{cases} 1 = y(0) = \{c_1 + 0\}e^0 = c_1 \\ 1 = y'(0) = \{(c_2 + \lambda c_1) + 0\}e^0 = c_2 + \lambda c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ c_1 = 1, \quad c_2 = 1 - \lambda = 3$$

となるので特殊解は

$$y(x) = (3x+1)e^{-2x}$$

となる.



例1

(☆) $y'' + y' - 6y = 0$

解として $y = e^{\lambda x}$ と仮定する. 代入すると

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$
$$(\lambda+3)(\lambda-2) = 0$$
$$\therefore\ \lambda = \lambda_1 = -3,\ \lambda = \lambda_2 = 2$$

を得る. よって一般解は

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R})$$

$$\therefore\ y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

となる.

初期条件 $(y(0), y'(0)) = (1, 1)$ をみたす特殊解を求める.

一般解より

$$y'(x) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 x}$$

となる. 条件より

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y(0) \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = y'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y(0) & 1 \\ y'(0) & \lambda_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_2 y(0) - y'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2\times 1 - 1}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y(0) \\ \lambda_1 & y'(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{y'(0) - \lambda_1 y(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1-(-3)\times 1}{2-(-3)} = \frac{4}{5}$$

となるので特殊解は

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{-3x} + \frac{4}{5} e^{2x}$$

となる.