

解析学 II (担当: 近藤) #11 2005 年 1 月 20 日

[I] 領域 $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq 0, z \geq 0\}$ における多重積分

$I = \iiint_D xyz \, dx dy dz$ の値を求める．このとき次の問に答えよ．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ により座標変換 $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ を行なう．このとき領域 D は領域 \tilde{D} に写されたとする．領域 \tilde{D} を求めよ．

(3) ヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を計算して求めよ．

(4) 多重積分 I を求めよ．

[II] 球 $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2\}$ と円柱 $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ の共通部分 $S \cap C$ を球 S から取り除いた領域 $E = S - S \cap C$ の体積 V を求める．次の問に答えよ．

(1) 領域 E の $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の部分のみを図示せよ．

(2) 領域 E を xy 平面で切ったときの断面の領域 D を求めよ．

(3) 領域 E の体積 V を求めよ．