解析学II（担当：近藤）　#10 2005年1月13日

[I]　次の積分の領域を図示し，積分の順序を変更せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{4} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$

[II]　次の多重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xe^{x+y}\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D x^2\sin(xy)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D x\cos(x+y)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le 1\}$

(4) $\displaystyle\iint_D r\,drd\theta,\quad D=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le a\sin\theta,\ 0\le \theta\le \pi/2\}$

[III]　領域 $D=\{(x,y)\,|\,|2x+3y|\le 1, |2x-3y|\le 1\}$ における多重積分 $\displaystyle I=\iint_D (2x+3y)^2 e^{4x-3y}\,dxdy$ の値を求める．このとき次の問に答えよ．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) 領域 D が領域 $E=\{(u,v)\,|\,|u|\le 1,\ |v|\le 1\}$ に写されるように座標変換 $(x,y)\to(u,v)$ を定めよ．

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(4) 多重積分 I を求めよ．

[IV]　領域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ における多重積分 $\displaystyle I=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求める．このとき次の問に答えよ．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により座標変換 $(x,y)\to(r,\theta)$ を行なう．このとき領域 D は領域 E に写されたとする．領域 E を求め，さらに図示せよ．

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(4) 多重積分 I を求めよ．