解析学I（担当：近藤）　#6 2004年5月27日

[I] 等比数列 $a_n = r^n$ $(0 < r < 1)$ の極限が 0 になることを証明せよ.

[II] 級数 (1)–(2) について次の問 (i)–(iii) にそれぞれ答えよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

(i) 級数の第 n 部分和 S_n を求めよ.

(ii) 数列 $\{S_n\}$ の概形を書け.

(iii) 級数の値を求めよ.

[III] 次の級数の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n + 3^n + 5^n}{6^n}$

[IV] 次の級数は収束するか発散するか述べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1}$　(ヒント：(1) と比較する)

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$

(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$