

解析学I (担当: 近藤) #12 2004年7月8日

[I] 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_0^1 \sqrt{(3x+1)^3} dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \quad (3) \int_1^e \frac{(\log x)^4}{x} dx$$

$$(4) \int_0^2 \frac{x^3}{(x+1)^2} dx \quad (5) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

[II] 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) の内部の面積を定積分を用いて求めよ.

[III] $-1 \leq x \leq 1$ における曲線 $y = \cosh x$ の長さを求めよ.

[IV] 定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

について次の問に答えよ.

(1) $n = 0, 1, 2, 3$ のときの I_n の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のときの I_n の漸化式を求めよ.

$$(3) I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} & (n: \text{偶数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n: \text{奇数}) \end{cases} \quad \text{となることを示せ.}$$