解析学I

近藤弘一

最終更新日：平成16年9月15日

目次

1 数

§ 1.1 集合

定義 1.1 **（集合）** ある一定範囲にある対象物の集まりを 1 つの全体として考えるとき，これを**集合（set）**という．その範囲内の個々の対象物を**元**または**要素（element）**という．x が集合 X の元であることを x は X に**属する（belong）**，または X は x を**含む（包含する）（contain）**といい，$x \in X$ と表記する．その否定を $x \notin X$ と表記する．

□

例 1.2 **（集合の具体例）**

$$\text{自然数全体の集合：}\quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}, \tag{1.1.1}$$

$$\text{整数全体の集合：}\quad \mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}, \tag{1.1.2}$$

$$\text{有理数全体の集合：}\quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{1.1.3}$$

$$\text{実数全体の集合：}\quad \mathbb{R} = \{ a.b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots \mid a \in \mathbb{Z},\, b_1, b_2, \cdots \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\} \}, \tag{1.1.4}$$

$$\text{複素数全体の集合：}\quad \mathbb{C} = \left\{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}. \tag{1.1.5}$$

□

定義 1.3 **（集合の包含関係）**

- $X = \emptyset$ ：元を 1 つも含まない集合を**空集合（empty set）**という．
- $X = Y$ ：X と Y に含まれる元が全て等しいとき．
- $X \supset Y$ ：Y に含まれる全ての元が X に含まれるとき，Y は X の**部分集合（subset）**という．

□

例 1.4 **（包含関係の具体例）**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \tag{1.1.6}$$

□

例 1.5 **（包含関係の具体例）**

$$X = \{(x, y) \mid x + y \leq 1\}, \qquad Y = \{(x, y) \mid x + y \leq 0\} \tag{1.1.7}$$

のとき

$$X \supset Y \tag{1.1.8}$$

が成立する．

□

§ 1.2 数

数にはいろいろな種類がある．それらのうち普段よく用いるものを列挙する：

- **自然数（natural number）**：$1,2,3,\cdots$ 自然数全体の集合 $=\mathbb{N}$
- **整数（integer）**：$\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ 整数全体の集合 $=\mathbb{Z}$
- **有理数（rational number）**：$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{5},-\frac{2}{3},\cdots$ 分数で表される数 有理数全体の集合 $=\mathbb{Q}$
- **無理数（irrational number）**：$\sqrt{2},-\sqrt{3},\pi,\cdots$ 分数で表せない実数
- **実数（real number）**：有理数と無理数をあわせた数 実数全体の集合 $=\mathbb{R}$
- **複素数（complex number）**：$\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1\}$ 複素数全体の集合 $=\mathbb{C}$

上記の数の集合には包含関係があり自然な拡張となっている：

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}. \tag{1.2.1}$$

問 1.6 **（実数の小数表現）** 有理数は有限小数または循環小数となる．無理数は循環しない無限小数となる．これを示せ． □

§ 1.3 実数と数直線

定義 1.7 **（実数）　実数（real number）**は**数直線（number line）**と一対一対応する数のことである．

□

注意 1.8 **（実数の性質）**

- 実数（数直線）は切目なく**連続**してつながっている．　→連続性については直感的な理解で十分．
- 数直線上の 2 点間には左右の位置関係が必ず存在する．二つの実数の間には必ず大小関係がある．表記は次のように行なう：

$$a > b, \qquad a < b. \tag{1.3.1}$$
$$a \geq b, \qquad a \leq b, \tag{1.3.2}$$
$$a \geqq b, \qquad a \leqq b, \tag{1.3.3}$$
$$a \geqslant b, \qquad a \leqslant b. \tag{1.3.4}$$

□

本講義では単に数と述べるときは実数を指すものとする．

§ 1.4 区間

定義 1.9 **（区間）** $\mathbb{R}$ の部分集合 I に関して次の名称を定義する：

- **開区間（open interval）**： $(a,b) = \{x \,|\, a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$.
- **閉区間（closed interval）**： $[a,b] = \{x \,|\, a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$.

□

問 1.10 参考書（p.5）問題 1-2 1. □

§ 1.5 上限，下限

定義 1.11 **（上限，下限）** 集合 $X \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} &\forall x \in X, x \le M \text{ をみたす最小な } M \text{ が存在} \quad \Leftrightarrow \quad \sup X = M \\ &\forall x \in X, m \le x \text{ をみたす最大な } m \text{ が存在} \quad \Leftrightarrow \quad \inf X = m \end{aligned}$$

$\sup X$ を X の**上限（supremum）**，$\inf X$ を X の**下限（infimum）**という． □

例 1.12 **（上限，下限の具体例）**

$$\sup(1,2] = 2\,, \qquad \inf(1,2] = 1 \tag{1.5.1}$$

$$\sup\{x^2 \,|\, -1 \le x \le 1\} = 1\,, \qquad \inf\{x^2 \,|\, -1 \le x \le 1\} = 0 \tag{1.5.2}$$

$$\sup\{(-1)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = 1\,, \qquad \inf\{(-1)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = -1 \tag{1.5.3}$$

□

§ 1.6 絶対値

定義 1.13 **（絶対値）** 実数 a の**絶対値（absolute value）**を

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \tag{1.6.1}$$

と定義する. □

問 1.14 **（絶対値の別の定義）** 関数 $\max(x,y)$ を

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & (x > y) \\ x & (x = y) \\ y & (x < y) \end{cases} \tag{1.6.2}$$

と定義するとき，$|a| = \max(a,-a)$ が成立することを示せ. □

定理 1.15 **（絶対値の性質）** 絶対値に関して次の性質が成り立つ：

(1) $|-a| = |a|$.

(2) $|ab| = |a||b|$.

(3) $|a+b| \leq |a| + |b|$.

(4) $|a-b| \geq |a| - |b|$.

□

問 1.16 **（絶対値の性質）** 性質 (1)–(4) を示せ.

（証明）a と b とをそれぞれ正，負，零の場合に分け，全ての組合わせにおいて議論を行なう. □

2 関数

§ 2.1 写像

§ 2.2 関数

関数（function）とは，ある値 x が与えられたとき，何らかの演算規則 f に従って値 y を定め，その値 y を返す機能のことである．関数は

$$y = f(x) \tag{2.2.1}$$

と書き表される．例えばある関数を $f(x) = x^3 - 2x + 5$ と書くことにすると，

$$f(1) = 1^3 - 2 \times 1 + 5 = 4x \qquad \rightarrow \qquad y = 4 \tag{2.2.2}$$
$$f(0) = 0^3 - 2 \times 0 + 5 = 5 \qquad \rightarrow \qquad y = 5 \tag{2.2.3}$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 2 \times (-2) + 5 = 1 \qquad \rightarrow \qquad y = 1 \tag{2.2.4}$$
$$f(a) = a^3 - 2a + 5 \qquad \rightarrow \qquad y = a^3 - 2a + 5 \tag{2.2.5}$$

のように，$f(x)$ の左辺の括弧内の x がある数に書き置き換われば，右辺の x もその数に置き換わる．そしてそれぞれの x に応じて値 y が定まる．

入力 x にある変換 f を作用させ出力 y を返す．これを

$$f : x \mapsto y \qquad \text{または} \qquad x \overset{f}{\mapsto} y \tag{2.2.6}$$

と表す．

定義 2.1 **（関数に関する名称）** 関数 $y = f(x)$ に関連して次の名称を定義する：

- **定数（constant）** $\cdots$ 一定の値を表す数．
- **変数（variable）** $\cdots$ 変化する値を表す数．
- **独立変数（independent variable）** $\cdots$ 自由に値を定めることができる変数 x のこと．
- **従属変数（dependent variable）** $\cdots$ 独立変数 x に応じて値が変化する変数 y のこと．
- **定義域，変域（domain）** $\cdots$ 独立変数 x がとり得る範囲 I．
- **値域（range）** $\cdots$ 従属変数 y がとり得る範囲 J．

□

例 2.2 **（関数に関する名称の具体例）** 関数 $y = f(x) = ax^2 + b$ を考える．このとき a, b は定数であり，x, y は変数である．また x は独立変数であり，y は従属変数である．定義域は $-\infty < x < \infty$ であり，値域は $b \leq y < \infty$ である．

□

§ 2.3 関数のグラフ

x **軸**と y **軸**を直角に交わるように描き xy **平面** を用意する．変数 x の値を定義域内で変化させ，点 $(x,y)=(x,f(x))$ の軌跡を xy 平面内に描く．これにより関数 $f(x)$ のグラフが得られる．

定義 2.3 **（一価関数，多価関数）**　ある一つの x の値に対する y の値の個数で次のように関数を分類する．

- **一価関数（single valued function）** $\cdots$ ある x に対して y の値がただ一つ定まる関数．
- **多価関数（many valued function）** $\cdots$ ある x に対して y の値が複数定まる関数．y の値の個数が n 個となることが分かっている場合は，n **価関数（n-valued function）**と呼ぶ．

□

定義 2.4 **（逆関数）**　$y=f(x)$ を方程式とみなし，x について解いたとき $x=g(y)$ が得られたとする．このとき $g(y)$ を**逆関数（inverse function）**と呼び $g(y)=f^{-1}(y)$ と書く．変数の表し方が本質的でない場合は y と x を取り替えて $f^{-1}(x)$ と書く．
□

例 2.5 **（逆関数の具体例）**　関数 $y=f(x)=ax+b$ の逆関数を考える．$y=ax+b$ について解くと，$x=(y-b)/a$ となるので，逆関数は $f^{-1}(y)=(y-b)/a$ となる．y と x を入れ替えると $f^{-1}(x)=(x-b)/a$ である．
□

問 2.6 **（逆関数のグラフ）**　関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して線対称である．これを示せ．
□

定義 2.7 **（枝，主枝，主値）**　多価関数が一価関数となるように値域を限定する．このとき得られる一価関数それぞれを**分枝（branch）**と呼ぶ．この分枝のうち代表する一つを**主分枝（principal branch）**と呼ぶ．主分岐は**主値 (principal value)** ともいう．
□

例 2.8 **（一価関数，多価関数，逆関数，分枝の具体例）**　$y=f(x)=x^2$ は一価関数である．この関数の逆関数は $y=f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$ であり 2 価関数となる．値域を $y\geq 0$ と $y\leq 0$ とに限定すると一価関数が二つ得られる．すなわち分枝は $y=\sqrt{x}$ と $y=-\sqrt{x}$ である．
□

問 2.9　参考書（p.19）問題 2-1.
□

定義 2.10 **（単調関数）** 関数 $f(x)$ が $x_1 < x_2$ をみたす任意の点 x_1, x_2 $(\forall x_1, x_2 \in I)$ に対して

- $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**単調増加（monotonic increasing）**であると呼ぶ．
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**広義の単調増加（monotonic increasing in the wider sense）**であると呼ぶ．
- $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**単調減少（monotonic decreasing）**であると呼ぶ．
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**広義の単調減少（monotonic decreasing in the wider sense）**であると呼ぶ．

単調増加または単調減少である関数を総称して**単調関数（monotonic function）**と呼ぶ． □

例 2.11 **（単調関数の具体例）** 関数 $y = f(x) = ax$ を考える．$a > 0$ のとき $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ において単調増加である．また $a < 0$ のときは $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ において単調減少となる．なぜなら $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$ であり，$x_2 - x_1 > 0$ であることより，a の符号により $f(x_2)$ と $f(x_1)$ の大小関係が定まるからである． □

定義 2.12 **（周期関数）** $f(x+T) = f(x)$ を満たす関数を**周期関数（periodic function）**と呼ぶ．T を**周期（period）**と呼ぶ． □

定義 2.13 **（奇関数，偶関数）** $f(-x) = -f(x)$ を満たす関数を**奇関数（odd function）**と呼ぶ．$f(-x) = (x)$ を満たす関数を**偶関数（even function）**と呼ぶ． □

問 2.14 奇関数は原点に関して点対称のグラフとなる．偶関数は y 軸に関して線対称なグラフとなる．これを示せ． □

§ 2.4 初等関数

本講義では**初等関数（elementary function）**の一部のみを取り扱う．初等関数とは，代数関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数，およびこれらの関数の有限回の合成から得られる関数のことである（本当のところは初等教育で取り扱う関数のことを初等関数と呼ぶ）．

以下に初等関数のいくつかを列挙する．

§ 2.5 一次関数

一次関数（linear function）は

$$y = ax + b \tag{2.5.1}$$

により与えられる関数である．ただし，a, b は定数である．

§ 2.6 巾関数

巾（べき）関数（power function）は

$$y = ax^n \tag{2.6.1}$$

により与えられる関数である．ただし，a は定数であり，n は整数である．n を巾関数の**次数**と呼ぶ．

§ 2.7 多項式関数

多項式関数（polynomial function）は正の次数をもつ巾関数の線形結合で与えられ，

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{2.7.1}$$

と表される．ただし，$a_0, \cdots, a_n$ は定数であり，n は正の整数である．多項式の次数は巾の最大次数を指す．この場合の多項式の次数は n である．

§ 2.8 有理関数

有理関数（rational function）は

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} \tag{2.8.1}$$

により与えられる関数である．ただし，$a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_m$ は定数であり，n, m は正の整数である．

§ 2.9 指数関数

指数関数（exponential function）は

$$y = a^x \tag{2.9.1}$$

により与えられる関数である．ただし，a は定数である．特に $a = e$ の場合が重要である．ここで e は

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459041\cdots \tag{2.9.2}$$

により定義されるネピア数と呼ばれる定数である．このとき

$$y = e^x = \exp(x) \tag{2.9.3}$$

と表される．単に指数関数と呼ぶときはこの式を指す場合が多い．

定理 2.15 **（指数関数の性質）** 指数関数の次の性質をもつ：

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$.

(2) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(3) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

□

問 2.16 **（指数関数のグラフ）** 指数関数のグラフを書け． □

問 2.17 参考書（p.26）問題 2-2 1. □

§ 2.10 対数関数

指数関数の逆関数を**対数関数（logarithmic function）**といい，

$$y = \log_a x \qquad (x > 0) \tag{2.10.1}$$

と表される．y は a を**底（base）**とする x の**対数（logarithm）**であると読む．特に $a = 10$ のとき**常用対数（common logarithm）**と呼び $y = \log x$ と書く．また $a = e$ のとき**自然対数（natural logarithm）**と呼び $y = \log x$ または $y = \ln x$ と書く．

定理 2.18 **（対数関数の性質）**　対数関数は次の性質をもつ：

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(2) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

(3) $\log_a x^y = y \log_a x$.

(4) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

□

問 2.19 **（対数関数の性質）**　この性質を示せ.

（答え）対数関数は指数関数の逆関数であることと指数関数の性質を用いて示す. □

問 2.20 **（対数関数のグラフ）**　対数関数のグラフを書け. □

§ 2.11 角度

$\boxed{\text{定義 2.21}}$ **(円周率)** 半径 1 の円の長さを 2π と定義する．このとき π を**円周率**と呼び，その値は

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288\cdots \tag{2.11.1}$$

である． □

$\boxed{\text{定義 2.22}}$ **(弧度法による角度)** 2つの直線が交わるとき，この交点と中心が等しい半径 1 の円を描く．このとき 2 つの直線が切り取る円弧の長さを 2 直線が成す**角度（angle）**と定義する．この角度の単位を**ラジアン（radian）**といい，rad と表記する． □

$\boxed{\text{注意 2.23}}$ **(度とラジアン)** **度（degree）**とラジアンの関係は

$$1\,\mathrm{rad} = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} \tag{2.11.2}$$

である． □

§ 2.12 三角関数

単位円（半径 1 で中心が原点 O にある円）C と原点 O を通る直線 L を用意する．円 C と直線 L の交点を P とする．点 P より x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を Q とする．点 $(1,0)$ を Q' とし，Q' を通り y 軸に平行な直線と直線 L との交点を P' とする．Q' から点 P への円弧の（方向付き）長さを x とする．このとき，点 P の座標を $(\cos x, \sin x)$ と定義し，点 P' の座標を $(1, \tan x)$ と定義する．この定義により得られる関数を**三角関数（trigonometric function）**と呼ぶ．読み方は $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の順に sine, cosine, tangent である．

三角関数の巾乗 $(\sin x)^n$ は $\sin^n x$ のように略記する．しかし $n=-1$ のときはこの表記は用いない．$\sin^{-1} x$ は逆三角関数を意味する．このとき表記は $(\sin x)^{-1}$ や $1/\sin x$ とするか新たな記号

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} \tag{2.12.1}$$

を用いる．

定理 2.24 **（三角関数は単位円上の点）**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{2.12.2}$$

（証明）単位円の半径の長さは 1 なので $\overline{OP}^2 = 1$ より導出される． □

定理 2.25 **（三角関数の偶奇）**

$$\sin(-x) = -\sin(x), \tag{2.12.3}$$
$$\cos(-x) = \cos(x), \tag{2.12.4}$$
$$\tan(-x) = -\tan(x). \tag{2.12.5}$$

$\sin x$, $\tan x$ は奇関数であり，$\cos x$ は偶関数である． □

定理 2.26 **（三角関数の周期性）**

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x), \tag{2.12.6}$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos(x), \tag{2.12.7}$$
$$\tan(x+\pi) = \tan(x). \tag{2.12.8}$$

$\sin x$, $\cos x$ は周期 2π の周期関数であり，$\tan x$ は周期 π の周期関数である． □

定理 2.27 **（三角関数の加法公式）** 三角関数の加法公式：

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \tag{2.12.9}$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \tag{2.12.10}$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}. \tag{2.12.11}$$

□

定理 2.28 **（三角関数の性質）** 三角関数どうしの互いの関係：

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}. \tag{2.12.12}$$

□

問 2.29 **（三角関数の性質）** これを示せ.

（答え）加法公式から導出される.

□

定理 2.30 **（三角関数の合成）**

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta), \quad \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), \tag{2.12.13}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta), \quad \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right). \tag{2.12.14}$$

□

問 2.31 **（三角関数の合成）** これを示せ.

（答え）加法公式から導出される.

□

問 2.32 **（三角関数のグラフ）** 三角関数の概形を書け.

□

問 2.33 参考書（p.26）問題 2-2 2.-3.

□

問 2.34 **（三角関数の値）** 次の値を求めよ.

$$\sin 0, \quad \sin\frac{\pi}{6}, \quad \sin\frac{\pi}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{3}, \quad \sin\frac{\pi}{2}, \quad \sin\pi, \quad \sin 2\pi, \tag{2.12.15}$$

$$\cos 0, \quad \cos\frac{\pi}{6}, \quad \cos\frac{\pi}{4}, \quad \cos\frac{\pi}{3}, \quad \cos\frac{\pi}{2}, \quad \cos\pi, \quad \cos 2\pi, \tag{2.12.16}$$

$$\tan 0, \quad \tan\frac{\pi}{6}, \quad \tan\frac{\pi}{4}, \quad \tan\frac{\pi}{3}, \quad \tan\frac{\pi}{2}, \quad \tan\pi, \quad \tan 2\pi. \tag{2.12.17}$$

□

$\boxed{\text{問 2.35}}$ **(n 倍角の公式)**　$\cos 2x, \cos 3x, \cos 4x, \cdots$ を $\cos x$ の多項式で表せ.

(答え)

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1\,, \tag{2.12.18}$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\,, \tag{2.12.19}$$
$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\,. \tag{2.12.20}$$

□

$\boxed{\text{問 2.36}}$ **(n 倍角の公式)**　$\cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x, \cdots$ を $\cos 2x, \cos 3x, \cos 4x, \cdots$ の線形結合で表せ.

(答え)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos x \\ \cos 2x \\ \cos 3x \\ \cos 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos x \\ \cos^2 x \\ \cos^3 x \\ \cos^4 x \end{bmatrix} \tag{2.12.21}$$

より

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos x \\ \cos^2 x \\ \cos^3 x \\ \cos^4 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos x \\ \cos 2x \\ \cos 3x \\ \cos 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos x \\ \cos 2x \\ \cos 3x \\ \cos 4x \end{bmatrix} \tag{2.12.22}$$

となるので

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\,, \tag{2.12.23}$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\,, \tag{2.12.24}$$
$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8} \tag{2.12.25}$$

を得る.

□

§ 2.13 逆三角関数

三角関数の逆関数を**逆三角関数（inverse trigonometric function）**と呼び，$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数をそれぞれ

$$y = \sin^{-1} x = \arcsin x \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{2.13.1}$$
$$y = \cos^{-1} x = \arccos x \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{2.13.2}$$
$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{2.13.3}$$

と書き表す．読み方は上から sine inverse, cosine inverse, tangent inverse または arc sine, arc cosine, arc tangent である．逆三角関数は多価関数となる．任意の x に対して無限個の y が存在する．主値をとり一価関数とした逆三角関数を表すには特に

$$y = \mathrm{Sin}^{-1} x = \mathrm{Arcsin}\, x \qquad (-1 \leq x \leq 1) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.13.4}$$
$$y = \mathrm{Cos}^{-1} x = \mathrm{Arccos}\, x \qquad (-1 \leq x \leq 1) \qquad (0 \leq y \leq \pi) \tag{2.13.5}$$
$$y = \mathrm{Tan}^{-1} x = \mathrm{Arctan}\, x \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.13.6}$$

と書く．

問 2.37 **（逆三角関数のグラフ）** 逆三角関数の概形を書け． □

例 2.38 **（逆三角関数の値）**

$$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}. \tag{2.13.7}$$

□

問 2.39 **（逆三角関数の値）** 次の値を求めよ．

$$\mathrm{Sin}^{-1}(0), \quad \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \mathrm{Sin}^{-1}(1), \tag{2.13.8}$$
$$\mathrm{Cos}^{-1}(0), \quad \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \mathrm{Cos}^{-1}(1), \tag{2.13.9}$$
$$\mathrm{Tan}^{-1}(0), \quad \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathrm{Tan}^{-1}(1), \quad \mathrm{Tan}^{-1}\left(\sqrt{3}\right). \tag{2.13.10}$$

□

§ 2.14 双曲線関数

双曲線関数（hyperbolic function）とは

$$y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad y=\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{\sinh x}{\cosh x}\tag{2.14.1}$$

により定義される関数である．関数の読み方は上から hyperbolic sine, hyperbolic cosine, hyperbolic tangent である．また双曲線関数の逆数を

$$\mathrm{cosech}\,x=\frac{1}{\sinh x},\qquad \mathrm{sech}\,x=\frac{1}{\cosh x},\qquad \coth x=\frac{1}{\tanh x}\tag{2.14.2}$$

と定義する．

注意 2.40 **（三角関数と双曲線関数）** 三角関数は複素関数を用いて次のようにも定義される：

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\tag{2.14.3}$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\tag{2.14.4}$$

$$\tan x=\frac{1}{i}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}=\frac{\sin x}{\cos x}.\tag{2.14.5}$$

双曲線関数の定義との類似に注意せよ． □

問 2.41 **（双曲線関数の概形）** 双曲線関数の概形を書け． □

定理 2.42 **（双曲線関数の性質）** 双曲線関数は次の性質をもつ．

$$\sinh(-x)=-\sinh(x)\quad\rightarrow\text{奇関数}\tag{2.14.6}$$

$$\cosh(-x)=\cosh(x)\quad\rightarrow\text{偶関数}\tag{2.14.7}$$

$$\tanh(-x)=-\tanh(x)\quad\rightarrow\text{奇関数}\tag{2.14.8}$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1\tag{2.14.9}$$

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y\tag{2.14.10}$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y\tag{2.14.11}$$

$$\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}\tag{2.14.12}$$

□

問 2.43 **（双曲線関数の性質）** この性質を証明せよ．

（証明）双曲線関数の定義をそのまま用いれば証明できる． □

$\boxed{\text{問 } 2.44}$ **(双曲線関数の性質)**　次の式を導け.

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{2.14.13}$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) \tag{2.14.14}$$

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x \tag{2.14.15}$$

$$\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{2.14.16}$$

□

$\boxed{\text{問 } 2.45}$ **(n 倍角の公式)**　$\cosh 2x, \cosh 3x, \cosh 4x, \cdots$ を $\cosh x$ の多項式で表せ.

（答え）

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1\,, \tag{2.14.17}$$

$$\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x\,, \tag{2.14.18}$$

$$\cosh 4x = 8\cosh^4 x - 8\cosh^2 x + 1\,. \tag{2.14.19}$$

□

$\boxed{\text{問 } 2.46}$ **(n 倍角の公式)**　$\cosh^2 x, \cosh^3 x, \cosh^4 x, \cdots$ を $\cosh 2x, \cosh 3x, \cosh 4x, \cdots$ の線形結合で表せ.

（答え）

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cosh x \\ \cosh 2x \\ \cosh 3x \\ \cosh 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cosh x \\ \cosh^2 x \\ \cosh^3 x \\ \cosh^4 x \end{bmatrix} \tag{2.14.20}$$

より

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cosh x \\ \cosh^2 x \\ \cosh^3 x \\ \cosh^4 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \cosh x \\ \cosh 2x \\ \cosh 3x \\ \cosh 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cosh x \\ \cosh 2x \\ \cosh 3x \\ \cosh 4x \end{bmatrix} \tag{2.14.21}$$

となるので

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2}\,, \tag{2.14.22}$$

$$\cosh^3 x = \frac{1}{4}\cosh 3x + \frac{3}{4}\cosh x\,, \tag{2.14.23}$$

$$\cosh^4 x = \frac{1}{8}\cosh 4x + \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{8} \tag{2.14.24}$$

を得る.

□

問 2.47 **（円と双曲線）** 円 $x^2+y^2=1$ をパラメータ表示すると

$$x(t)=\cos t,\quad y(t)=\sin t \tag{2.14.25}$$

と表わせる．双曲線 $x^2-y^2=1$ をパラメータ表示するには

$$x(t)=\pm\cosh t,\quad y(t)=\sinh t \tag{2.14.26}$$

とおけばよい．これを示せ． □

注意 2.48 **（円関数）** 双曲線関数に対して三角関数は**円関数**と呼ぶこともある． □

§ 2.15 逆双曲線関数

双曲線関数の逆関数は**逆双曲線関数（inverse hyperbolic function）**と呼び，

$$y = \sinh^{-1} x = \mathrm{arcsinh}\, x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{2.15.1}$$

$$y = \cosh^{-1} x = \mathrm{arccosh}\, x = \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (1 \leq x) \tag{2.15.2}$$

$$y = \tanh^{-1} x = \mathrm{arctanh}\, x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (|x| < 1) \tag{2.15.3}$$

と表される．読み方は上から hyperbolic arc sine, hyperbolic arc cosine, hyperbolic arc tangent である．$\mathrm{arccosh}\, x$ は二価関数である．枝は $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ と $\log\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$ である．通常は前者を主値にとる．その他の逆双曲線関数は一価関数である．

問 2.49 **（逆双曲線関数のグラフ）** 逆双曲線関数の概形を書け． □

問 2.50 **（逆双曲線関数の対数関数表示）** 逆双曲線関数が (2.15.1)–(2.15.3) のように対数関数を用いて書き表されることを示せ．

（答え）$y = \mathrm{arcsinh}\, x$ とおく．逆に書けば $x = \sinh y = (e^y - e^{-y})/2$ である．これより

$$2x = e^y - e^{-y} \tag{2.15.4}$$

$$2xe^y = e^{2y} - 1 \tag{2.15.5}$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \tag{2.15.6}$$

$$(e^y - x)^2 = x^2 + 1 \geq 0 \tag{2.15.7}$$

$$e^y - x = \pm\sqrt{x^2+1} \tag{2.15.8}$$

$$0 \leq e^y = x \pm \sqrt{x^2+1} \tag{2.15.9}$$

この条件のもとでは複合の “−” は不適 (2.15.10)

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \geq 0 \tag{2.15.11}$$

$$y = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \tag{2.15.12}$$

を得る． □

§ 2.16 関数の極限

$\boxed{\text{定義 2.51}}$ **（右極限，左極限）** 変数 x を右から a に近づけたときの $f(x)$ の値が b に近づくとき

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \tag{2.16.1}$$

と書き，**右極限（right-hand limit）**と呼ぶ．同様に，変数 x を左から a に近づけたときの $f(x)$ の値が b に近づくとき

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \tag{2.16.2}$$

と書き，**左極限（left-hand limit）**と呼ぶ．

また略記として

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x), \qquad f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) \tag{2.16.3}$$

と書くこともある．

□

$\boxed{\text{定義 2.52}}$ **（関数の極限）** 変数 x を a に近づけるとき，その近づけ方に依らず全て同じ極限となるとき，すなわち

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = b \tag{2.16.4}$$

が成り立つとき，そのときに限り $x \to a$ における関数 $f(x)$ の**極限**が存在し，

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \tag{2.16.5}$$

と書く．極限が存在するとき次のように表現する：

x が a に限りなく近づくとき，
関数 $f(x)$ には極限が存在し，その極限値は b である． (2.16.6)

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b. \tag{2.16.7}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \to b \quad (x \to a). \tag{2.16.8}$$

$\Leftrightarrow f(x)$ は $x \to a$ において b に**収束する（convergent）**． (2.16.9)

収束しないとき**発散する（divergent）**という．

□

例 2.53 **（関数の極限の具体例）**　関数 $f(x)=x^2$ を考える．このとき

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = 4 \tag{2.16.10}$$

となる．右からの極限も左からの極限も存在し同じ値となる．よって

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \tag{2.16.11}$$

である．

□

例 2.54 **（関数の極限の具体例）**　関数

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0) \tag{2.16.12}$$

を考える．$x>0$ のとき $f(x)=x/x=1$ であるから右極限は

$$\lim_{x\to +0} f(x) = 1 \tag{2.16.13}$$

となる．$x<0$ のとき $f(x)=(-x)/x=-1$ であるから左極限は

$$\lim_{x\to -0} f(x) = -1 \tag{2.16.14}$$

となる．右極限と左極限が一致しないので，極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

□

例 2.55 **（関数の極限の具体例）**　関数

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2.16.15}$$

を考える．$x\to +0$ のとき $1/x\to +\infty$ である．$1/x\to+\infty$ であるから $f(x)$ は 1 と -1 の間を振動する．よって右極限 $\lim_{x\to +0} f(x)$ は存在しない．$x\to -0$ のとき $1/x\to -\infty$ である．以下同様で左極限 $\lim_{x\to -0} f(x)$ は存在しない．右極限も左極限も存在しないので，極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

□

定理 2.56 **(関数の極限に関する性質)** 関数 $f(x), g(x)$ に関して極限

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B \tag{2.16.16}$$

が存在するならば,

$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) = \alpha A, \tag{2.16.17}$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A+B, \tag{2.16.18}$$

$$\lim_{x\to a} (\alpha f(x)+\beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x) = \alpha A+\beta B, \tag{2.16.19}$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = AB, \tag{2.16.20}$$

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B} \tag{2.16.21}$$

が成り立つ．ただし，α, β は定数である．

□

例 2.57 **(関数の極限の計算例)**

$$\lim_{x\to 2} (3x+5) = 3\lim_{x\to 2} x + 5 = 11\,. \tag{2.16.22}$$

$$\lim_{x\to 2}(x+7)(x-3) = \lim_{x\to 2}(x+7) \times \lim_{x\to 2}(x-3) = 9 \times (-1) = -9\,. \tag{2.16.23}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2+2} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2-1)}{\lim_{x\to 2}(x^2+2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,. \tag{2.16.24}$$

□

変数 x の値が正で限りなく大きくなるとき $x\to+\infty$ と書く．変数 x の値が負で限りなく小さくなるとき $x\to-\infty$ と書く．また，変数 $f(x)$ の値が正で限りなく大きくなるとき $f(x)\to+\infty$ と書く．変数 $f(x)$ の値が負で限りなく小さくなるとき $f(x)\to-\infty$ と書く．

例 2.58 **（関数の極限の計算例）**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\,. \tag{2.16.25}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0\,. \tag{2.16.26}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}\sin x=0\,. \tag{2.16.27}$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{ax}=0\quad(a<0)\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}e^{ax}=\infty\quad(a>0)\,, \tag{2.16.28}$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{ax}=\infty\quad(a<0)\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}e^{ax}=0\quad(a>0)\,. \tag{2.16.29}$$

$$\lim_{x\to a+0}\frac{1}{x-a}=\infty\,,\qquad \lim_{x\to a-0}\frac{1}{x-a}=-\infty\,, \tag{2.16.30}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\ \text{：存在ない.} \tag{2.16.31}$$

$$\lim_{x\to a\pm0}\frac{1}{(x-a)^2}=\infty\,,\qquad \lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^2}=\infty\,. \tag{2.16.32}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x}{1+1/x}=1\,. \tag{2.16.33}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2/x}{1+1/x}=\infty\,. \tag{2.16.34}$$

□

公式 2.59 **（ネピア数）**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{2.16.35}$$

□

公式 2.60

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{2.16.36}$$

□

問 2.61 参考書（p.31）問題 2-3. □

問 2.62 **(関数の極限の計算)**

(1) $$\lim_{x\to a}\left(c_N x^N + c_{N-1} x^{N-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0\right) \tag{2.16.37}$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{x-5} \tag{2.16.38}$$

(3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x}{2x^2+3} \tag{2.16.39}$$

(4) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x^5-4x^2+1} \tag{2.16.40}$$

(5) $$\lim_{x\to+0}\frac{x+3}{x^2-1} \tag{2.16.41}$$

(6) $$\lim_{x\to-0}\frac{x^3+2x}{x^5-3x^2} \tag{2.16.42}$$

(7) $$\lim_{x\to-0}\frac{5x^4-x^3}{2x^3-x^2} \tag{2.16.43}$$

(8) $$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{x^2+x-2} \tag{2.16.44}$$

(9) $$\lim_{x\to1+0}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+x-2} \tag{2.16.45}$$

(10) $$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{x^3-3x+2} \tag{2.16.46}$$

(11) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \tag{2.16.47}$$

(12) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \tag{2.16.48}$$

(13) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x + x\cos x + \tan 4x}{x+\sin 3x} \tag{2.16.49}$$

(14) $$\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x)}{x} \tag{2.16.50}$$

(15) $$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} \tag{2.16.51}$$

(16) $$\lim_{x\to+0}\frac{2}{1+e^{-1/x}} \tag{2.16.52}$$

(17) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1+e^x}{x^3-5x+1} \tag{2.16.53}$$

(18) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x+1}{2x-1+\log x} \tag{2.16.54}$$

(19) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1+e^x}{2x-1+\log x} \tag{2.16.55}$$

$$\tag{2.16.56}$$

□

§ 2.17 連続と不連続

定義 2.63 **（関数の連続性）** 次の条件を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ において**連続（continuous）**であるという．

(i) $f(a)$ が定義されている．

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在する．
すなわち $\lim_{x\to a+0} f(x)$ と $\lim_{x\to a-0} f(x)$ が存在し，それらの値が等しい．

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成立する．
すなわち $f(a) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x)$ が成立する．

連続ではない場合は**不連続（discontinuous）**であるいう． □

例 2.64 **（連続な点の具体例）** $f(x) = x^2$ は $x=2$ において連続である．なぜなら

$$f(2) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} f(x) = 4 \tag{2.17.1}$$

が成り立つからである． □

例 2.65 **（不連続な点の具体例）** $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $(x \neq 2)$ は $x=2$ において不連続である．なぜなら $f(2)$ は定義されていない．さらには $\lim_{x\to 2+0} f(x) \neq \lim_{x\to 2-0} f(x)$ となるからである． □

例 2.66 **（不連続点の除去の具体例）** $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $(x\neq 0)$ は $x=0$ において不連続である．なぜなら $f(0)$ が定義されていないからである．しかし $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases} \tag{2.17.2}$$

と定義すると $f(x)$ は $x=0$ において連続となる．なぜなら $f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)=1$ が成立するからである．再定義することにより不連続な点 $x=0$ は取り除かれた． □

例 2.67 **（不連続点を除去できない具体例）** $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $(x\neq a)$ は点 $x=a$ において不連続である．点 $x=a$ における値を $f(a)=b$ と定義することにする．うまく b を定めることにより不連続点は取り除くことができるであろうか． $\lim_{x\to a+0}f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to a-0}f(x)=-\infty$ であるので，点 $x=a$ の左右で極限がことなる．よってどのように $f(a)=b$ を定めても不連続な点を取り除くことはできない． □

例 2.68 **（不連続点の除去の具体例）** $f(x)=\dfrac{x-1}{x-1}$ $(x\neq 1)$ を考える．$f(x)$ は点 $x=1$ において不連続である．しかし $f(x)$ は分子分母が等しいので，$x\neq 1$ となる点において $f(x)=1$ である．よって $\lim_{x\to 1\pm 0}f(x)=1$ となる．ゆえに点 $x=1$ の値を $f(1)=1$ と定義すれば不連続点は取り除かれる．結局，点 $x=1$ はみかけ上の不連続点であり本質的な不連続点ではない． □

問 2.69 参考書（p.36）問題 2-5. □

問 2.70 **（不連続点の除去の例）** 次の関数を $x=0$ で連続となるように $f(0)$ の値を定義せよ．

$$(1)\quad f(x)=\frac{\tan x}{x}\quad (x\neq 0) \tag{2.17.3}$$

$$(2)\quad f(x)=x\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq 0) \tag{2.17.4}$$

$$(3)\quad f(x)=\frac{x^3-1}{x}+\frac{x+1}{x}\quad (x\neq 0) \tag{2.17.5}$$

□

§ 2.18 連続関数

定義 2.71 **（連続関数）** 関数 $f(x)$ が定義内の任意の点において連続であるとき，$f(x)$ は**連続関数（continuous function）**であるという． □

例 2.72 **（連続関数の具体例）** 次の関数は連続関数である．

$$f(x) = x^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2.18.1}$$

$$f(x) = \log x \quad (x > 0) \tag{2.18.2}$$

$$f(x) = \sin(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2.18.3}$$

$$f(x) = \cos(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2.18.4}$$

$$f(x) = \tan(x) \quad \left(\frac{2n-1}{2}\pi < x < \frac{2n+1}{2}\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right) \tag{2.18.5}$$

□

定義 2.73 **（閉区間における連続関数）** 関数 $f(x)$ の定義域が閉区間 $a \leq x \leq b$ のとき，その端点では条件

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b) \tag{2.18.6}$$

を満たすとき連続であるとする． □

例 2.74 **（閉区間における連続関数の具体例）** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $(-2 \leq x \leq 2)$ は連続関数である．なぜなら

$$f(-2) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = 0, \qquad f(2) = \lim_{x \to 2-0} f(x) = 0 \tag{2.18.7}$$

が成立するからである． □

定理 2.75 **（連続関数に関する性質）** 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が連続関数のであるとき，関数

$$f(x)+g(x), \qquad \alpha f(x)+\beta g(x), \qquad f(x)g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad f(g(x)) \tag{2.18.8}$$

もすべて連続関数である．ただし $f(x)/g(x)$ の定義域は $g(x)=0$ とならないものをとることにする．

□

例 2.76 **（連続関数に関する性質の具体例）** 巾関数 x^n は連続関数である．よって巾関数の線形結合である多項式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ も連続関数である．

□

例 2.77 **（連続関数に関する性質の具体例）** 多項式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ と $b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$ は連続関数である．よってそれらの商である有理関数

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m} \tag{2.18.9}$$

も連続関数である．

□

例 2.78 **（連続関数に関する性質の具体例）** x^2 と $\sin x$ は連続関数である．よってそれらの合成関数である $\sin(x^2)$ も連続関数である．

□

問 2.79 **（連続関数の定義域）** 次の関数が連続となる x の範囲を定めよ．

$$(1) \quad f(x)=\frac{x^2}{x-1} \tag{2.18.10}$$

$$(2) \quad f(x)=\frac{1+\sin x}{1+\cos x} \tag{2.18.11}$$

$$(3) \quad f(x)=\frac{1-|x|}{x} \tag{2.18.12}$$

□

3 微分法

§ 3.1 微分係数

定義 3.1 **（微分と微分係数）** 関数 $f(x)$ が $x=a$ において連続で，極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{3.1.1}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ において**微分可能（differentiable）**であるという．このとき有限確定した極限を $f'(a)$ と表記し，$x=a$ における $f(x)$ の**微分係数（differential coefficient）**と呼ぶ．

□

定義 3.2 **（右微分係数，左微分係数）** 右極限による関数 $f(x)$ の微分係数を

$$f'(a+0)=\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{3.1.2}$$

と書き，**右微分係数（right differential coefficient）**と呼ぶ．左極限による関数 $f(x)$ の微分係数を

$$f'(a-0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{3.1.3}$$

と書き，**左微分係数（left differential coefficient）**と呼ぶ．

□

注意 3.3 **（微分係数の存在）** $f'(a)$ が存在するとは，すなわち $f'(a+0), f'(a-0)$ が存在し，かつ $f'(a+0)=f'(a-0)$ が成り立つことを意味する．

□

例 3.4 **（微分係数の具体例）**　$f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数を求める．まず

$$g(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{3.1.4}$$

とおく．$g(h)$ を計算すると

$$g(h)=\frac{(a+h)^2-h^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h \tag{3.1.5}$$

を得る．よって

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}g(h)=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a \tag{3.1.6}$$

により微分係数 $f'(a)=2a$ が求まる．

□

例 3.5 **（微分不可能な点の具体例）**　関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ において連続であるが，微分可能ではない．以下これを示す．まず

$$g(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{|x+h|-|x|}{h} \tag{3.1.7}$$

とおく．$x\geq 0, h>0$ のとき

$$g(x,h)=\frac{|x+h|-|x|}{h}=\frac{x+h-x}{h}=\frac{h}{h}=1 \tag{3.1.8}$$

である．$x\leq 0, h<0$ のとき

$$g(x,h)=\frac{|x+h|-|x|}{h}=\frac{-(x+h)-(-x)}{h}=\frac{-h}{h}=-1 \tag{3.1.9}$$

となる．これより

$$f'(+0)=\lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}g(0,h)=1\,, \tag{3.1.10}$$

$$f'(-0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}g(0,h)=-1 \tag{3.1.11}$$

を得る．右微分係数と左微分係数は存在するがその値は異なる．よって $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ は存在しない．$f(x)$ は $x=0$ において微分不可能である．

□

§ 3.2 導関数

定義 3.6 **（導関数）** 関数 $y = f(x)$ が連続関数であり，定義域内の任意の点において微分可能であるとする．このとき関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.2.1}$$

が存在する．$f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数（derived function, derivative）**と呼ぶ．導関数はまた

$$\frac{d}{dx}y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad f'(x), \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{df(x)}{dx} \tag{3.2.2}$$

という表記も用いる．

□

例 3.7 **（導関数の計算例）** 関数 $f(x) = x^2$ の導関数を求める．まず

$$g(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.2.3}$$

とおく．$g(x,h)$ を計算すると

$$g(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \tag{3.2.4}$$

を得る．これより

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} g(x,h) = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x \tag{3.2.5}$$

となる．極限 $f'(x)$ は $-\infty < x < \infty$ の任意の点において有限確定である．よって導関数 $f'(x)$ が存在し $f'(x) = 2x$ が求まる．

□

§ 3.3 導関数の計算

定理 3.8 **（微分演算に関する性質）** 関数 $f = f(x)$, $g = g(x)$ が微分可能なとき，次の関係が成り立つ：

(1) **（和の微分）** $(f+g)' = f' + g'$.

(2) **（微分の線形性）** $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad (\alpha, \beta$：定数).

(3) **（積の微分）** $(fg)' = f'g + fg'$.

(4) **（商の微分）** $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g(x) \neq 0)$.

(5) **（合成関数の微分）** $y = f(g(x))$ のとき $y = f(z), z = g(x)$ とおけば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = f'(z)\frac{dz}{dx} = f'(g(x))g'(x)\,. \tag{3.3.1}$$

この演算規則を**チェインルール（chain rule）**と呼ぶ.

(6) **（逆関数の微分）** $y = f(x), x = f^{-1}(y)$ のとき

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\,, \qquad \frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,. \tag{3.3.2}$$

□

例 3.9 **（導関数の計算例）** 次の関数の導関数を求めよ.

$$y = (x^2-1)(x^3+2) \tag{3.3.3}$$

$$y = \frac{x-2}{x^2+x+2} \tag{3.3.4}$$

$$y = (3x^2-x-1)^4 \tag{3.3.5}$$

$$y = \sin^3 4x \tag{3.3.6}$$

□

問 3.10 微分演算に関する性質を示せ．

（証明）(1) $F(x)=f(x)+g(x)$ とおく．定義に従い計算すると

$$
\begin{aligned}
(f+g)' &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x) \qquad (3.3.7)
\end{aligned}
$$

を得る．

(2) $F(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$ とおく．定義に従い計算すると

$$
\begin{aligned}
(f+g)' &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha f(x+h)+\beta g(x+h)-\alpha f(x)-\beta g(x)}{h} \\
&= \alpha\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \beta\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \alpha f'(x)+\beta g'(x) \qquad (3.3.8)
\end{aligned}
$$

を得る．

(3) $F(x)=f(x)g(x)$ とおく．定義に従い計算すると

$$
\begin{aligned}
(fg)' &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}g(x+h) + f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \qquad (3.3.9) \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad (3.3.10)
\end{aligned}
$$

を得る．

(4) $F(x)=f(x)/g(x)$ とおく．定義に従い計算すると，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)/g(x+h)-f(x)/g(x)}{h} \qquad (3.3.11) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \qquad (3.3.12) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x)-f(x)(g(x+h)-g(x))}{hg(x+h)g(x)} \qquad (3.3.13) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \qquad (3.3.14) \\
&= \frac{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0}g(x+h)g(x)} \qquad (3.3.15) \\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad (3.3.16)
\end{aligned}
$$

を得る．

(5) $F(x)=f(g(x))$ とおく．定義に従い計算すると

$$\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+g(x+h)-g(x))-f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+g(x+h)-g(x))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

を得る．ここで $\tilde{h}=g(x+h)-g(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g+\tilde{h})-f(g)}{\tilde{h}}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g+\tilde{h})-f(g)}{\tilde{h}} \times \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\tilde{h} &= \lim_{h\to 0}(g(x+h)-g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times h \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}h \\
&= g'(x)\times 0 = 0
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

が成り立つ．よって $h\to 0$ のとき $\tilde{h}\to 0$ である．以上より

$$(f(g(x)))' = \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g+\tilde{h})-f(g)}{\tilde{h}} \times \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(g(x))g'(x)\,. \tag{3.3.20}$$

を得る．

(6) $y=f(x), x=f^{-1}(y)$ より

$$y=f(x)=f(f^{-1}(y)) \tag{3.3.21}$$

となる．$y=f(f^{-1}(y))$ の両辺は y に関する関数である．両辺を y で微分すると

$$\frac{d}{dy}y = f'(f^{-1}(y))\frac{df^{-1}(y)}{dy} \tag{3.3.22}$$

$$1 = f'(x)\frac{dx}{dy} \tag{3.3.23}$$

$$1 = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} \tag{3.3.24}$$

を得る．よって

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \tag{3.3.25}$$

となる．

□

§ 3.4 定数の微分

定理 3.11 **（定数の微分）**

$$\frac{d}{dx}c = 0 \qquad (c：定数) \tag{3.4.1}$$

□

問 3.12 これを示せ．

（証明）$y = f(x) = c$ とおき定義に従い計算すると，

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0 \tag{3.4.2}$$

を得る．

□

§ 3.5 巾関数の微分

定理 3.13 **（巾関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (n\text{：自然数}) \tag{3.5.1}$$

□

問 3.14 これを示せ.

（証明）$y = f(x) = x^n$ とおき定義に従い計算すると，

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \tag{3.5.2}$$

を得る．ここで

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k \tag{3.5.3}$$

$$= x^n + nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n \tag{3.5.4}$$

$$= x^n + nx^{n-1}h + h^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-2} \tag{3.5.5}$$

であることを用いると

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + h\left\{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-2}\right\} \tag{3.5.6}$$

となる．$h\to 0$ のとき nx^{n-1} の項は生き残り，その後ろの項は消える．よって

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1} \tag{3.5.7}$$

を得る．

□

定理 3.15 **（負巾関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} \quad (n\text{：自然数}) \tag{3.5.8}$$

□

問 3.16 これを示せ．

（証明）$y = f(x) = 1/x^n$ とおく．このとき

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{x^n - (x+h)^n}{(x+h)^n x^n} && (3.5.9)\\ &= \frac{x^n - x^n - nx^{n-1}h - h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-h} h^{k-2}}{(x+h)^n x^n} && (3.5.10)\\ &= -h\frac{nx^{n-1} + h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}}{(x+h)^n x^n} && (3.5.11) \end{aligned}$$

となる．これを用いて

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && (3.5.12)\\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1} + h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}}{(x+h)^n x^n} = -\frac{nx^{n-1} + 0}{(x+0)^n x^n} = \frac{-n}{x^{n+1}} && (3.5.13) \end{aligned}$$

を得る．

□

定理 3.17 **(m 乗根関数の微分)**

$$\frac{d}{dx}\sqrt[m]{x}=\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{m}}=\frac{\sqrt[m]{x}}{mx}=\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}\quad (m\text{:自然数}) \tag{3.5.14}$$

□

問 3.18 これを示せ.

(証明) $y=f(x)=\sqrt[m]{x}=x^{\frac{1}{m}}$ とおく. このとき

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^{\frac{1}{m}}-x^{\frac{1}{m}} \tag{3.5.15}$$

である. ここで

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}) \tag{3.5.16}$$

$$=(a-b)\sum_{k=1}^{m}a^{m-k}b^{k-1} \tag{3.5.17}$$

$$\Rightarrow\quad a-b=\frac{a^m-b^m}{\sum_{k=1}^{m}a^{m-k}b^{k-1}} \tag{3.5.18}$$

であることを用いる. $a=(x+h)^{\frac{1}{m}}, b=x^{\frac{1}{m}}$ とおくと

$$f(x+h)-f(x)=\frac{\left((x+h)^{\frac{1}{m}}\right)^m-\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m}{\sum_{k=1}^{m}(x+h)^{\frac{m-k}{m}}x^{\frac{k-1}{m}}}=\frac{(x+h)-x}{\sum_{k=1}^{m}\left((x+h)^{m-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{m}}} \tag{3.5.19}$$

$$=\frac{h}{\sum_{k=1}^{m}\left((x+h)^{m-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{m}}} \tag{3.5.20}$$

を得る. よって

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\left((x+h)^{m-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{m}}} \tag{3.5.21}$$

$$=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\left((x+0)^{m-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{m}}}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}x^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{1}{mx^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1} \tag{3.5.22}$$

となる.

□

定理 3.19 **（巾関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{3.5.23}$$

（証明）次節の $(\log x)' = 1/x$, $(e^x)' = e^x$ が既に証明済みであるとする．このとき

$$y = f(x) = x^{\alpha} = (e^{\log x})^{\alpha} = e^{\alpha \log x} \tag{3.5.24}$$

と表されるのでこれを微分すると

$$y' = \left(e^{\alpha \log x}\right)' = \left(e^{\alpha \log x}\right) \times (\alpha \log x)' = e^{\alpha \log x}\frac{\alpha}{x} = x^{\alpha}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \tag{3.5.25}$$

を得る． □

§ 3.6 対数関数の微分

定理 3.20 **(対数関数の微分)**

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \tag{3.6.1}$$

□

問 3.21 これを示せ.

(証明) $y = f(x) = \log x$ とおき定義に従い計算すると,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h} \tag{3.6.2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\log(x+h)-\log(x)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\log\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \tag{3.6.3}$$

$$= \lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} \tag{3.6.4}$$

$$= \frac{1}{x}\log\left\{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right\} = \frac{1}{x}\log\left\{\lim_{z=\frac{x}{h}\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right\} \tag{3.6.5}$$

$$= \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x} \tag{3.6.6}$$

を得る.

□

§ 3.7 指数関数の微分

定理 3.22 **(指数関数の微分)**

$$\frac{d}{dx}a^x = (\log a)\,a^x \tag{3.7.1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{3.7.2}$$

□

関数 e^x は微分演算 $\dfrac{d}{dx}$ に関して恒等的である.

問 3.23 これを示せ.

（証明）$y = f(x) = a^x$ とおく．このとき逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \log_a y = \frac{\log y}{\log a}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{1}{y}}{\log a} = \frac{1}{(\log a)y} \tag{3.7.3}$$

である．これと逆関数の微分公式より

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{(\log a)y}} = (\log a)y = (\log a)a^x \tag{3.7.4}$$

を得る. □

§ 3.8 三角関数の微分

定理 3.24 **（三角関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{3.8.1}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{3.8.2}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{3.8.3}$$

□

問 3.25 これを示せ．

（証明）$y = f(x) = \sin x$ とおく．定義に従い計算すると，

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \tag{3.8.4}$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}\sin(x+h)-\sin(x) &= \sin\left(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right) && (3.8.5)\\ &= \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) && (3.8.6)\\ &\quad -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) && (3.8.7)\\ &= 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) && (3.8.8)\end{aligned}$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} && (3.8.9)\\ &= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos(x)\times 1 = \cos(x) && (3.8.10)\end{aligned}$$

を得る．

次に $y=f(x)=\cos x$ とおく．定義に従い計算すると，

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \tag{3.8.11}$$

を得る．ここで

$$\cos(x+h)-\cos(x)=\cos\left(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right) \tag{3.8.12}$$

$$=\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) \tag{3.8.13}$$

$$-\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) \tag{3.8.14}$$

$$=-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) \tag{3.8.15}$$

であることを用いると

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} \tag{3.8.16}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=-\sin(x)\times 1=-\sin(x) \tag{3.8.17}$$

を得る．

最後に $y=f(x)=\tan(x)$ を考える．このとき

$$y=f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{3.8.18}$$

であるから商の微分公式より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\sin(x))'\cos(x)-\sin(x)\,(\cos(x))'}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \tag{3.8.19}$$

$$=\frac{1}{\cos^2(x)} \tag{3.8.20}$$

を得る． □

§ 3.9 逆三角関数の微分

定理 3.26 **(逆三角関数の微分)**

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Sin}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.9.1}$$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Cos}^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.9.2}$$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.9.3}$$

□

問 3.27 これを示せ．

（証明）$y = f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}(x)$ とおく．主値を考えているので値域は

$$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \tag{3.9.4}$$

である．このとき $f(x)$ の逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \sin(y)\,, \qquad \frac{dx}{dy} = (\sin(y))' = \cos(y) \tag{3.9.5}$$

である．ここで $\cos(y)$ を x の関数で表すことを考える．$\cos^2(y)+\sin^2(y) = 1$ と $x = \sin(y)$ より

$$\cos(y) = \pm\sqrt{1-\sin^2(y)} = \pm\sqrt{1-x^2} \tag{3.9.6}$$

となる．符号を片方のみ採用する．$-\pi/2 \le y \le \pi/2$ より $\cos y \ge 0$ となるので，上式の右辺も 0 以上でなければならない．よって

$$\cos y = \sqrt{1-x^2} \tag{3.9.7}$$

である．以上より

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.9.8}$$

を得る．

次に $y=f(x)=\mathrm{Cos}^{-1}(x)$ $(0\leq y\leq \pi)$ とおく．この逆関数とその微分は

$$x=f^{-1}(y)=\cos(y)\,,\qquad \frac{dx}{dy}=-\sin(y) \tag{3.9.9}$$

である．主値 $0\leq y\leq \pi$ に注意して $\sin(y)$ を x の関数で表わすと

$$\sin(y)=\sqrt{1-\cos(y)}=\sqrt{1-x^2} \tag{3.9.10}$$

である．ここで $\sin(y)\geq 0$ $(0\leq y\leq \pi)$ を用いた．以上より

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\sin(y)}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.9.11}$$

を得る．

最後に $y=f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}(x)$ を考える．この逆関数とその微分は

$$x=f^{-1}(y)=\tan y\,, \tag{3.9.12}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}=\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2 \tag{3.9.13}$$

となる．これより

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{1+x^2} \tag{3.9.14}$$

を得る． □

§ 3.10 双曲線関数の微分

定理 3.28 **(双曲線関数の微分)**

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \tag{3.10.1}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \tag{3.10.2}$$
$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{3.10.3}$$

□

問 3.29 これを示せ.

$y = f(x) = \sinh(x)$ とおく．このとき

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}\sinh(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}\right) \tag{3.10.4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x) \tag{3.10.5}$$

を得る．次に $y = f(x) = \cosh(x)$ とおく．このとき

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}e^{-x}\right) \tag{3.10.6}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh(x) \tag{3.10.7}$$

を得る．最後に $y = f(x) = \tanh(x)$ とおく．このとき

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) = \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x} \tag{3.10.8}$$
$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{3.10.9}$$

を得る．

□

§ 3.11 逆双曲線関数の微分

定理 3.30 **（逆双曲線関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \tag{3.11.1}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cosh}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{3.11.2}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2} \tag{3.11.3}$$

□

問 3.31　これを示せ．

$y = f(x) = \sinh^{-1}(x)$ とおく．このとき逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \sinh(y), \qquad \frac{dx}{dy} = \cosh(y) \tag{3.11.4}$$

である．ここで $\cosh(y)$ を x の関数で表わす．$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ より

$$\cosh y = \pm\sqrt{1+\sinh^2 y} = \pm\sqrt{1+x^2} \tag{3.11.5}$$

である．$e^{\pm y} \geq 0$ であり $\cosh y = (e^y + e^{-y})/2 \geq 1$ となることに考慮すると，複合は正のみが採用される．よって $\cosh y = \sqrt{1+x^2}$ となる．以上より

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{3.11.6}$$

を得る．

次に $y = f(x) = \mathrm{Cosh}^{-1}x \ \geq 0$ とおく．このとき逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \cosh y, \qquad \frac{dx}{dy} = \sinh y \tag{3.11.7}$$

となる．ここで $\sinh(y)$ を x の関数で表わす．$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ より

$$\sinh y = \pm\sqrt{\cosh^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1} \tag{3.11.8}$$

である．$y \geq 0$ のとき $\sinh y \geq 0$ であるから複合は正を採用する．よって $\sinh y = \sqrt{x^2-1}$ となる．以上より

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{3.11.9}$$

を得る．

最後に $y=\tanh^{-1}x$ とおく．この逆関数とその微分は

$$x=f^{-1}(y)=\tanh y, \tag{3.11.10}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cosh^2 y}=\frac{\cosh^2 y-\sinh^2 y}{\cosh^2 y}=1-\left(\frac{\sinh y}{\cosh y}\right)^2=1-\tanh^2 y=1-x^2 \tag{3.11.11}$$

となる．よって

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\cosh^2 y}}=\frac{1}{1-x^2} \tag{3.11.12}$$

を得る．

□

§ 3.12 高階導関数

定義 3.32 **（高階導関数）** 関数 $f'(x)$ が微分可能のとき，$f'(x)$ の導関数

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \tag{3.12.1}$$

を **2 階導関数（second order derivative）** という．このとき $f(x)$ は **2 回微分可能（two times differentiable）** と呼ぶ．同様に $f(x)$ を n 回繰り返し微分した関数を n **階導関数（n-th order derivative）** といい，$f^{(n)}(x)$ と書き表わす．関数 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(n)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h} \qquad (n=1,2,3,\cdots) \tag{3.12.2}$$

と再帰的に定義する．ただし $f^{(0)}(x)=f(x)$ とする．$f^{(n)}(x)$ が存在するとき $f(x)$ は n **回微分可能（n times differentiable）** という．

□

例 3.33 **（高階導関数の計算例）** $y=x^{\alpha}$ の高階導関数を求める．α が自然数ではないとき，

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}, \tag{3.12.3}$$
$$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \tag{3.12.4}$$
$$y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \tag{3.12.5}$$
$$\cdots$$
$$y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \tag{3.12.6}$$
$$y^{(n+1)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)x^{\alpha-n-1} \tag{3.12.7}$$
$$\cdots$$

を得る．α が自然数 $\alpha=n$ のとき，

$$y=x^{\alpha}, \tag{3.12.8}$$
$$y'=\alpha x^{\alpha-1}, \tag{3.12.9}$$
$$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \tag{3.12.10}$$
$$y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \tag{3.12.11}$$
$$\cdots$$
$$y^{(\alpha-1)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots 2\cdot x, \tag{3.12.12}$$
$$y^{(\alpha)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots 2\cdot 1, \tag{3.12.13}$$
$$y^{(\alpha+1)}=0, \tag{3.12.14}$$
$$y^{(\alpha+2)}=0 \tag{3.12.15}$$
$$\cdots$$

を得る．

□

例 3.34 **(高階導関数の計算例)** $y=e^{ax}$ の高階導関数を求める．合成関数の微分を繰り返して

$$y = e^{ax}, \tag{3.12.16}$$
$$y' = a e^{ax}, \tag{3.12.17}$$
$$y'' = a^2 e^{ax}, \tag{3.12.18}$$
$$y''' = a^3 e^{ax}, \tag{3.12.19}$$
$$\cdots$$
$$y^{(n)} = a^n e^{ax} \tag{3.12.20}$$

を得る． □

例 3.35 **(高階導関数の計算例)**

$$y = \sin x, \tag{3.12.21}$$
$$y' = \cos x, \tag{3.12.22}$$
$$y'' = -\sin x, \tag{3.12.23}$$
$$y''' = -\cos x, \tag{3.12.24}$$
$$y^{(4)} = \sin x, \tag{3.12.25}$$
$$\cdots \tag{3.12.26}$$
$$y^{(n)} = \begin{cases} \sin x & (n=4k) \\ \cos x & (n=4k+1) \\ -\sin x & (n=4k+2) \\ -\cos x & (n=4k+3) \end{cases} \tag{3.12.27}$$
$$y^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right). \tag{3.12.28}$$

□

問 3.36 **(高階導関数の例)** $y=\cos x, y=\sinh x, y=\cosh x$ の $y^{(n)}$ を求めよ． □

例 3.37 **（高階導関数の計算例）**

$$y = \sqrt{1-x}, \tag{3.12.29}$$
$$y' = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \tag{3.12.30}$$
$$y'' = -\frac{1}{2\cdot 2}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}, \tag{3.12.31}$$
$$y''' = -\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}, \tag{3.12.32}$$
$$y^{(4)} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^7}}, \tag{3.12.33}$$
$$\vdots \tag{3.12.34}$$
$$y^{(n)} = -\frac{(2n-3)!!}{2^n}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{2n-1}}} \tag{3.12.35}$$

ただし

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1, \tag{3.12.36}$$
$$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2, \tag{3.12.37}$$
$$0!! = (-1)!! = 1 \tag{3.12.38}$$

と定義する. □

問 3.38 参考書（p.52）問題 3-3. □

§ 3.13 C^n 級の関数

定理 3.39 **（微分可能性と連続性）** $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき，$f(x)$ は $x=a$ で連続である．

（証明）点 $x=a$ で微分が可能なので

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a) \tag{3.13.1}$$

が成り立つ．これより

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=0 \tag{3.13.2}$$

となる．ここで

$$\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a) \tag{3.13.3}$$

とおく．このとき

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \tag{3.13.4}$$

である．(3.13.3) 式を変形すると

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a) \tag{3.13.5}$$

となる．右辺を $x\to a$ の極限をとる．すると

$$\lim_{x\to a}\big(f'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\big)=f'(a)\times 0+0\times 0=0 \tag{3.13.6}$$

である．よって左辺も 0 となるので

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}f(x)=f(a) \tag{3.13.7}$$

を得る．よって $f(x)$ は $x=a$ で連続である． □

定義 3.40 **（C^n 級関数）** $f(x)$ が連続関数のとき $f(x)$ を C^0 **級の関数**という．関数 $f(x)$ が n 回微分可能であり，$f^{(n)}(x)$ が連続関数であるとき，$f(x)$ を n **回連続微分可能な関数**といい，C^n **級の関数**という．また何回でも微分が可能な関数を**無限回微分可能な関数**といい，C^∞ **級の関数**という． □

例 3.41 **（C^n 級関数の具体例）** 多項式関数，$\sin x$, e^x は C^∞ 級の関数である． □

注意 3.42 **(C^n 級関数の集合)** C^n 級の関数全体の集合を C^n と書くとする．このとき

$$C^0 \subset C^1 \subset C^2 \subset \cdots \subset C^n \subset \cdots \subset C^\infty \tag{3.13.8}$$

が成り立つ．

□

例 3.43 **(C^n 級関数の具体例)**

$$C^0 \ni |x|, \qquad C^1 \ni f(x) = \begin{cases} -x^2 & (x \geq 0) \\ x^2 & (x \leq 0) \end{cases} \qquad C^2 \ni |x^3| \tag{3.13.9}$$

□

§ 3.14 接線の方程式

定義 3.44 **(接線)**　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $P(a,f(a)),Q(a+h,f(a+h))$ を通る直線 l を考える．極限 $h\to 0$ において直線 l が直線 L に近づくとする．このとき直線 L を関数 $f(x)$ の点 $x=a$ における**接線（tangent）**と呼ぶ． □

定理 3.45 **(接線の方程式)**　関数 $f(x)$ の点 $x=a$ における**接線の方程式**は

$$y=f(a)+f'(a)(x-a) \tag{3.14.1}$$

である．

（証明）点 $(a,f(a))$ と $(a+h,f(a+h))$ を通る直線の方程式は

$$y=f(a)+\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}(x-a) \tag{3.14.2}$$

である．$h\to 0$ の極限をとると微分係数の定義より

$$y=f(a)+f'(a)(x-a) \tag{3.14.3}$$

を得る． □

注意 3.46 **(関数の線形近似)**　接線の方程式は点 $x=a$ における関数 $f(x)$ の **1 次（線形）近似**ともいう．ちなみに関数 $f(x)$ の $x=a$ における **0 次近似**は $y=f(a)$ である． □

例 3.47 **(接線の方程式の具体例)**　関数 $f(x)=x^3$ の点 $x=2$ における接線の方程式は

$$y=12x-16 \tag{3.14.4}$$

である． □

問 3.48　参考書（p.46）問題 3-2. □

§ 3.15 ちょっとまとめ

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n)}(x)$
c (定数)	0	0	0	0
x^{α} $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$	$\dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}x^{\alpha-n} \quad (n \leq \alpha \in \mathbb{N})$ $0 \quad (n < \alpha \in \mathbb{N})$ $\dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}x^{\alpha-n} \quad (\alpha \notin \mathbb{N})$
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$			
$\log_a x$	$\dfrac{1}{(\log a)\,x}$			
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
a^x	$(\log a)\,a^x$	$(\log a)^2\,a^x$	$(\log a)^3\,a^x$	$(\log a)^n\,a^x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$			
$\mathrm{Sin}^{-1}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$			
$\mathrm{Cos}^{-1}x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$			
$\mathrm{Tan}^{-1}x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$			
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$			
$\sinh^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$			
$\mathrm{Cosh}^{-1}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$			
$\tanh^{-1} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$			

問 3.49　上の表の空いている個所を埋めよ． □

4 数列

§ 4.1 数列

定義 4.1 **（数列）** **数列（sequence）**とは数を順番に並べたものであり，

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots \tag{4.1.1}$$
$$= \{a_n \,|\, n = 1, 2, 3, \cdots\} \tag{4.1.2}$$
$$= \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{a_n\} \tag{4.1.3}$$

と書き表す．n 番目の数を**第 n 項**と呼ぶ．第 n 項を n に関する式で書き下したものを**一般項（general term）**と呼ぶ．第 n 項，第 $n+1$ 項，$\cdots$, 第 $n+k$ 項の間の関係を書き下した式を**漸化式（recurrence relation）**と呼ぶ． □

例 4.2 **（数列の一般項と漸化式の具体例）**

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots \quad \text{一般項：} \quad a_n = n, \quad \text{漸化式：} \quad a_{n+1} - a_n = 1. \tag{4.1.4}$$
$$\{a_n\} = 1, 4, 7, 10, 13, \cdots \quad \text{一般項：} \quad a_n = 3n - 2, \quad \text{漸化式：} \quad a_{n+1} - a_n = 3. \tag{4.1.5}$$
$$\{a_n\} = 2, 4, 8, 16, 32, \cdots \quad \text{一般項：} \quad a_n = 2^n, \quad \text{漸化式：} \quad a_{n+1} = 2a_n. \tag{4.1.6}$$

□

数列についていくつか種類をあげる．

定義 4.3 **（等差数列）** 数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項の差が一定の数列を**等差数列（arithmetical progression sequence）**と呼ぶ．すなわち，漸化式と一般項とがそれぞれ

$$a_{n+1} - a_n = a, \qquad a_n = an + b \tag{4.1.7}$$

と表される数列を指す． □

定義 4.4 **（等比数列）** 数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項の比が一定の数列を**等比数列（geometrical progression sequence）**と呼ぶ．すなわち，漸化式と一般項とがそれぞれ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \qquad a_n = ar^{n-1} \tag{4.1.8}$$

と表される数列を指す． □

例 4.5 **（等差数列と等比数列の具体例）** 数列（4.1.4）は $a_{n+1} - a_n = 1$ を満たすので等差数列である．数列（4.1.5）は $a_{n+1} - a_n = 3$ を満たすので等差数列である．数列（4.1.6）は $a_{n+1}/a_n = 2$ を満たすので等比数列である． □

§ 4.2 数列の極限

数列 $\{a_n\}$ が

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \tag{4.2.1}$$

と与えられたとする．この数列 $\{a_n\}$ は n が限りなく大きくなるにつれて 0 にどんどんと近づいて行く．このことを数学的には，数列 $\{a_n\}$ は**極限（limit）**が存在し 0 に**収束する（convergent）**，という．一般的には次のように表現する．

定義 4.6 **（数列の極限）**

$$\begin{aligned}
&n \text{ が限りなく大きくなるにつれて，} && (4.2.2)\\
&\quad a_n \text{ は限りなくある確定した有限値 } a \text{ に近づいて行く．} && (4.2.3)\\
&\quad \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a && (4.2.4)\\
&\quad \Leftrightarrow a_n \to a \quad (n \to \infty) && (4.2.5)\\
&\quad \Leftrightarrow a_n \text{ の極限は } a \text{ である．} && (4.2.6)\\
&\quad \Leftrightarrow a_n \text{ は } a \text{ に収束する．} && (4.2.7)
\end{aligned}$$

収束しない場合を**発散する（divergent）**という． □

注意 4.7 **（数列の極限に関する注意）** 数列（4.2.1）は $a_n = 1/n > 0$ であるので，a_n がいかに 0 に近づいたとしても，決して 0 になることはない．$a_n \neq 0$ である．$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ の意味はあくまでも，数列 a_n は 0 に近づいて行く，という意味である． □

例 4.8 **（負巾で表される数列の極限）** 次の一般項をもつ数列をそれぞれ考える：

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad a_n = \frac{1}{n^3}, \qquad \cdots, \qquad a_n = \frac{1}{n^p}, \qquad \cdots \tag{4.2.8}$$

すべての数列に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．これは標語的に書くと $a_\infty = \frac{1}{\infty} = 0$ である．このとき数列は有限確定である． □

§ 4.3 発散する数列のいろいろ

例 4.9 **(プラス無限大に無限確定な数列)**

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots. \tag{4.3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty. \tag{4.3.2}$$

a_n は**プラス無限大（∞）に発散**する．a_n は**無限確定**である． □

例 4.10 **(マイナス無限大に無限確定な数列)**

$$\{a_n\} = -1, -2, -3, \cdots, -n, \cdots. \tag{4.3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty. \tag{4.3.4}$$

a_n は**マイナス無限大（$-\infty$）に発散**する．a_n は無限確定である． □

例 4.11 **(有限不確定な数列)**

$$\{a_n\} = 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots. \tag{4.3.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \quad ：発散. \tag{4.3.6}$$

有限な値に確定しないので a_n は発散する．$-1 \leq a_n \leq 1$ が成立している．a_n は有限の範囲内に押さえられ**振動的**なふるまいをする．a_n は**有限不確定**である． □

例 4.12 **(無限不確定な数列)**

$$\{a_n\} = 1, -2, 3, -4, \cdots, (-1)^{n-1}n, \cdots. \tag{4.3.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}n \quad ：発散. \tag{4.3.8}$$

a_n は有限な値に確定しない． $|a_n|$ は増大して行く．ゆえに a_n は**無限不確定**である． □

§ 4.4 数列の極限に関する定理

注意 4.13 **(不定形)** 四則演算と極限の操作は一般に交換可能ではない．極限操作をし
不定形

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \tag{4.4.1}$$

と呼ばれる形になるときは注意が必要である．このままではまだ有限確定とも無限確定とも分からない．もしこの形のになるときは式変形をした後に極限操作を行う．極限が**有限確定**または**無限確定**

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{1} = \infty, \quad \infty + \infty = \infty. \tag{4.4.2}$$

するように計算方法を工夫する． □

次の定理はある条件の下では方程式の項の移行が可能であることを意味する．

定理 4.14 **(数列の極限に関する定理)**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{4.4.3}$$

□

一般には極限操作と四則演算は交換可能ではないがある条件の下では可能である．次の定理はそれを保証する．

定理 4.15 **(数列の極限に関する定理)** 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に関して極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \tag{4.4.4}$$

が存在するとき，次の関係式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b. \tag{4.4.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\, a_n + \beta\, a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\, a + \beta\, b. \tag{4.4.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = ab. \tag{4.4.7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0\text{ のとき}). \tag{4.4.8}$$

ただし α, β は定数とする． □

$\boxed{\text{定理 4.16}}$ **（はさみうちの定理）** 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{4.4.9}$$

を満たすとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \tag{4.4.10}$$

ならば,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a \tag{4.4.11}$$

が成り立つ. □

§ 4.5 収束する数列のいろいろ

例 4.17 **(有理式で表される数列の極限)** 一般項が

$$a_n = \frac{2n^2+1}{3n^2+5n-1} \tag{4.5.1}$$

により与えられる数列を考える．定理を適用して計算を試みる．分子分母の極限をとり，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5n-1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)}{\lim_{n\to\infty}(3n^2+5n-1)} = \frac{\infty}{\infty}. \quad \leftarrow \text{不確定} \tag{4.5.2}$$

を得るがこれは誤りである．そもそも分子分母はそれぞれ発散するので定理は適用不可である．あらためて計算を行なう：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)} \tag{4.5.3}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}(2) + \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}(3) + \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+0}{3+0-0} = \frac{2}{3}. \quad \leftarrow \text{有限確定} \tag{4.5.4}$$

今回は有限確定となり極限が求まる．計算の途中においては，定理が適用可能であるかの判断は難しい．最終形まで計算した結果が有限確定または無限確定であれば，途中の計算も定理が適用可能であることが多い．

次に一般項が

$$a_n = \frac{n^2+5n+1}{n+2} \tag{4.5.5}$$

で与えられる数列を考える．式を変形して極限を考える：

$$a_n = \frac{n^2+5n+1}{n+2} = \frac{n+5/n+1/n^2}{1+2/n} \to \frac{\infty}{1} = \infty. \qquad \leftarrow \text{無限確定} \tag{4.5.6}$$

最後に一般項が

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} \tag{4.5.7}$$

である数列の極限を考える．式を変形して極限を考える：

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{1/n+4/n^2}{1-3/n+1/n^2} \to \frac{0+0}{1-0+0} = \frac{0}{1} = 0. \qquad \leftarrow \text{有限確定} \tag{4.5.8}$$

以上をまとめると，有理式で表される数列の極限は，有理式の最大次数の巾で分子分母を割った後に極限をとればよい．

□

例 4.18 **（根号を含む数列の極限）** 一般項が

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3} \tag{4.5.9}$$

で与えられる数列の極限を考える．式を次のように変形した後に極限をとる：

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3} = \frac{\sqrt{n/n^2}}{1+3/n} = \frac{\sqrt{1/n}}{1+3/n} \to \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0\,. \tag{4.5.10}$$

□

問 4.19 参考書（p.12）第 1 章演習問題. □

例 4.20 **（等比数列の極限）** 等比数列 $a_n = r^n$ $(r > 0)$ の極限を考える．(i) $r > 1$, (ii) $r = 1$, (iii) $r > 1$ の場合に分けて議論する．まず，(i) $r = 1$ のとき，常に $a_n = 1$ である．極限は 1 である．つぎに，(iii) $r > 1$ のとき，$r = 1 + h$ $(h > 0)$ とおく．このとき $r > 1$ をみたす．a_n を h を用いて書き下すと

$$a_n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} h^k \tag{4.5.11}$$

を得る．ここで $\binom{n}{k}$ は**二項係数（binomial coefficient）**であり，

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{4.5.12}$$

と定義する．$n!$ は**階乗（fractorial number）**であり，

$$n! = n \times (n-1)!, \qquad 0! = 1 \tag{4.5.13}$$

と再帰的に定義する．a_n をあらためて書き直すと

$$a_n = (1+nh) + \left(\frac{n(n-1)}{2} h^2 + \cdots + n h^{n-1} + h^n \right) \tag{4.5.14}$$

となる．第三項以降を足したものは正となるので，

$$a_n > 1 + nh \tag{4.5.15}$$

を得る．$n \to \infty$ のとき $1 + nh \to \infty$ より $a_n \to \infty$ を得る．最後に，(i) $r < 1$ のときを考える．$h > 0$ を用いて r を $r = 1/(1+h)$ と置き換える．このとき $r < 1$ を満たす．h を用いて a_n を書き下すと，

$$a_n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{(1+nh) + \left(\frac{n(n-1)}{2} h^2 + \cdots + h^n \right)} < \frac{1}{1+nh} \tag{4.5.16}$$

を得る．不等式

$$0 < a_n < \frac{1}{1+nh} \tag{4.5.17}$$

が成立する．$n \to \infty$ のとき $1/(1+nh) \to 0$ であるから，はさみうちの定理より $a_n \to 0$ を得る．以上をまとめると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (r < 1) \\ 1 & (r = 1) \\ \infty & (r > 1) \end{cases} \tag{4.5.18}$$

が求まる．

□

公式 4.21 **(ネピア数)**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{4.5.19}$$

この定数 e を**ネピア数（Napier's number）**という. □

問 4.22 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ を求めよ. □

問 4.23 次の漸化式で与えられる数列の一般項と極限を求めよ.

(1) $a_{n+1} = p a_n + q$.

(2) $a_{n+2} = 2p a_{n+1} + q a_n$.

(答え) (1)

$$a_n = \begin{cases} p^{n-1}\left(a_1 - \dfrac{q}{1-p} + \dfrac{a}{1-p}\right) & (p\neq 1) \\ (n-1)q + a_1 & (p=1) \end{cases} \tag{4.5.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & (|p|\geq 1) \\ 0 & (|p|<1) \end{cases} \tag{4.5.21}$$

(2)

$$a_n = c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1} \tag{4.5.22}$$

$$\lambda_1 = p+\sqrt{p^2+q}, \qquad \lambda_2 = p-\sqrt{p^2+q}, \tag{4.5.23}$$

$$c_1 = \frac{a_1\lambda_2 - a_2}{-2\sqrt{p^2+q}}, \quad c_2 = \frac{a_2 - a_1\lambda_1}{-2\sqrt{p^2+q}} \tag{4.5.24}$$

$|\lambda_1|<1$ かつ $|\lambda_2|<1$ のとき a_n は 0 に収束する．それ以外は発散する. □

§ 4.6 数列の有界性と単調性

定義 4.24 **(有界数列)** 数列 $\{a_n\}$ に対して次の性質を定義する．

- $a_n \le M$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**上に有界（bounded from above）**であるという．M を**上界（upper bound）**と呼ぶ．
- $m \le a_n$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**下に有界（bounded from below）**であるという．m を**下界（lower bound）**と呼ぶ．
- $m \le a_n \le M$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**有界（bounded）**であるという．

有界な数列を**有界数列（bounded sequence）**と呼ぶ． □

例 4.25 **(有界な数列の具体例)** $a_n = (-1)^{n-1}$ は $-1 \le a_n \le 1$ を満たすので有界である．
□

定義 4.26 **(単調数列)** 数列 $\{a_n\}$ に対して次の性質を定義する．

- $a_n < a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**単調増加（monotonic increasing）**であるという．
- $a_n \le a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**広義の単調増加（monotonic increasing in the wider sense）**であるという．
- $a_n > a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**単調減少（monotonic decreasing）**であるという．
- $a_n \ge a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**広義の単調減少（monotonic decreasing in the wider sense）**であるという．

単調増加もしくは単調減少な数列を総称して**単調数列（monotonic sequence）**と呼ぶ． □

定理 4.27 **（有界な単調数列の収束性）** 有界な広義の単調数列は収束する． □

例 4.28 **（有界な単調数列の具体例）** 数列

$$a_n = \frac{2n-3}{5n+1} \tag{4.6.1}$$

を考える．

$$a_{n+1} - a_n = \frac{17}{(5n+6)(5n+1)} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_n < a_{n+1} \tag{4.6.2}$$

を満たすので a_n は単調増加である．初項 $a_1 = -1/6$ は下界となる．上界は

$$\frac{2}{5} - a_n = \frac{17}{5(5n+1)} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_n < \frac{2}{5} \tag{4.6.3}$$

により求まる．$-1/6 \leq a_n < 2/5$ となるので a_n は有界である．定理より a_n は収束する．実際，極限を求めると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-3/n}{5+1/n} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5} \tag{4.6.4}$$

と得られる． □

問 4.29 参考書（p.174）問題 7-2． □

§ 4.7 級数

級数（series）とは数列 $\{a_n\}$ の和である．式では

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{4.7.1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n \tag{4.7.2}$$

と書き表す．加法（足し算）は有限回の演算においてのみ定義されているので，式（4.7.1）は形式的な和である．厳密に級数を定義するには次のように考える．まず第 n 項までの有限和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{4.7.3}$$

を考える．これを**第 n 部分和（the n-th partial sum）**と呼ぶ．S_n に関する数列

$$\{S_n\} = S_1, S_2, \cdots, S_n \tag{4.7.4}$$

を考える．数列 $\{S_n\}$ の極限

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{4.7.5}$$

が存在したとする．このとき級数 $\sum a_n$ は存在し，その値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \tag{4.7.6}$$

で与えられると定義する．極限 S が存在するとき級数 $\sum a_n$ は収束すると呼ぶ．極限 S が存在しない場合は級数 $\sum a_n$ は発散すると呼ぶ．

定義 4.30 **（級数）** 数列 $\{a_n\}$ の和 $\sum a_n$ を**級数（series）**と呼び，その値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{4.7.7}$$

で定義する．この極限が存在するとき級数 $\sum a_n$ は**収束する（convergent）**といい，収束しない場合を級数 $\sum a_n$ は**発散する（divergent）**という．

□

定理 4.31 **（級数の収束）** $\sum a_n, \sum b_n$ が収束するとき，$\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ もまた収束する．ただし α, β は定数とする．このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4.7.8}$$

が成り立つ．

□

注意 4.32 **（順番の入れ替え）** 定理 4.31 は級数が収束するときに限り，各項を足し合わせる順番を入れ替えてもよいことを意味する．発散する場合は足し算の順番を入れ替えることはできない．

□

例 4.33 **（無限級数の結合則）** 数列 $a_n = (-1)^{n-1}$ の級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ を考える．すなわち

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{4.7.9}$$

である．足し算の順を入れ替えると

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \tag{4.7.10}$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \tag{4.7.11}$$

となる．また別の順で足し合わせると

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \tag{4.7.12}$$

$$= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \tag{4.7.13}$$

となる．これらは矛盾する．どこが誤りであろうか？有限の項の和の常識は無限の項の和には通用しない．この場合の間違いは足し算の順を変えたことである．この例では結合則が成り立たない．定義 4.30 に従えば級数 S は発散である．

□

例 4.34 **（等比級数）** 等比数列 $\{a_n = a r^{n-1}\}$ の無限和を**等比級数（geometrical progression series）**と呼び，

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} \tag{4.7.14}$$

と書き表す．等比級数は

$$S = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & (|r| < 1) \\ \text{発散} & (|r| \geq 1) \end{cases} \tag{4.7.15}$$

となる．

（証明）第 n 部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a r^{k-1} = a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \tag{4.7.16}$$

を考える．$r = 1$ のとき，

$$S_n = a(1 + 1 + \cdots + 1) = a n \tag{4.7.17}$$

となる．つぎに $r \neq 1$ のとき，等式

$$1 - r^n = (1-r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \tag{4.7.18}$$

を用いると S_n は

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} \tag{4.7.19}$$

と書ける．以上より

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty} a n & (r = 1) \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \end{cases} = \begin{cases} \pm\infty & (r = 1) \\ \dfrac{a}{1-r} & (-1 < r < 1) \\ \text{不確定} & (r \leq -1) \end{cases} \tag{4.7.20}$$

となる．ただし無限大の符号は a の符号 $\mathrm{sgn}(a) = a/|a|$ で決まる．証明終り． □

問 4.35 **（1 を根にもつ多項式の因数分解）** 次の等式を示せ．

$$1 - r^n = (1-r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}). \tag{4.7.21}$$

□

注意 4.36 **（初項が異なる級数）** 級数が

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a r^n \tag{4.7.22}$$

と定義されるときの値を考える．部分和は

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a r^n = a(1+r+r^2+\cdots+r^n) = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \tag{4.7.23}$$

となるから，結局級数は

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & (|r|<1) \\ \text{発散} & (|r|\geq 1) \end{cases} \tag{4.7.24}$$

と得られる． □

注意 4.37 **（等比級数の有理式表現）** $|r|<1$ のとき

$$\frac{1}{1-r} = 1+r+r^2+r^3+\cdots \tag{4.7.25}$$

とな．この式は 1 を $1-r$ で割ることでも導出される．すなわち，

$$\frac{1}{1-r} = 1+\frac{r}{1-r} \tag{4.7.26}$$

$$= 1+r+\frac{r^2}{1-r} \tag{4.7.27}$$

$$= 1+r+r^2+\frac{r^3}{1-r} \tag{4.7.28}$$

$$= 1+r+r^2+r^3+\frac{r^4}{1-r} \tag{4.7.29}$$

$$= 1+r+r^2+r^3+\cdots \tag{4.7.30}$$

のように低次項を主項として割り算を無限回続ける． □

例 4.38 **(等比級数の具体例)**

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots \tag{4.7.31}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right) \tag{4.7.32}$$
$$=a(1+r+r^2+\cdots) \tag{4.7.33}$$
$$=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1\,. \tag{4.7.34}$$

または

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{4.7.35}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \tag{4.7.36}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n} \tag{4.7.37}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1 \tag{4.7.38}$$

□

例 4.39 **(等比級数の具体例)**

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots \tag{4.7.39}$$
$$=a(1+r+r^2+r^3+\cdots) \tag{4.7.40}$$
$$=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2} \tag{4.7.41}$$

または

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n \tag{4.7.42}$$
$$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{3^n} \tag{4.7.43}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2} \tag{4.7.44}$$

□

例 4.40 **（等比級数の具体例）**

$$0.9999\cdots = 1\,. \tag{4.7.45}$$

（証明）

$$0.999\cdots = 9\times(0.111\cdots) = 9\times\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n \tag{4.7.46}$$

$$= \frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right) \tag{4.7.47}$$

$$= a(1+r+r^2+\cdots) \tag{4.7.48}$$

$$= \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1\,. \tag{4.7.49}$$

□

問 4.41 参考書（p.172）問題 7-1. □

問 4.42 **（級数の計算）**

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^n \qquad (3)\quad \sum_{n=2}^{\infty} ar^n \tag{4.7.50}$$

$$(4)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} \tag{4.7.51}$$

$$(5)\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n+3\cdot 4^n}{4\cdot 5^n} \tag{4.7.52}$$

$$(6)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n} \tag{4.7.53}$$

□

§ 4.8 正項級数

定義 4.43 **(正項級数)**　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ のうち $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすものを**正項級数** **(positive term series)** と呼ぶ. □

注意 4.44 **(正項級数の単調性)**　正項級数 $\sum a_n$ の部分和の数列 $\{S_n\}$ は単調増加である.

(証明) $S_{n+1} - S_n = a_n \geq 0$ より S_n は広義の単調増加である. 証明終了. □

定理 4.45 **(正項級数の収束定理)**　正項級数 $\sum a_n$ の部分和から得られる数列 $\{S_n\}$ が上に有界なとき, $\sum a_n$ は収束する.

(証明) S_n は広義の単調増加である. 有界な単調数列は収束するので, S_n が上に有界なとき $\sum a_n$ は収束する. 証明終了. □

例 4.46 **(正項級数の収束定理の具体例)**　正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ を考える. 部分和は

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} && (4.8.1)\\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) && (4.8.2)\\
&= a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) && (4.8.3)\\
&= a\frac{1-r^{n-1}}{1-r} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && (4.8.4)
\end{aligned}
$$

となるので

$$1 - S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_n < 1 \tag{4.8.5}$$

を得る. $\{S_n\}$ は上に有界である. よって定理より級数 $\sum(1/2)^n$ は収束する. 実際, 極限を計算すると前述の例題より $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ である. □

定理 4.47　正項級数 $\sum a_n$ に関して $\{S_n\}$ が有界なとき $\sum a_n$ は収束する. □

定理 4.48　正項級数 $\sum a_n$ が収束するとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ. □

§ 4.9 正項級数の収束性判定法

定理 4.49 **（比較判定法）** 二つの正項級数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4.9.1}$$

を考える．数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある正の整数 N に対して

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad (n \geq N) \tag{4.9.2}$$

を満たすとき，次の関係が成り立つ：

(i) T が収束するとき，S も収束する．

(ii) S が発散するとき，T も発散する．

□

例 4.50 **（比較判定法の具体例）** 級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ を考える．数列 $a_n = \frac{1}{1+2^n}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$ とする．このとき $0 < a_n < b_n$ を満たす．また，級数 $T = \sum b_n = \sum 1/2^n$ は収束する．よって定理より級数 $S = \sum 1/(1+2^n)$ もまた収束する． □

定理 4.51 **（比較判定法）** 二つの正項級数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4.9.3}$$

を考える．数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L < \infty \tag{4.9.4}$$

を満たし，かつ級数 $T = \sum b_n$ が収束するとき，級数 $S = \sum a_n$ も収束する． □

例 4.52 **（調和級数）** 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ を**調和級数（harmonic series）**という．調和級数は発散する．

（証明）調和級数

$$T=\sum_{n}^{\infty}b_n=\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \tag{4.9.5}$$

の各項を括り直して

$$T=\sum_{n}^{\infty}\tilde{b}_n=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\right)+\cdots \tag{4.9.6}$$

と考える．ここで $\tilde{b}_n$ は

$$\tilde{b}_1=1, \tag{4.9.7}$$

$$\tilde{b}_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \tag{4.9.8}$$

$$\tilde{b}_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}, \tag{4.9.9}$$

$$\tilde{b}_4=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15} \tag{4.9.10}$$

であり，

$$\tilde{b}_n=\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}}_{2^{n-1}}=\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{1}{k} \tag{4.9.11}$$

とおいている．$a_n<\tilde{b}_n$ を満たす a_n をさがす．$\tilde{b}_n$ に関して不等式

$$\tilde{b}_n=\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}}_{2^{n-1}} \tag{4.9.12}$$

$$>\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}}=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2} \tag{4.9.13}$$

が成り立つので，$a_n=1/2$ とおけば $a_n<\tilde{b}_n$ を得る．よって比較判定法より

$$0<a_n<\tilde{b}_n,\quad S_n<T_n \qquad\Rightarrow\quad S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty,\quad T=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty \tag{4.9.14}$$

を得る．以上証明終り．

□

定理 4.53 **(ダランベールの収束判定法)** 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0)$ は，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{4.9.15}$$

により，級数の収束性の判定ができる：

(i) $0 \leq L < 1$ のとき，$\sum a_n$ は収束する．

(ii) $L > 1$ のとき，$\sum a_n$ は発散する．

(iii) $L = 1$ のとき，$\sum a_n$ の収束性は判定できない．

□

例 4.54 **(ダランベールの判定法の具体例)** 級数

$$S = 1 + |x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3!} + \cdots + \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.9.16}$$

を考える．$a_n = \dfrac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} > 0$ であるから，S は正項級数である．よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} \frac{(n-1)!}{|x|^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0 \tag{4.9.17}$$

が成り立つので，ダランベールの判定法より級数は収束する． □

例 4.55 **(ダランベールの判定法で判定できない例)** 調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ を考える．隣り合う項の比の極限は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \tag{4.9.18}$$

となるのでダランベールの判定法定法では判定できない．前述のように別の方法で行う． □

問 4.56 参考書（p.180）問題 7-3. □

定理 4.57 **（コーシーの収束判定法）** 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ は，極限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \tag{4.9.19}$$

により，級数の収束性の判定ができる：

(i) $0 \leq L < 1$ のとき，$\sum a_n$ は収束する．

(ii) $L > 1$ のとき，$\sum a_n$ は発散する．

(iii) $L = 1$ のとき，$\sum a_n$ の収束性は判定できない．

□

§ 4.10 交項級数

定義 4.58 **(交項級数)** 級数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n \quad (b_n \geq 0) \tag{4.10.1}$$

を**交項級数（alternative term series）**と呼ぶ. □

定理 4.59 **(交項級数の収束定理)** 交項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ は次の条件を満たすとき収束する：

(i) $b_n \geq b_{n+1}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

（証明）n が偶数のときの有限部分和

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} (b_{2k-1} - b_{2k}) \tag{4.10.2}$$

はと書ける．条件より $b_{2k-1} - b_{2k} \geq 0$ となるので，$S_{2n} \geq 0$ となる．また $S_2, S_4, \cdots, S_{2n}, \cdots$ は単調増加となる．さらには S_{2n} は

$$S_{2n} = b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (b_{2k} - b_{2k+1}) - b_{2n} \tag{4.10.3}$$

とも書ける．$b_{2k} - b_{2k+1} \geq 0, b_{2k} \geq 0$ であるから，$S_{2n} \leq b_1$ となる．よって S_n は

$$0 \leq S_{2n} \leq b_1 \tag{4.10.4}$$

を満たす．S_{2n} は有界な単調増加数列である．よって S_{2n} は極限 $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ が存在する．次に n が奇数にる場合を考える．S_{2n+1} の極限は

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + b_{2n+1}) = S + 0 = S \tag{4.10.5}$$

と得られる．以上で証明終了. □

例 4.60 **(交項級数の収束定理の具体例)** 級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ は収束する．なぜなら $b_n = 1/2^n > b_{n+1} = 1/2^{n+1}$ であり，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるから，定理より級数は収束する. □

例 4.61 **(交項級数の収束定理の具体例)** 級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束する．なぜなら $b_n = 1/n > b_{n+1} = 1/(n+1)$ であり，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるから，定理より級数は収束する. □

§ 4.11 絶対収束級数

$\boxed{\text{定理 4.62}}$ **（絶対収束級数の収束定理）** 級数 $\sum|a_n|$ が収束するとき，級数 $\sum a_n$ も収束する．

（証明）有限部分和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \tag{4.11.1}$$

を考える．絶対値の性質より

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = T_n \tag{4.11.2}$$

が成り立つ．これより

$$S_n + T_n = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \leq 2T_n \tag{4.11.3}$$

となる．$a_n + |a_n| \geq 0$ より $S_n + T_n$ は正項級数である．正項級数 $2T_n$ が収束するとき $S_n + T_n$ もまた収束する．よって T_n が収束するとき，S_n も収束する． □

$\boxed{\text{定義 4.63}}$ **（絶対収束級数）** $\sum a_n$ が収束し，かつ $\sum|a_n|$ も収束するとき，$\sum a_n$ は**絶対収束する（absolutely convergent）**という．このとき級数 $\sum a_n$ を**絶対収束級数（absolutely convergent series）**と呼ぶ． □

$\boxed{\text{定義 4.64}}$ **（条件収束級数）** $\sum a_n$ は収束するが $\sum|a_n|$ が収束しない場合は，$\sum a_n$ は**条件収束する（conditionally convergent）**という．このとき級数 $\sum a_n$ は**条件収束級数（conditionally convergent series）**と呼ぶ． □

例 4.65 **（絶対収束級数の具体例）** 等比級数の例題で示したように $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は収束する．交項級数の例題で示したように $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ は収束する．よって $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ は絶対収束級数である． □

例 4.66 **（条件収束級数の具体例）** 交項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は前述の例題で示したように収束する．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は調和級数であり前述の例題のとおり発散する．よって $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は条件収束級数である． □

例 4.67 **（絶対収束級数の収束定理の具体例）** 級数

$$S = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.11.4}$$

を考える．このとき

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + |x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3!} + \cdots + \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \tag{4.11.5}$$

が成り立つ．ダランベールの判定法の例題で示したように，T は収束する．$\sum |a_n|$ が収束するとき $\sum a_n$ も収束するので，T が収束するとき S もまた収束する．S は絶対収束級数である． □

問 4.68 参考書（p.183）問題 7-4. □

5 テイラー級数

§ 5.1 巾級数

定義 5.1 **（巾級数）** 定数 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ と変数 x を考える．このとき級数

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{5.1.1}$$

を**巾級数（power series）**または**整級数（polynomial series）**と呼ぶ．同様に級数

$$c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{5.1.2}$$

を $x-a$ の巾級数と呼ぶ． □

定義 5.2 **（収束半径）** 巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ は $|x-a| < r$ のとき絶対収束し，$|x-a| > r$ のとき発散する．定数 $r > 0$ を**収束半径（radius of convergence）**と呼ぶ． □

例 5.3 **（収束半径の具体例）** 巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{5.1.3}$$

は $|x| < 1$ のとき収束する（公比が x の等比級数であるから）．よって収束半径は $r = 1$ である．

巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{5.1.4}$$

は任意の有限の実数 x に対して収束する（例題 4.67）．すなわち $|x| < \infty$ において収束する．このとき収束半径は $r = \infty$ と表わす． □

定理 5.4 **（収束半径の計算法）** 巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ を考える．極限

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{5.1.5}$$

または

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{5.1.6}$$

が存在するとき，巾級数 $\sum c_n(x-a)^n$ の収束半径は r である．

（証明）級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ とその絶対級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x-a)^n|$ を考える．このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x-a)^n| \tag{5.1.7}$$

であるので，$\sum |c_n(x-a)^n|$ が収束するとき $\sum c_n(x-a)^n$ も収束する．$\sum a_n = \sum |c_n(x-a)^n|$ とおくと，$a_n = |c_n(x-a)|^n \geq 0$ であるから $\sum a_n$ は正項級数となる．ゆえにダランベールの収束判定法（定理 4.53）より，級数 $\sum a_n$ は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \tag{5.1.8}$$

のとき収束する．よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|c_n(x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \frac{|x-a|^{n+1}}{|x-a|^n} \tag{5.1.9}$$

$$= |x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1 \tag{5.1.10}$$

となる．これより

$$|x-a| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{5.1.11}$$

を得る．以上より収束半径は

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{5.1.12}$$

と求まる．同様にしてコーシーの収束判定法（定理 4.57）より $r = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{|c_n|}$ が求まる． □

例 5.5 **（収束半径の計算例）** 巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \tag{5.1.13}$$

の収束半径を求める．$c_n = 1$ であるから，収束半径は

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1 \tag{5.1.14}$$

と求まる．巾級数 $\sum x^n$ は $|x| < r = 1$ のとき収束し，$|x| > r = 1$ のとき発散する．

巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{5.1.15}$$

の収束半径を求める．$c_n = 1/n!$ であるから，収束半径は

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \tag{5.1.16}$$

と求まる．収束半径は $r = \infty$ である．巾級数 $\sum x^n/n!$ は任意の実数 x に対して収束する．

巾級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \cdots \tag{5.1.17}$$

の収束半径を求める．$c_n = (-1)^{n-1}/n$ であるから，収束半径は

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{n+1}{(-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \tag{5.1.18}$$

と求まる．巾級数 $\sum (-1)^{n-1} x^n/n$ は $|x| < r = 1$ のとき収束し，$|x| > r = 1$ のとき発散する． □

問 5.6 参考書（p.191）問題 7-5 1. □

§ 5.2 テイラー級数

巾級数 $\sum c_n (x-a)^n$ は x についての関数である．これを

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad (|x-a| < r) \tag{5.2.1}$$

$$= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{5.2.2}$$

とおく．数列 $\{c_n\}$ が一つ与えられると関数 $f(x)$ が一つ定まる．すなわち

$$\text{数列：}\{c_n\} \quad \to \quad \text{関数：}f(x) \quad (|x-a| < r) \tag{5.2.3}$$

との対応関係がある．それでは関数 $f(x)$ が一つ与えられたとき，巾級数 $\sum c_n(x-a)^n$ の係数である $\{c_n\}$ はどのような値に定まるであろうか．すなわち，問題として対応関係

$$\text{関数：}f(x) \quad \to \quad \text{数列：}\{c_n\} = ? \tag{5.2.4}$$

を考える．

定理 5.7 **（テイラー級数）** 関数 $f(x)$ が ∞ 回微分可能なとき，

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \tag{5.2.5}$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \tag{5.2.6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n \qquad (|x-a| < r) \tag{5.2.7}$$

が成り立つ．ただし点 $x = a$ は定義内のある点とする．この巾級数を関数 $f(x)$ に関する $x = a$ まわりの**テイラー級数（Taylor series）**と呼ぶ．特に $a = 0$ のときは，**マクローリン級数（Maclaurin series）**と呼ぶ．

□

注意 5.8 **（テイラー級数の収束半径）** テイラー級数は巾級数 $\sum c_n(x-a)^n$ を

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{5.2.8}$$

とおいたものである．よってテイラー級数の収束半径は

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \frac{(n+1)!}{f^{(n+1)}(a)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| (n+1) \frac{f^{(n)}(a)}{f^{(n+1)}(a)} \right| \tag{5.2.9}$$

により求まる．

□

§ 5.3 テイラー級数の導出

巾級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{5.3.1}$$

を考える．関数 $f(x)$ が与えられたとし，テイラー級数の係数 $\{c_n\}$ を導出する．x が a に十分近いとき $(x-a)^n$ は次数 n が大きいほど小さくなる．つまり小さい次数の項が主要な項となる．よって小さい次数の係数より順に値を定めて行く．

まず巾級数

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + c_5(x-a)^5 + \cdots \tag{5.3.2}$$

に $x = a$ を代入する．すると

$$f(a) = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0 \tag{5.3.3}$$

となる．よって係数を $c_0 = f(a)$ と定める．巾級数は

$$f(x) = f(a) + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + c_5(x-a)^5 + \cdots \tag{5.3.4}$$

となる．両辺を微分すると

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + 5c_5(x-a)^4 + \cdots \tag{5.3.5}$$

を得る．ここに $x = a$ を代入すると

$$f'(a) = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1 \tag{5.3.6}$$

となるので係数を $c_1 = f'(a)$ と定める．このとき巾級数とその導関数は

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + c_5(x-a)^5 + \cdots \tag{5.3.7}$$

$$f'(x) = f'(a) + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + 5c_5(x-a)^4 + \cdots \tag{5.3.8}$$

となる．これで 1 次の項までの係数が定まった．$f(x)$ の最初の二つの項までをみると $x = a$ における接線の方程式となっている．次に 2 階，3 階の導関数と求めて行くと

$$f''(x) = 2\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3(x-a) + 4\cdot 3\cdot c_4(x-a)^2 + 5\cdot 4\cdot c_5(x-a)^3 + \cdots \tag{5.3.9}$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2\cdot c_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_4(x-a) + 5\cdot 4\cdot 3\cdot c_5(x-a)^2 + \cdots \tag{5.3.10}$$

$$f^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_5(x-a) + \cdots \tag{5.3.11}$$

$$f^{(5)}(x) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_5 + \cdots \tag{5.3.12}$$

となる．$x = a$ を代入すると

$$f''(a) = 2\cdot c_2 + 0 + 0 + \cdots \tag{5.3.13}$$

$$f'''(a) = 3\cdot 2\cdot c_3 + 0 + 0 + \cdots \tag{5.3.14}$$

$$f^{(4)}(a) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_4 + 0 + 0 + \cdots \tag{5.3.15}$$

$$f^{(5)}(a) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_5 + 0 + 0 + \cdots \tag{5.3.16}$$

となるので係数が

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \quad c_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4!}, \quad c_5 = \frac{f^{(5)}(a)}{5!} \tag{5.3.17}$$

と定まる．同様な操作を繰り返せば

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{5.3.18}$$

を得る．

§ 5.4 テイラー級数の具体例

例 5.9 **(指数関数のテイラー級数)**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (|x| < \infty). \tag{5.4.1}$$

（導出）$f(x) = e^x$ とおく．導関数を計算すると

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x, \quad \cdots \quad f^{(n)}(x) = e^x \tag{5.4.2}$$

となる．点 $x = 0$ における微分係数は

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = 1, \quad \cdots \quad f^{(n)}(0) = 1 \tag{5.4.3}$$

である．よってテーラー級数は

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{5.4.4}$$

と求まる．巾級数 $\sum c_n (x-a)^n$ の収束半径 r を求める．係数は

$$c_n = \frac{1}{n!} \tag{5.4.5}$$

であるから，収束半径として

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \tag{5.4.6}$$

を得る．

□

例 5.10 **(三角関数のテイラー級数)**

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (|x| < \infty). \tag{5.4.7}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (|x| < \infty). \tag{5.4.8}$$

（導出）$f(x) = \sin x$ とおく．導関数を計算すると

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \quad \cdots \tag{5.4.9}$$

である．一般的に書くと

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n = 4k) \\ \cos x & (n = 4k+1) \\ -\sin x & (n = 4k+2) \\ -\cos x & (n = 4k+3) \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{5.4.10}$$

である．点 $x=0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & (n=4k) \\ 1 & (n=4k+1) \\ 0 & (n=4k+2) \\ -1 & (n=4k+3) \end{cases} \qquad (k=0,1,2,3,\cdots) \tag{5.4.11}$$

と求まる．これを用いてテーラー級数を求めると

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n && (5.4.12)\\
&\quad (n=4k, n=4k+1, n=4k+2, n=4k+3; k=0,1,2,\cdots) && (5.4.13)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4k)}(0)}{(4k)!}x^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4k+1)}(0)}{(4k+1)!}x^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4k+2)}(0)}{(4k+2)!}x^{4k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4k+3)}(0)}{(4k+3)!}x^{4k+3} && (5.4.14)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!}x^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(4k+3)!}x^{4k+3} && (5.4.15)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2(2k)+1)!}x^{2(2k)+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(2(2k+1)+1)!}x^{2(2k+1)+1} && (5.4.16)\\
&\quad (l=2k, l=2k+1; k=0,1,2,\cdots) && (5.4.17)\\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}x^{2l+1} && (5.4.18)\\
&\quad (l=n-1; n=1,2,3,\cdots) && (5.4.19)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} && (5.4.20)
\end{aligned}$$

を得る．収束半径を求める．

$$c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \tag{5.4.21}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\frac{(2n+1)!}{(-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} && (5.4.22)\\
&= \lim_{n\to\infty}(2n+1)(2n) = \lim_{n\to\infty}(4n^2+2n) = \infty && (5.4.23)
\end{aligned}$$

が得られる． □

例 5.11 **（対数関数のテイラー級数）**

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots\quad(|x|<1). \tag{5.4.24}$$

（導出）$f(x)=\log(1+x)$ とおく．導関数を計算すると

$$f(x)=\log(1+x),\quad f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3},\quad\cdots \tag{5.4.25}$$

となる．一般的には $n\geq 1$ に対して

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+1)}{(1+x)^n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \tag{5.4.26}$$

と表わされる．点 $x=0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \tag{5.4.27}$$

となる．よってテーラー級数は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{5.4.28}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \tag{5.4.29}$$

と得られる．収束半径 r を求める．

$$c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{5.4.30}$$

とおくと，

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{n+1}{(-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1 \tag{5.4.31}$$

と得られる．

□

例 5.12 **（有理関数のテイラー級数）**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad (|x| < 1) \tag{5.4.32}$$

（導出）$f(x) = 1/(1-x)$ とおく．導関数を計算すると

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2\cdot 1}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{(1-x)^4}, \quad \cdots \tag{5.4.33}$$

である．一般的には

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.4.34}$$

と表わされる．点 $x = 0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0) = n!, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.4.35}$$

と得られる．よってテーラー級数は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{5.4.36}$$

となる．収束半径 r は $c_n = 1$ とおくと

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 1 \tag{5.4.37}$$

と得られる．

□

例 5.13 **(多項式のテイラー級数)** α が自然数以外の実数のとき,

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad (|x|<1) \tag{5.4.38}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n. \tag{5.4.39}$$

α が自然数のとき,

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^{\alpha-2}+\alpha x^{\alpha-1}+x^\alpha \quad (|x|<\infty) \tag{5.4.40}$$

$$= \sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}x^n. \tag{5.4.41}$$

(導出) $f(x)=(1+x)^\alpha$ とおく. 導関数を計算すると

$$f(x)=(1+x)^\alpha, \quad f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \tag{5.4.42}$$

$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, \quad \cdots \tag{5.4.43}$$

である. α が自然数の場合と, それ以外の場合に分けて考える. まず α が自然数以外の実数のときを考える. 導関数は

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \tag{5.4.44}$$

$$=\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!}(1+x)^{\alpha-n} \tag{5.4.45}$$

と表わされる. 点 $x=0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0)=\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!} \tag{5.4.46}$$

となる. よってテーラー級数は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \tag{5.4.47}$$

と求まる. 収束半径 r は

$$c_n=\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!} \tag{5.4.48}$$

とおくと,

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!}\frac{(\alpha-n-1)!(n+1)!}{\alpha!}\right| \tag{5.4.49}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+1/n}{\alpha/n-1}\right|=1 \tag{5.4.50}$$

と得られる．次に α が自然数のときを考える．導関数は

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}(1+x)^{\alpha-n} & (n\leq\alpha)\\ 0 & (n>\alpha)\end{cases} \tag{5.4.51}$$

と表わされる．点 $x=0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!} & (n\leq\alpha)\\ 0 & (n>\alpha)\end{cases} \tag{5.4.52}$$

と求まる．よってテーラー級数は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\alpha}\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!}x^n=\sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}x^n \tag{5.4.53}$$

と得られる．この展開式は有限項の和であり，有限次数の多項式である．α が自然数のときのテーラー展開は二項展開となる．展開式は多項式であり任意の実数 x に対して成立する．よって $|x|<\infty$ であり，収束半径は $r=\infty$ となる． □

問 5.14　参考書（p.191）問題 7-5 2, 3. □

定義 5.15 **（階乗の拡張）** α を実数とする．このとき $\alpha!$ を

$$\alpha! = \alpha(\alpha-1)!\,, \quad 0! = 1 \tag{5.4.54}$$

と定義する． □

例 5.16 **（階乗の具体例）** α が自然数 n のとき

$$\alpha! = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \tag{5.4.55}$$

である．α が自然数ではないとき

$$\alpha! = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots = \prod_{n=0}^{\infty}(\alpha-n) \tag{5.4.56}$$

となり無限積で表わされる．例えば $\alpha = 1/2$ のときは

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdots = \prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-n\right) \tag{5.4.57}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{-2n+1}{2} \tag{5.4.58}$$

となる． □

定義 5.17 **（二項係数の拡張）** 実数 α, 自然数 n に対して

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} \tag{5.4.59}$$

と定義する． □

例 5.18 **（二項係数の具体例）** α が自然数 m のときは

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} \tag{5.4.60}$$

であり通常の二項係数と等しい．$\alpha = 1/2, n = 3$ のとき

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{16} \tag{5.4.61}$$

となる．$\alpha = -2, n = 3$ のとき

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3\cdot 2\cdot 1} = -4 \tag{5.4.62}$$

となる． □

注意 5.19 **（三角関数と指数関数）** 三角関数と指数関数は

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2} \tag{5.4.63}$$

の関係にある．ここで $e^{\pm ix}$ は複素指数関数である．複素指数関数は複素数 $z = x + iy$ に対して

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{5.4.64}$$

と定義される．右辺は複素巾級数である．この定義より関係式が自然に導出される．このとき $x = 0$ とし $z = iy$ とおく．すると

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy + i^2\frac{y^2}{2} + i^3\frac{y^3}{3!} + i^4\frac{y^4}{4!} + i^5\frac{y^5}{5!} + i^6\frac{y^6}{6!} + \cdots \tag{5.4.65}$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots \tag{5.4.66}$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \cdots\right) \tag{5.4.67}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-2}}{(2n-2)!} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{5.4.68}$$

$$= \cos y + i\sin y \tag{5.4.69}$$

を得る．同様に $z = -iy$ とおくと

$$e^{-iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} \tag{5.4.70}$$

$$= 1 + i(-y) + i^2\frac{(-y)^2}{2} + i^3\frac{(-y)^3}{3!} + i^4\frac{(-y)^4}{4!} + i^5\frac{(-y)^5}{5!} + i^6\frac{(-y)^6}{6!} + \cdots \tag{5.4.71}$$

$$= 1 + i(-y) - \frac{(-y)^2}{2} - i\frac{(-y)^3}{3!} + \frac{(-y)^4}{4!} + i\frac{(-y)^5}{5!} - \frac{(-y)^6}{6!} + \cdots \tag{5.4.72}$$

$$= \left(1 - \frac{(-y)^2}{2} + \frac{(-y)^4}{4!} - \frac{(-y)^6}{6!} + \cdots\right) + i\left((-y) - \frac{(-y)^3}{3!} + \frac{(-y)^5}{5!} \cdots\right) \tag{5.4.73}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^{2n-2} y^{2n-2}}{(2n-2)!} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^{2n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{5.4.74}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-2}}{(2n-2)!} - i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{5.4.75}$$

$$= \cos y - i\sin y \tag{5.4.76}$$

を得る．y を x に置き換えることで，最初の関係式を得る． □

§ 5.5 解析関数

定義 5.20 **(解析関数)** 関数 $f(x)$ がテイラー級数で表されるとき，関数 $f(x)$ は**解析的（analytic）**であるという．解析的な関数を**解析関数（analytic function）**と呼ぶ． □

定理 5.21 **(解析関数の性質)** 関数 $f(x), g(x)$ が解析的であるとき，次の関数

$$\alpha f(x)+\beta g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(g(x)) \tag{5.5.1}$$

もまた解析的である． □

例 5.22 **(テイラー級数の計算例)** 関数 $f(x)=e^x$ のテイラー級数は

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{5.5.2}$$

と表わされる．このとき $g(x)=e^{\alpha x}$ のテイラー級数を求める．$g(x)$ は $f(x)$ を用いると $g(x)=f(\alpha x)$ と書ける．$f(x)$ のテイラー級数の x に αx を代入すると

$$g(x)=e^{\alpha x}=1+(\alpha x)+\frac{1}{2}(\alpha x)^2+\frac{1}{6}(\alpha x)^3+\cdots \tag{5.5.3}$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3}{6}x^3+\cdots \tag{5.5.4}$$

を得る．この展開式はテイラー級数の公式を $g(x)$ に適用したものと同じものとなる．同様に $g(x)=e^{-x^2}$ のテイラー級数は

$$g(x)=f(-x^2)=e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{1}{2}(-x^2)^2+\frac{1}{6}(-x^2)^3+\cdots \tag{5.5.5}$$

$$=1-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^6+\cdots \tag{5.5.6}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} \tag{5.5.7}$$

と求まる． □

例 5.23 **(テイラー級数の計算例)**

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{5.5.8}$$

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1+\left(x+x^2\right)+\left(x+x^2\right)^2+\left(x+x^2\right)^3+\cdots \tag{5.5.9}$$

$$= 1+(x+x^2)+(x^2+2x^3+x^4)+(x^3+3x^4+3x^5+x^6)+\cdots \tag{5.5.10}$$

$$= 1+x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots \tag{5.5.11}$$

□

例 5.24 **(テイラー級数の計算例)**

$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\cdots \tag{5.5.12}$$

$$\sqrt{1-x-x^2} = 1-\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}(x+x^2)^2-\frac{1}{16}(x+x^2)^3+\cdots \tag{5.5.13}$$

$$= 1-\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)x^2-\left(\frac{2}{8}+\frac{1}{16}\right)x^3+\cdots \tag{5.5.14}$$

$$= 1-\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots \tag{5.5.15}$$

□

例 5.25 **（テイラー級数の計算例）**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{5.5.16}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \tag{5.5.17}$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \tag{5.5.18}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} x^n \tag{5.5.19}$$

$$(n = 2k, n = 2k+1; k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5.5.20}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{5.5.21}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{5.5.22}$$

$$(k \to n-1; n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{5.5.23}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} \tag{5.5.24}$$

□

問 5.26 **（テイラー級数の計算）** $\cosh x$ のテイラー級数を求めよ. □

§ 5.6 項別微分

例 5.27 **(項別微分の具体例)**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \tag{5.6.1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \cdots\right) \tag{5.6.2}$$

$$= \frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3!}x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4!}x^4\right) + \cdots \tag{5.6.3}$$

$$\cdots + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n!}x^n\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\right) + \cdots \tag{5.6.4}$$

$$= 0 + 1 + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{3!}x^2 + \frac{4}{4!}x^3 + \cdots + \frac{n}{n!}x^{n-1} + \frac{n+1}{(n+1)!}x^n + \cdots \tag{5.6.5}$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \tag{5.6.6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \tag{5.6.7}$$

$$= e^x \tag{5.6.8}$$

□

例 5.28 **(項別微分の具体例)**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{5.6.9}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) \tag{5.6.10}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \cos x \tag{5.6.11}$$

□

例 5.29 **(項別微分の具体例)**

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots \tag{5.6.12}$$

$$\frac{d}{dx}\log(1+x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1+x} \tag{5.6.13}$$

□

問 5.30 これを示せ. □

例 5.31 **（テーラー級数の微分）**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.6.14}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.6.15}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \tag{5.6.16}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \tag{5.6.17}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{n}{n!}(x-a)^{n-1} \tag{5.6.18}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \tag{5.6.19}$$

$$(m = n-1; n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{5.6.20}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+1)}(a)}{m!}(x-a)^m \tag{5.6.21}$$

$$(m \to n) \tag{5.6.22}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f')^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.6.23}$$

$$= f'(x) \tag{5.6.24}$$

$f(x)$ に関するテーラー級数を微分したものは，$f'(x)$ に関するテーラー級数となる．テーラー級数は微分演算に対して不変である．

□

§ 5.7 項別積分

関数 $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$ を考える．$f(x)$ のテイラー級数を求める．このとき $f^{(n)}(x)$ の計算は面倒であるので別の方法を考える．そこで次のような項別積分を用いてテイラー級数を求める．まず $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \tag{5.7.1}$$

である．これをテイラー級数で表わす．そのためまず

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \tag{5.7.2}$$

を用意する．x に x^2 を代入すれば

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \tag{5.7.3}$$

を得る．両辺を不定積分をすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tan}^{-1}x &= \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^{2n}\,dx && (5.7.4)\\
&= \int dx+-\int x^2\,dx++\int x^4\,dx+\cdots+(-1)^n\int x^{2n}\,dx+\cdots && (5.7.5)\\
&= C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots && (5.7.6)\\
&= C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} && (5.7.7)\\
&\quad (n\to n-1) && (5.7.8)\\
&= C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} && (5.7.9)
\end{aligned}$$

を得る．定数項 C には不定性が残っている．これを定める．$x=0$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tan}^{-1}0 &= C+0+0+\cdots && (5.7.10)\\
\to C &= \mathrm{Tan}^{-1}0=0 && (5.7.11)
\end{aligned}$$

を得る．以上より $f(x)$ のテイラー級数として

$$f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} \tag{5.7.12}$$

が求まる．

§ 5.8 テイラー展開

テイラー級数では関数 $f(x)$ を無限和で表す．次のテイラー展開では有限項の和で $f(x)$ を表す．

定理 5.32 **（テイラー展開）** 関数 $f(x)$ が $n+1$ 回微分可能なとき，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_{n+1}(x), \tag{5.8.1}$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi=a+\theta(x-a) \quad (0\le\theta\le 1) \tag{5.8.2}$$

が成り立つ．ただし点 $x=a$ は定義内の点である．この展開式を $f(x)$ の**テイラー展開（Taylor expansion）**と呼ぶ．特に $a=0$ のときを**マクローリン展開（Maclaurin expansion）**と呼ぶ．R_n は**剰余項（remainder）**と呼ばれる．

□

注意 5.33 点 ξ は点 a と点 x とを $\theta:1-\theta$ に内分する点である．

□

定理 5.34 **（平均値の定理）** 関数 $f(x)$ が $a\le x\le b$ で連続で，$a<x<b$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \qquad \xi=b+\theta(b-a) \quad (0\le\theta\le 1) \tag{5.8.3}$$

を満たす ξ が存在する．

□

例 5.35 **（テイラー展開の具体例）**

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x), \tag{5.8.4}$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0\le\theta\le 1) \tag{5.8.5}$$

□

例 5.36 **（テイラー展開の具体例）**

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n+1}(x), \tag{5.8.6}$$

$$R_{2n+1}(x)=\frac{(-1)^n\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (0\le\theta\le 1) \tag{5.8.7}$$

$$\tag{5.8.8}$$

□

§ 5.9 テイラー級数による関数の近似

定義 5.37 **（関数の近似）** 関数 $f(x)$ をテイラー級数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.9.1}$$

で表わし，n 次の項で打ち切った関数

$$\tilde{f}_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.9.2}$$

を $f(x)$ の n 次近似と呼ぶ. □

具体的に書くと

$$0\text{ 次近似：}\quad f(x)\simeq\tilde{f}_0(x)=f(a)\quad\leftarrow\text{定数} \tag{5.9.3}$$

$$1\text{ 次近似：}\quad f(x)\simeq\tilde{f}_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)\quad\leftarrow\text{直線，接線の方程式} \tag{5.9.4}$$

$$2\text{ 次近似：}\quad f(x)\simeq\tilde{f}_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\quad\leftarrow\text{放物線} \tag{5.9.5}$$

$$\vdots \tag{5.9.6}$$

$$n\text{ 次近似：}\quad f(x)\simeq\tilde{f}_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots \tag{5.9.7}$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad\leftarrow n\text{ 次多項式} \tag{5.9.8}$$

と表される．テイラー級数による関数の近似では $f(x)$ を多項式で近似する．

注意 5.38 近似式 $\tilde{f}_n(x)$ は曲線 $y=f(x)$ に点 $x=a$ で接する n 次多項式である． □

例 5.39 **（関数の近似の具体例）**

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{5.9.9}$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}_0(x) = 1 \tag{5.9.10}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_1(x) = 1 + x \tag{5.9.11}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \tag{5.9.12}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \tag{5.9.13}$$

□

例 5.40 **（関数の近似の具体例）**

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{5.9.14}$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}_0(x) = 0 \tag{5.9.15}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = x \tag{5.9.16}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_3(x) = \tilde{f}_4(x) = x - \frac{x^3}{6} \tag{5.9.17}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_5(x) = \tilde{f}_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \tag{5.9.18}$$

□

§ 5.10 近似関数の誤差の評価

関数 $f(x)$ の n 次近似式 $\tilde{f}_n(x)$ の誤差 $e_n(x)$ を考える．テイラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \tag{5.10.1}$$

より

$$f(x) = \tilde{f}_n(x) + R_{n+1}(x) \tag{5.10.2}$$

が成り立つ．**誤差（error）**を

$$e_n(x) = |\tilde{f}_n(x) - f(x)| \tag{5.10.3}$$

と定義すると，上の式より誤差は

$$e_n(x) = |\tilde{f}_n(x) - f(x)| = |R_{n+1}(x)| \tag{5.10.4}$$

と表される．

例 5.41 **(誤差の評価の具体例)** $f(x)=\sin x$ を多項式で近似する．$x=0$ まわりでテイラー展開して近似式を計算すると

$$0\text{ 次近似：}\quad f(x)\simeq \tilde{f}_0(x)=0 \tag{5.10.5}$$
$$1\text{ 次近似：}\quad f(x)\simeq \tilde{f}_1(x)=x \tag{5.10.6}$$
$$3\text{ 次近似：}\quad f(x)\simeq \tilde{f}_3(x)=x-\frac{x^3}{6} \tag{5.10.7}$$
$$5\text{ 次近似：}\quad f(x)\simeq \tilde{f}_5(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \tag{5.10.8}$$

を得る．誤差 $e_n(x)$ は

$$e_0(x)=|\tilde{f}_0(x)-f(x)|=|R_1(x)|=|x\cos\theta x|\le|x| \tag{5.10.9}$$
$$e_1(x)=|\tilde{f}_1(x)-f(x)|=|R_3(x)|=\left|\frac{x^3\cos\theta x}{6}\right|\le\frac{|x|^3}{6} \tag{5.10.10}$$
$$e_3(x)=|\tilde{f}_3(x)-f(x)|=|R_5(x)|=\left|\frac{x^5\cos\theta x}{120}\right|\le\frac{|x|^5}{120} \tag{5.10.11}$$
$$e_5(x)=|\tilde{f}_5(x)-f(x)|=|R_7(x)|=\left|\frac{x^7\cos\theta x}{7!}\right|\le\frac{|x|^7}{7!} \tag{5.10.12}$$

である．ここで $|\cos\theta x|\le 1$ を用いた．

いま $x=1$ のときの誤差を考える．このとき誤差は

$$e_0(1)\le 1 \qquad\to\qquad e_0\sim 1 \qquad \text{有効桁数：}0,1\text{ 桁程度} \tag{5.10.13}$$
$$e_1(1)\le\frac{1}{6}=0.1666\ldots<0.2 \qquad\to\qquad e_1\sim 2\times10^{-1} \qquad \text{有効桁数：}1,2\text{ 桁程度} \tag{5.10.14}$$
$$e_3(1)\le\frac{1}{120}=0.008333\ldots<0.01 \qquad\to\qquad e_3\sim 1\times10^{-2} \qquad \text{有効桁数：}2,3\text{ 桁程度} \tag{5.10.15}$$
$$e_5(1)\le\frac{1}{7!}=0.000198\ldots<0.0002 \qquad\to\qquad e_5\sim 2\times10^{-4} \qquad \text{有効桁数：}4,5\text{ 桁程度} \tag{5.10.16}$$

となる．近似の次数が大きいほど誤差は小さい．次に誤差 $e_n(x)$ が 0.01 以下となるような x の範囲を求める．上の誤差の評価式より

$$e_0(x)\le|x|\le 0.01 \quad\to\quad |x|\le 0.01 \tag{5.10.17}$$
$$e_1(x)\le\frac{|x|^3}{6}\le 0.01 \quad\to\quad |x|^3\le 0.06 \quad\to\quad |x|\le 0.391 \tag{5.10.18}$$
$$e_3(x)<\frac{|x|^5}{120}\le 0.01 \quad\to\quad |x|^5\le 1.2 \quad\to\quad |x|\le 1.04 \tag{5.10.19}$$
$$e_5(x)\le\frac{|x|^7}{7!}\le 0.01 \quad\to\quad |x|^7\le 50.4 \quad\to\quad |x|\le 1.75 \tag{5.10.20}$$

となる．近似の次数が上がるほど x の範囲が広がっている． □

問 5.42 参考書（p.69）問題 3–6 1. □

§ 5.11 ランダウの記号

定義 5.43 **（ランダウの記号）** 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0 \tag{5.11.1}$$

が成り立つとき,

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a) \tag{5.11.2}$$

と表記する．$o(\cdot)$ は**ランダウ（Landau）の記号**であり,「ラージオー」と読む．またこのとき, f は g に比べ**無視できる**という.

□

定義 5.44 **（ランダウの記号）** 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = b < \infty \tag{5.11.3}$$

が成り立つとき,

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a) \tag{5.11.4}$$

と表記する．$O(\cdot)$ は**ランダウ（Landau）の記号**であり,「スモールオー」と読む．またこのとき f は g で**押さえられる**という.

□

注意 5.45 **（二つのランダウの記号の関係）** 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a) \tag{5.11.5}$$

が成り立つとき，$b \neq 0$ であれば $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - b\right) = 0$ となるので

$$f(x) = bg(x) + o(g(x)) \quad (x \to a) \tag{5.11.6}$$

が成り立つ.

□

定義 5.46 **（無限大，無限小）** 関数 $f(x), g(x)$ が $x \to a$ において無限小または無限大となるとき，次の呼び方を定義する.

- $f \to 0, g \to 0, f = o(g)$ $(x \to a)$ のとき，f は g より**高次の無限小**と呼ぶ．または g は f より**低次の無限小**と呼ぶ.
- $f \to \pm\infty, g \to \pm\infty, f = o(g)$ $(x \to a)$ のとき，f は g より**低次の無限大**と呼ぶ．または g は f より**高次の無限大**と呼ぶ.
- $f \to 0, g \to 0, f = O(g)$ $(x \to a)$ のとき，f と g とは**同次の無限小**と呼ぶ.
- $f \to \pm\infty, g \to \pm\infty, f = O(g)$ $(x \to a)$ のとき，f と g とは**同次の無限大**と呼ぶ.

□

例 5.47 **（ランダウの記号の使用例）**

$$e^x = 1 + x + O(x^2) = 1 + x + o(x) \quad (x \to 0) \tag{5.11.7}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0) \tag{5.11.8}$$

$$\sin x = x + O(x^3) = x + o(x) \quad (x \to 0) \tag{5.11.9}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (x \to 0) \tag{5.11.10}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0) \tag{5.11.11}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x \to 0) \tag{5.11.12}$$

□

注意 5.48 **（テイラー展開とランダウの記号）** テイラー展開により

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O\left((x-a)^{n+1}\right), \tag{5.11.13}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \tag{5.11.14}$$

が成り立つ．なぜなら

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f^{(n+1)}(x + \theta(x-a))}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \right| < \infty \tag{5.11.15}$$

となるからである．同様に

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f^{(n+1)}(x + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \times 0 \right| = 0 \tag{5.11.16}$$

となることより得られる．

□

§ 5.12 テイラー級数を用いた関数の極限の計算

関数

$$f(x)=\frac{\sin x}{x} \tag{5.12.1}$$

の $x\to 0$ における極限を考える．$f(x)$ をテイラー級数で表わしたのち関数の極限を求める．すなわち

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\{f(x) \text{ の } x=0 \text{ まわりでのテイラー級数}\} \tag{5.12.2}$$

として計算する．まず分子である $\sin x$ をテイラー展開すると

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+O(x^7) \tag{5.12.3}$$

となる．次に分子 $\sin x$ を分母 x で割り，$f(x)$ のテイラー展開を求める．すなわち

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+O(x^7)}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{5!}+O(x^6) \tag{5.12.4}$$

を得る．もとの関数とテイラー級数で表わした関数とは等価なものである．よって

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{5!}+O(x^6)\right)=1-0+0+0=1 \tag{5.12.5}$$

を得る．関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ はもともと点 $x=0$ において値が定義されていない．しかしながら，等価な式であるテイラー級数では，点 $x=0$ は特別な点ではない．点 $x=0$ は見かけの不連続点である．ある関数に不連続点があるとき，その不連続点が取り除けるかどうかは，その関数をテイラー級数表示をすればよい．

問 5.49 参考書（p.69）問題 3–6 2. □

問 5.50 **（極限の計算）** 極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \tag{5.12.6}$$

を求めよ． □

例 5.51 **(テイラー展開を用いた極限の計算の例)** 関数

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x}-x \tag{5.12.7}$$

に対して極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を考える．このとき

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\{f(x) \text{ の } x=\infty \text{ まわりのテイラー級数}\} \tag{5.12.8}$$

として極限を求める．しかしながら，巾級数 $\sum c_n(x-\infty)^n$ は存在しない．そこで変数を $y=1/x$ と導入する．すると極限は

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to 0} f\left(\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left\{f\left(\frac{1}{y}\right) \text{ の } y=0 \text{ まわりのテイラー級数}\right\} \tag{5.12.9}$$

と表わされる．$f(1/y)$ を計算すると

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\sqrt{\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}}-\frac{1}{y}=\frac{1}{y}\left(\sqrt{1-2y}-1\right) \tag{5.12.10}$$

となる．まず $\sqrt{1-2y}$ をテイラー展開すると

$$\sqrt{1-2y}=1+\frac{1}{2}(-2y)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2\cdot 1}(-2y)^2+O\left((-2y)^3\right)) \tag{5.12.11}$$

$$=1-y-\frac{1}{2}y^2+O(y^3) \tag{5.12.12}$$

を得る．これを用いて $f(1/y)$ のテイラー展開を求めると

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y}\left\{\left(1-y-\frac{1}{2}y^2+O(y^3)\right)-1\right\} \tag{5.12.13}$$

$$=\frac{1}{y}\left(-y-\frac{1}{2}y^2+O(y^3)\right) \tag{5.12.14}$$

$$=-1-\frac{1}{2}y+O(y^2) \tag{5.12.15}$$

となる．よって極限は

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to 0} f\left(\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left\{-1-\frac{1}{2}y+O(y^2)\right\}=-1+0+0=-1 \tag{5.12.16}$$

と得られる． □

§ 5.13 関数の増減と極値

定義 5.52 **（増加，減少，極値）** h を十分小さい正の数 $h>0$ とする．このとき関数 $f(x)$ に関して次の性質を定義する．

- $f(a-h)<f(a)<f(a+h)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ において**増加の状態**であるという．
- $f(a-h)>f(a)>f(a+h)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ において**減少の状態**であるという．
- $f(a-h)<f(a)>f(a+h)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ において**極大値** $f(a)$ をとるという．
- $f(a-h)>f(a)<f(a+h)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ において**極小値** $f(a)$ をとるという．

極大値，極小値を総称して**極値**と呼ぶ． □

定理 5.53 **（微分係数と増減，極値）** 微分係数と関数の増減および極値の関係に関して次のことがいえる．

- $f'(a)>0$ のとき，$f(x)$ は点 $x=a$ において増加の状態にある．
- $f'(a)<0$ のとき，$f(x)$ は点 $x=a$ において減少の状態にある．
- $f'(a)=0,\ f''(a)<0$ のとき，$f(x)$ は点 $x=a$ において極大値をとる．
- $f'(a)=0,\ f''(a)>0$ のとき，$f(x)$ は点 $x=a$ において極小値をとる．

（証明）関数 $f(x)$ をテイラー展開して

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+O\left((x-a)^3\right) \tag{5.13.1}$$

を得る．$x=a\pm h$ とおくと

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+O(h^3) \tag{5.13.2}$$

$$f(a-h)=f(a)-f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+O(h^3) \tag{5.13.3}$$

となる．h を十分小さな正の値として考える．h^3 以降の項は十分小さく無視できる．$f'(a)>0$ のとき

$$f(a)-f'(a)h<f(a)<f(a)+f'(a)h \tag{5.13.4}$$

が成り立つので，テイラー展開の 2 次の項を無視しすれば

$$f(a-h) < f(a) < f(a+h) \tag{5.13.5}$$

を得る．よって $f(x)$ は増加の状態にある．次に $f'(a) < 0$ のとき，同様に

$$f(a) - f'(a)h > f(a) > f(a) + f'(a)h \tag{5.13.6}$$

$$\Rightarrow f(a-h) > f(a) > f(a+h) \tag{5.13.7}$$

となるので，$f(x)$ は減少の状態にある．次に $f'(a) = 0,\ f''(a) < 0$ のとき，

$$f(a) + \frac{f''(a)}{2}h^2 < f(a) > f(a) + \frac{f''(a)}{2}h^2 \tag{5.13.8}$$

$$\Rightarrow f(a-h) < f(a) > f(a+h) \tag{5.13.9}$$

となるので，$f(x)$ は $x = a$ において極大値をとる．最後に $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ のとき，

$$f(a) + \frac{f''(a)}{2}h^2 > f(a) < f(a) + \frac{f''(a)}{2}h^2 \tag{5.13.10}$$

$$\Rightarrow f(a-h) > f(a) < f(a+h) \tag{5.13.11}$$

となるので，$f(x)$ は $x = a$ において極小値をとる． □

問 5.54 参考書（p.58）問題 3-4. □

定理 5.55 **（単調増加）** 関数 $f(x)$ が定義域内の任意の点で $f'(x) > 0$ であるとき，$f(x)$ は単調増加である． □

定理 5.56 **（単調減少）** 関数 $f(x)$ が定義域内の任意の点で $f'(x) < 0$ であるとき，$f(x)$ は単調減少である． □

§ 5.14 ちょっとまとめ

1. ∞ 回微分可能な任意の関数 $f(x)$ は巾級数（テイラー級数）で表わされる．
2. 巾級数が与えられたとき，巾級数は関数を一つ定める．
3. もとの関数で議論しても，巾級数で議論しても等価である．
4. 計算の都合が良い方で行なう．
5. 極限，微分，積分の計算において計算しやすい方を用いる．
6. 関数を多項式近似するとき，テイラー展開を用いると議論がしやすい．
7. 関数の局所的な性質が議論しやすい．→ 増減，極値

6 積分法

積分法には次の二つの積分がある．

- 不定積分 …… 微分の逆演算
- 定積分 …… 面積の計算

それぞれ意味，定義は異なる．まずはそれぞれ独立に定義，性質をみる．その後この二つの積分の間にある関係を考える．

§ 6.1 不定積分

関数 $f(x)$ に関して x で "微分をする" という操作を $\dfrac{d}{dx}$ という**演算子，作用素（operator）**で表すとする．すなわち関数 $f(x)$ に微分演算 $\dfrac{d}{dx}$ を作用させるとは

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \tag{6.1.1}$$

のことである．この微分演算の逆演算を考える．これを $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{-1}$ と表記し

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} f(x) = F(x) \tag{6.1.2}$$

と表すことにする．逆演算により得られる関数 $F(x)$ は方程式

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{6.1.3}$$

を満たす関数と定義する．定義からただちに分かるように，ある関数 $F(x)$ が方程式 (6.1.3) を満たすとき，C を任意定数として関数 $F(x)+C$ もまた方程式 (6.1.3) を満たす．よって必ず

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} f(x) = F(x)+C \tag{6.1.4}$$

が成り立つ．微分の逆演算 $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{-1}$ は通常 $\displaystyle\int dx$ という記号を用いる．これで書き直すと

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \tag{6.1.5}$$

と表せる．

$\boxed{\text{定義 6.1}}$ **（不定積分）** 関数 $f(x)$ に対して，微分演算 $\dfrac{d}{dx}$ の逆演算を $\displaystyle\int dx$ と表記し，

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{6.1.6}$$

と定義する．ただし C は任意定数である．$\displaystyle\int f(x)\,dx$ を**不定積分（indefinite integral）**，$f(x)$ を**被積分関数（integrand）**，C を**積分定数（constant of integration）**，$F(x)$ を**原始関数（primitive function）**と呼ぶ．

□

§ 6.2 不定積分の性質

定理 6.2 **(不定積分の性質)**

$$(1)\qquad \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) \tag{6.2.1}$$

$$(2)\qquad \int F'(x)\,dx = F(x)+C \tag{6.2.2}$$

$$(3)\qquad \int (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx \tag{6.2.3}$$

(証明)　定義 6.1 より

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \tag{6.2.4}$$

とする.

(1)

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}(F(x)+C) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) = (\text{右辺})\,. \tag{6.2.5}$$

(2)

$$(\text{左辺}) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C = (\text{右辺})\,. \tag{6.2.6}$$

□

問 6.3 **(不定積分の性質)**　定理 6.2 (3) を示せ.　□

注意 6.4 **(不定積分の性質)**　定理 6.2 (1), (2) より

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} f(x) = f(x)\,, \tag{6.2.7}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = f(x)+C \tag{6.2.8}$$

が成り立つ. 微分と不定積分の演算は可換ではない.　□

§ 6.3 不定積分の基本的な計算

$$\frac{d}{dx}x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int dx = x + C \tag{6.3.1}$$

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n \quad \Leftrightarrow \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \tag{6.3.2}$$

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha+1} = (\alpha+1)x^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1) \tag{6.3.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ \dfrac{d}{dx}\log(-x) = \dfrac{1}{x} & (x < 0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C \tag{6.3.4}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \int e^x\,dx = e^x + C \tag{6.3.5}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = (\log a)a^x \quad \Leftrightarrow \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) \tag{6.3.6}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C \tag{6.3.7}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{6.3.8}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \tag{6.3.9}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}x + C \quad (|x| < 1) \tag{6.3.10}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Tan}^{-1}x + C \tag{6.3.11}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \quad \Leftrightarrow \quad \int \sinh x\,dx = \cosh x + C \tag{6.3.12}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \quad \Leftrightarrow \quad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C \tag{6.3.13}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C \tag{6.3.14}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sinh^{-1}x + C \tag{6.3.15}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cosh}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \mathrm{Cosh}^{-1}x + C \quad (|x| > 1) \tag{6.3.16}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \tanh^{-1}x + C \quad (x \neq 1) \tag{6.3.17}$$

例 6.5 **（不定積分の計算例）**

$$I=\int x^8\,dx=\frac{1}{8+1}x^{8+1}+C=\frac{x^9}{9}+C. \tag{6.3.18}$$

$$I=\int \sqrt[4]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{4}}\,dx=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}+C=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C=\frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5}+C. \tag{6.3.19}$$

$$I=\int \frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}\,dx=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C=\frac{1}{-2}x^{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C. \tag{6.3.20}$$

$$I=\int (x^3-x^2+3x-2)\,dx=\int x^3\,dx-\int x^2\,dx+3\int x\,dx-2\int dx \tag{6.3.21}$$

$$=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-\frac{1}{2+1}x^{2+1}+3\frac{1}{1+1}x^{1+1}-2x+C \tag{6.3.22}$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+C. \tag{6.3.23}$$

□

問 6.6 参考書（p.81）問題 4–1. □

§ 6.4 置換積分法

定理 6.7 **（置換積分法）** 積分変数を $x = \phi(t)$ と変換すると

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int f(\phi(t))\frac{dx}{dt}\,dt \tag{6.4.1}$$

となる．また逆に

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\psi(x)) + C \tag{6.4.2}$$

と積分変数を $t = \psi(x)$ と置き換えて積分する．この積分の方法を**置換積分法（integration by substitution）**という．

（証明）関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．変数 x を $x = \phi(t)$ と変数変換する．このとき $\dfrac{dF}{dt}$ は合成関数の微分則より

$$\frac{dF(\phi(t))}{dt} = \frac{d}{dt}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t) \tag{6.4.3}$$

となる．両辺を t で積分すると

$$\int \frac{dF}{dt}\,dt = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \tag{6.4.4}$$

を得る．左辺は

$$\int \frac{dF(\phi(t))}{dt}\,dt = F(\phi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)\,dx \tag{6.4.5}$$

であるから証明終了． □

例 6.8 **（置換積分の使用例）** 不定積分

$$I=\int (ax+b)^m\,dx \tag{6.4.6}$$

を計算する．まず

$$t=ax+b \tag{6.4.7}$$

と変数変換する．このとき両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx}=a \tag{6.4.8}$$

であるので

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{dx}}=\frac{1}{a} \tag{6.4.9}$$

を得る．これより置換積分法を用いると不定積分は

$$I=\int t^m\frac{dx}{dt}\,dt=\int t^m\frac{1}{a}\,dt=\frac{1}{a}\int t^m\,dt=\begin{cases}\dfrac{t^{m+1}}{a(m+1)}+C & (m\neq -1)\\[2ex] \dfrac{1}{a}\log|t|+C & (m=-1)\end{cases} \tag{6.4.10}$$

となる．変数 t を x に戻すと

$$I=\begin{cases}\dfrac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+C & (m\neq -1)\\[2ex] \dfrac{1}{a}\log|ax+b|+C & (m=-1)\end{cases} \tag{6.4.11}$$

を得る．

置換積分は慣れてくれば変数変換を省略して計算をする．次のように式変形を行なう：

$$I=\int (ax+b)^m\,dx \tag{6.4.12}$$

$$=\frac{1}{a}\int (ax+b)^m(ax+b)'\,dx \tag{6.4.13}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{a(m+1)}(ax+b)^{m+1}+C & (m\neq -1)\\[2ex] \dfrac{1}{a}\log|ax+b|+C & (m=-1)\end{cases}. \tag{6.4.14}$$

□

例 6.9 **(置換積分の使用例)**

$$I=\int\cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\int\cos(ax+b)(ax+b)'\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C. \tag{6.4.15}$$

□

例 6.10 **(置換積分の使用例)**

$$I=\int\frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{1-2x^2}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2}}+\int\frac{2\,dx}{\sqrt{1-2x^2}}=\int x\left(1-2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx+\int\frac{2\,dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2}x\right)^2}} \tag{6.4.16}$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(1-2x^2\right)'\left(1-2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx+2\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\left(\sqrt{2}x\right)'\,dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2}x\right)^2}} \tag{6.4.17}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)+C=-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2}\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)+C. \tag{6.4.18}$$

□

例 6.11 **(置換積分の使用例)**

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx=\int\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C. \tag{6.4.19}$$

これで不定積分は得られたが他の表現も考える．逆双曲線関数は

$$\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1}) \tag{6.4.20}$$

とも表される．これを用いると不定積分は

$$I=\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+C \tag{6.4.21}$$

となる．またこれを変形すると

$$I=\log\frac{1}{a}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C-\log a \tag{6.4.22}$$

となる．C は任意の定数なので $C-\log a$ をあらためて C とおき直すと

$$I=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C \tag{6.4.23}$$

を得る．以上得られた結果は任意定数分の不定性を除けば全て同じ不定積分である． □

注意 6.12 **(不定積分の関数の表現)** 不定積分は計算の方法により得られる結果が一見すると違うときがある．これは不定積分が任意定数の不定性をもつためである．注意が必用である．

□

§ 6.5 部分積分法

定理 6.13 **（部分積分法）**

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \tag{6.5.1}$$

これを**部分積分法（integration by parts）**という．

（証明）関数 $f(x)g(x)$ を微分すると積の微分公式より

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{6.5.2}$$

を得る．これを両辺を x で積分すると

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \tag{6.5.3}$$

となる．移項すると証明終了． □

例 6.14 **（部分積分法の使用例）**

$$I = \int \log x\,dx = \int \log x (x)'\,dx = x\log x - \int (\log x)' x\,dx \tag{6.5.4}$$

$$= x\log x - \int \frac{1}{x} x\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C. \tag{6.5.5}$$

□

例 6.15 **（部分積分法の使用例）**

$$I = \int x\sin x\,dx = \int x(-\cos x)'\,dx = -x\cos x + \int (x)'\cos x\,dx \tag{6.5.6}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C. \tag{6.5.7}$$

□

例 6.16 **（部分積分法の使用例）**

$$I = \int x^2 \sin x\,dx = \int x^2(-\cos x)'\,dx = -x^2\cos x + \int (x^2)'\cos x\,dx \tag{6.5.8}$$

$$= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x(\sin x)'\,dx \tag{6.5.9}$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos + C \tag{6.5.10}$$

$$= 2x\sin x + (2 - x^2)\cos + C. \tag{6.5.11}$$

□

§ 6.6 有理関数の積分

有理関数

$$f(x)=\frac{a_0x^N+a_1x^{N-1}+\cdots+a_N}{b_0x^M+b_1x^{M-1}+\cdots+b_M}\qquad (N,M\in\mathbb{N}) \tag{6.6.1}$$

の不定積分

$$I=\int f(x)\,dx \tag{6.6.2}$$

を考える．任意の有理関数は積分可能である．

Step 1（分子を分母で割る）　分子の次数 N が分母の次数 M 以上のときはまず割り算を行い，

$$f(x)=N-M\text{ 次の多項式}+\frac{M-1\text{ 次以下の多項式}}{M\text{ 次の多項式}} \tag{6.6.3}$$

とする．このとき多項式の部分は必ず積分が可能である．よって以後では分子の次数 N は分母の次数 M より小さい $(N<M)$ とする．

例 6.17 **（分子の次数を分母の次数より小さくする）**　分子の次数が分母の次数以上の場合はまず分子を分母で割り，

$$f(x)=\frac{x^3+4x^2+2x+1}{x^2+3}=x+4-\frac{x-11}{x^2+3} \tag{6.6.4}$$

のように変形する．この式に対して積分すると

$$I=\int f(x)\,dx=\int(x+4)\,dx-\int\frac{x-11}{x^2+3}\,dx=\frac{x^2}{2}+4x-\int\frac{x-11}{x^2+3}\,dx \tag{6.6.5}$$

となる．多項式部分は積分される．残るは有理式の積分である．以後は $N<M$ となる有理関数の積分のみを考える．
□

Step 2 （分母を因数分解する）　有理式を $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ とする．分母の多項式 $q(x)$ を実数の範囲で因数分解する．このとき

$$q(x)=(x+b_1)^{m_1}(x+b_2)^{m_2}\cdots(x^2+c_i x+d_i)^{m_i}(x^2+c_{i+1}x+d_{i+1})^{m_{i+1}}\cdots \tag{6.6.6}$$

と表される．m_j は重複度である．2 次式の判別式は負である．

例 6.18 **（分母の因数分解）**

$$q(x)=x^2+3\,, \tag{6.6.7}$$

$$q(x)=x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)\,, \tag{6.6.8}$$

$$q(x)=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)\,. \tag{6.6.9}$$

□

Step 3 （部分分数分解する）　有理式 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ を部分分数分解する．すなわち

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x+b_1)^{m_1}(x+b_2)^{m_2}\cdots(x^2+c_i x+d_i)^{m_i}(x^2+c_{i+1}x+d_{i+1})^{m_{i+1}}\cdots} \tag{6.6.10}$$

$$=\frac{A_{1,1}}{x+b_1}+\frac{A_{1,2}}{(x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1,m_1}}{(x+b_1)^{m_1}} \tag{6.6.11}$$

$$+\frac{A_{2,1}}{x+b_2}+\frac{A_{2,2}}{(x+b_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2,m_2}}{(x+b_2)^{m_2}}+\cdots \tag{6.6.12}$$

$$\cdots+\frac{A_{i,1}x+B_{i,1}}{x^2+c_i x+d_i}+\frac{A_{i,2}x+B_{i,2}}{(x^2+c_i x+d_i)^2}+\cdots+\frac{A_{i,m_i}x+B_{i,m_i}}{(x^2+c_i x+d_i)^{m_i}}+\cdots \tag{6.6.13}$$

と変形する．

問 6.19 **（部分分数分解）**　任意の有理式 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ $(N\le M)$ は上式のように部分分数分解される．これを示せ．

□

例 6.20 **（部分分数展開の具体例）**

$$\frac{x}{(1+x)^3}=\frac{(1+x)-1}{(1+x)^3}=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\,. \tag{6.6.14}$$

$$\frac{x^2}{(1+x)^3}=\frac{(1+x)^2-2(1+x)+1}{(1+x)^3}=\frac{1}{(1+x)}-\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^3}\,. \tag{6.6.15}$$

□

例 6.21 **(部分分数展開の具体例)** 部分分数分解として

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1} \tag{6.6.16}$$

とする．通分して同じ次数でまとめると

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+C}{x^3+1} \tag{6.6.17}$$

となる．よって係数は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.6.18}$$

を満足しなければならない．これを解くと

$$A=\frac{1}{2}, \qquad B=-\frac{1}{2}, \qquad C=1 \tag{6.6.19}$$

となる．よって部分分数分解は

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x-2}{2(x^2-x+1)} \tag{6.6.20}$$

と表される． □

問 6.22 **(部分分数展開の計算例)** 部分分数分解として

$$\frac{1}{x^4-x^3+x+1}=\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1} \tag{6.6.21}$$

とする．係数 A, B, C, D を定めよ． □

問 6.23 **(部分分数展開の計算例)** 部分分数分解として

$$\frac{1}{x^3(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^2} \tag{6.6.22}$$

とする．係数 A, B, C, D, E, F, G, H を定めよ． □

例 6.24 **（部分分数展開の具体例）**

$$\frac{x-11}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2-x+1)} \tag{6.6.23}$$

より

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -11 \end{bmatrix} \tag{6.6.24}$$

となり

$$A=-4, \qquad B=4, \qquad C=7 \tag{6.6.25}$$

を得る．よって

$$\frac{x-11}{x^3+1}=\frac{-4}{x+1}+\frac{4x+7}{x^2-x+1} \tag{6.6.26}$$

となる．

□

例 6.25 **（部分分数展開の具体例）**

$$f(x)=\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}=\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2} \tag{6.6.27}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A}{x(x-1)(x+2)} \tag{6.6.28}$$

より

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.6.29}$$

である．解くと

$$A=-\frac{1}{2}, \quad B=\frac{2}{3}, \quad C=-\frac{1}{6} \tag{6.6.30}$$

となる．よって

$$f(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{2}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)} \tag{6.6.31}$$

を得る．

□

Step 4（部分分数ごとに積分する）　部分分数ごとに積分を行う．すなわち

$$
\begin{aligned}
I &= \int f(x)\,dx && (6.6.32)\\
&= A_{1,1}\int\frac{dx}{x+b_1}+A_{1,2}\int\frac{dx}{(x+b_1)^2}+\cdots+A_{1,m_1}\int\frac{dx}{(x+b_1)^{m_1}} && (6.6.33)\\
&\quad +A_{2,1}\int\frac{dx}{x+b_2}+A_{2,2}\int\frac{dx}{(x+b_2)^2}+\cdots+A_{2,m_2}\int\frac{dx}{(x+b_2)^{m_2}}+\cdots && (6.6.34)\\
&\qquad \cdots+\int\frac{A_{i,1}x+B_{i,1}}{x^2+c_ix+d_i}\,dx+\int\frac{A_{i,2}x+B_{i,2}}{(x^2+c_ix+d_i)^2}\,dx+\cdots+\int\frac{A_{i,m_i}x+B_{i,m_i}}{(x^2+c_ix+d_i)^{m_i}}\,dx+\cdots && (6.6.35)
\end{aligned}
$$

を計算する．それぞれの場合ごとに積分を考える．

まず，分母の因子が 1 次式の場合の積分を行なう．すると

$$
\int\frac{dx}{(x+b)^m}=\begin{cases}\log|x+b|+C & (m=1)\\[2mm] \dfrac{-1}{m-1}\dfrac{1}{(x+b)^{m-1}}+C & (m\geq 2)\end{cases} \tag{6.6.36}
$$

を得る．

次に，分母の因子が 2 次式の場合の積分を行なう．2 次式の判別式が負であることに注意すると

$$
\int\frac{Ax+B}{(x^2+cx+d)^m}\,dx=\int\frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(d-\frac{c^2}{4}\right)\right)^m}\,dx \tag{6.6.37}
$$

と表される．ここで $-a=\dfrac{c}{2}, b^2=d-\dfrac{c^2}{4}>0, b>0$ とおく．すると

$$
\int\frac{Ax+B}{(x^2+cx+d)^m}\,dx=\int\frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx \tag{6.6.38}
$$

と表される．この形から積分を進める．さらに式変形すると

$$
\begin{aligned}
\int\frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx &= \int\frac{A(x-a)+(aA+B)}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx && (6.6.39)\\
&= \frac{A}{2}\int\frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx+(aA+B)\int\frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^m} && (6.6.40)\\
&= \frac{A}{2}I_m+(aA+B)J_m && (6.6.41)
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
I_m=\int\frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx,\qquad J_m=\int\frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^m} \tag{6.6.42}
$$

とおく．第一項目の積分 I_m は

$$
I_m=\int\frac{((x-a)^2+b^2)'}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx=\begin{cases}\log\left|(x-a)^2+b^2\right|+C & (m=1)\\[2mm] \dfrac{-1}{m-1}\dfrac{1}{((x-a)^2+b^2)^{m-1}}+C & (m>1)\end{cases} \tag{6.6.43}
$$

と求まる．第二項目の積分 J_m を計算する．$m=1$ のとき

$$J_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} = \frac{1}{b}\int \frac{\left(\frac{x-a}{b}\right)'}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}dx \tag{6.6.44}$$

$$= \frac{1}{b}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right)+C \tag{6.6.45}$$

となる．$m \geq 2$ のときは漸化式

$$J_m = \left(\frac{2m-3}{2m-2}\right)\frac{J_{m-1}}{b^2} + \frac{1}{2(m-1)b^2}\frac{x-a}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{m-1}} \tag{6.6.46}$$

より J_m が定まる．これを示す．置換積分を用いると

$$J_m = \int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^m} = \frac{1}{b^{2m-1}}\int \frac{\left(\frac{x-a}{b}\right)'}{\left(1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)^m}dx = \frac{1}{b^{2m-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^m} \tag{6.6.47}$$

となる．ここで $t=\dfrac{x-a}{b}$ とおいた．式変形すると

$$J_m = \frac{1}{b^{2m-1}}\int \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^m}dt \tag{6.6.48}$$

$$= \frac{1}{b^{2m-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}} - \frac{1}{b^{2m-1}}\int \frac{t^2}{(1+t^2)^m}dt \tag{6.6.49}$$

$$= \frac{J_{m-1}}{b^2} - \frac{1}{b^{2m-1}}\int t\times\frac{t}{(1+t^2)^m}dt \tag{6.6.50}$$

$$= \frac{J_{m-1}}{b^2} - \frac{1}{b^{2m-1}}\int t\left(\frac{-1}{2(m-1)}\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}\right)'dt \tag{6.6.51}$$

$$= \frac{J_{m-1}}{b^2} + \frac{1}{2(m-1)b^{2m-1}}\int t\left(\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}\right)'dt \tag{6.6.52}$$

$$= \frac{J_{m-1}}{b^2} + \frac{1}{2(m-1)b^{2m-1}}\left\{\frac{t}{(1+t^2)^{m-1}} - \int\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}dt\right\} \tag{6.6.53}$$

$$= \frac{J_{m-1}}{b^2} + \frac{1}{2(m-1)b^{2m-1}}\frac{t}{(1+t^2)^{m-1}} - \frac{J_{m-1}}{2(m-1)b^2} \tag{6.6.54}$$

$$= \left(\frac{2m-3}{2m-2}\right)\frac{J_{m-1}}{b^2} + \frac{1}{2(m-1)b^{2m-1}}\frac{t}{(1+t^2)^{m-1}} \tag{6.6.55}$$

$$= \left(\frac{2m-3}{2m-2}\right)\frac{J_{m-1}}{b^2} + \frac{1}{2(m-1)b^2}\frac{x-a}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{m-1}} \tag{6.6.56}$$

となり漸化式を得る．

例 6.26 **(部分分数を積分する具体例)**

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\left(-\frac{1}{2x}+\frac{2}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}\right)dx \tag{6.6.57}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2} \tag{6.6.58}$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x|+\frac{2}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log|x+2|+C \tag{6.6.59}$$

$$= \frac{1}{6}\log\left|\frac{(x-1)^4}{x^3(x+2)}\right|+C. \tag{6.6.60}$$

□

例 6.27 **(部分分数を積分する具体例)**

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \int\left(\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x-2}{2(x^2-x+1)}\right)dx \tag{6.6.61}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx \tag{6.6.62}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \tag{6.6.63}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \tag{6.6.64}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)'}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx+\frac{3}{4}\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx \tag{6.6.65}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1|-\frac{1}{4}\log\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C \tag{6.6.66}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C. \tag{6.6.67}$$

例 6.28 **(部分分数を積分する具体例)**

$$\int\frac{x-11}{x^2+3}\,dx = \int\frac{x}{x^2+3}\,dx-11\int\frac{dx}{x^2+3}\,dx \tag{6.6.68}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx-\frac{11\sqrt{3}}{3}\int\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx \tag{6.6.69}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2+3\right|-\frac{11}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C. \tag{6.6.70}$$

□

例 6.29 **(部分分数を積分する具体例)**

$$\int \frac{x-11}{x^3+1}\,dx = -4\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{4x+7}{x^2-x+1}\,dx \tag{6.6.71}$$

$$= -4\log|x+1| + \int \frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)+9}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \tag{6.6.72}$$

$$= -4\log|x+1| + 4\int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx + 9\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \tag{6.6.73}$$

$$= -4\log|x+1| + 2\int \frac{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)'}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx + 6\sqrt{3}\int \frac{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx \tag{6.6.74}$$

$$= -4\log|x+1| + 2\log\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| + 6\sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \tag{6.6.75}$$

$$= 2\log\left|\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right| + 6\sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C. \tag{6.6.76}$$

□

□

§ 6.7 根号を含む関数の積分

関数 $f(x)$ に根号 $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a \neq 0)$ を含む場合の不定積分を考える．変数変換

$$t = \sqrt[n]{ax+b} \tag{6.7.1}$$

とおき置換積分法で求積する．両辺を n 乗すると

$$x = \frac{t^n - b}{a} \tag{6.7.2}$$

を得る．またこれより

$$\frac{dx}{dt} = \frac{nt^{n-1}}{a} \tag{6.7.3}$$

が成り立つ．よって $f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x)\,dx = \int f\left(\frac{t^n - b}{a}\right)\frac{dx}{dt}\,dt = \frac{n}{a}\int f\left(\frac{t^n - b}{a}\right)t^{n-1}\,dt \tag{6.7.4}$$

より求められる．

例 6.30 **(根号を含む場合の計算例)**　不定積分

$$I = \int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x-1}} \tag{6.7.5}$$

を考える．まず

$$t = \sqrt{x-1} \tag{6.7.6}$$

とおく．これより

$$x = t^2 + 1, \qquad \frac{dx}{dt} = 2t \tag{6.7.7}$$

となる．よって置換積分法より

$$I = \int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x-1}}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)+2t} \times (2t)\,dt = 2\int \frac{t}{(t+1)^2}\,dt \tag{6.7.8}$$

$$= 2\int \frac{(t+1)-1}{(t+1)^2}\,dt = 2\int \frac{dt}{t+1} - 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} \tag{6.7.9}$$

$$= 2\log|t+1| + \frac{2}{t+1} + C = 2\log(1+\sqrt{x-1}) + \frac{2}{1+\sqrt{x-1}} + C \tag{6.7.10}$$

を得る．

□

関数 $f(x)$ に $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a>0)$ を含む場合を考える．このときまず

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x \tag{6.7.11}$$

とおく．両辺を二乗すれば

$$x=\frac{t^2-c}{b+\sqrt{a}t} \tag{6.7.12}$$

を得る．これより

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(a+2\sqrt{a}t)^2} \tag{6.7.13}$$

となる．このとき不定積分は

$$I=\int f(x)\,dx=\int f\left(\frac{t^2-c}{b+\sqrt{a}t}\right)\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(b+2\sqrt{a}t)^2}\,dt \tag{6.7.14}$$

により求まる．

例 6.31 **（根号を含む場合の計算例）** 不定積分

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \tag{6.7.15}$$

を考える．変数変換

$$\sqrt{x^2-1}=t-x \tag{6.7.16}$$

とおく．両辺を二乗すれば

$$x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \tag{6.7.17}$$

を得る．これより

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) \tag{6.7.18}$$

となる．よって不定積分は

$$I=\int\frac{1}{t-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C \tag{6.7.19}$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C \tag{6.7.20}$$

と求まる．またこの結果は

$$I=\mathrm{Cosh}^{-1}x+C \tag{6.7.21}$$

とも表される．

□

例 6.32 **（根号を含む場合の計算例）** 不定積分

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{2-x-x^2}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{-(x+2)(x-1)}}dx=\int\frac{x}{(x+2)\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}}dx \tag{6.7.22}$$

を求める．変数変換

$$\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}=t \tag{6.7.23}$$

とおく．このとき

$$x=\frac{1-2t^2}{1+t^2}=-2+\frac{3}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt}=-\frac{6t}{(1+t^2)^2} \tag{6.7.24}$$

である．よって

$$I=\int\frac{1-2t^2}{1+t^2}\frac{1}{\left(2-2+\frac{3}{1+t^2}\right)}\frac{1}{t}\left(-\frac{6t}{(1+t^2)^2}\right)dt \tag{6.7.25}$$

$$=2\int\frac{2t^2-1}{(1+t^2)^2}dt=4\int\frac{dt}{1+t^2}-6\int\frac{dt}{(1+t^2)^2} \tag{6.7.26}$$

□

§ 6.8 三角関数の有理式の積分

三角関数の有理式 $f(\sin x, \cos x, \tan x)$ の不定積分を考える．まず変数変換として

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \tag{6.8.1}$$

とおく．このとき

$$\tan x = \tan\left(2\times\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t^2}{1-t^2} \tag{6.8.2}$$

となる．同様にして

$$\sin x = \sin\left(2\times\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \tag{6.8.3}$$

$$= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{6.8.4}$$

$$\cos x = \cos\left(2\times\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \tag{6.8.5}$$

$$= 2\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{6.8.6}$$

となる．次に $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+t^2) \tag{6.8.7}$$

となるので

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{2}{1+t^2} \tag{6.8.8}$$

を得る．よって不定積分は

$$I = \int f(\sin x, \cos x, \tan x)\,dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1-t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt \tag{6.8.9}$$

により求められる．

例 6.33 **(三角関数を含む場合の積分の計算例)**

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}\,dt \tag{6.8.10}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C. \tag{6.8.11}$$

□

§ 6.9 漸化式を用いた積分の計算

例 6.34 **（漸化式による不定積分の求積）** 不定積分

$$I_n = \int \cos^n x\, dx \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6.9.1}$$

$$J_n = \int \sin^n x\, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.9.2}$$

を考える．$n = 0$ のとき

$$I_0 = \int dx = x + C, \tag{6.9.3}$$

$$J_0 = \int dx = x + C \tag{6.9.4}$$

を得る．$n = 1$ のとき

$$I_1 = \int \cos x\, dx = \sin x + C, \tag{6.9.5}$$

$$J_1 = \int \sin x\, dx = -\cos x + C \tag{6.9.6}$$

を得る．$n \geq 2$ のときを考える．I_n を部分積分を用いて計算すると

$$I_n = \int \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\, dx = \int \cos^{n-1} x\, (\sin x)'\, dx \tag{6.9.7}$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x - \int (n-1) \cos^{n-2} x\, (-\sin x) \sin x\, dx \tag{6.9.8}$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx \tag{6.9.9}$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\, (1 - \cos^2 x)\, dx \tag{6.9.10}$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \left\{ \int \cos^{n-2} x\, dx - \int \cos^n x\, dx \right\} \tag{6.9.11}$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \tag{6.9.12}$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \tag{6.9.13}$$

となる．I_n を移項すると

$$(1 + (n-1)) I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} \tag{6.9.14}$$

$$n I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} \tag{6.9.15}$$

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_{n-2} \tag{6.9.16}$$

を得る．最後の式は漸化式である．この漸化式より不定積分 I_n が求まる．同様にして

$$J_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) J_{n-2} \tag{6.9.17}$$

を得る． □

問 6.35 **（漸化式による不定積分の求積）** J_n についての漸化式を求めよ. □

注意 6.36 **（三角関数の不定積分の計算例）** I_n, J_n は n 倍角の公式を用いても求積される.
（問 2.36 参照） □

§ 6.10 定積分

定義 6.37 **（定積分）**　有限区間 $[a,b]$ において関数 $f(x)$ は連続とする．区間 $[a,b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{6.10.1}$$

のように n 個の領域に分割する．このとき面積

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \xi_k \in I_k = [x_k, x_{k-1}], \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \tag{6.10.2}$$

を考える．極限 $n \to \infty$ のもと面積 S_n の極限が存在するとき，この極限を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{6.10.3}$$

と書き，関数 $f(x)$ の a から b までの**定積分（definite integral）**という．このとき $f(x)$ は**積分可能**であるという．区間 $[a,b]$ を**積分区間**という．

□

注意 6.38 **（定積分の意味）**　区間 $[a,b]$ において x 軸と $y = f(x)$ とで囲まれた領域の符合付き面積である．

□

例 6.39 **（定積分の具体例）**

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) \tag{6.10.4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} c\left((x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0)\right) \tag{6.10.5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} c\,(x_n - x_0) = \lim_{n\to\infty} c(b-a) = c(b-a)\,. \tag{6.10.6}$$

□

§ **6.11** 定積分の性質

定理 6.40 **（定積分の性質）** 定積分は次の性質をもつ：

(1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$

(2) $f(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

(3) $f(x) \geq g(x)$ $(a \leq x \leq b)$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a),\ \exists c \in (a,b).$

(5) $a < c < b$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

(6) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

(7) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

□

§ 6.12 定積分と不定積分

定理 6.41 **(定積分と不定積分の関係)** 関数 $f(x)$ の不定積分から得られる原始関数の一つを

$$F(x) = \int f(x)\,dx \tag{6.12.1}$$

とする．このとき $f(x)$ の a から b までの定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{6.12.2}$$

と表される．

□

例 6.42 **(定積分の計算例)**

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha \int_a^b dx = \alpha\Big[x\Big]_a^b = \alpha(b-a)\,. \tag{6.12.3}$$

これは長方形の面積を表す．

□

例 6.43 **(定積分の計算例)**

$$\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2-a^2) = \frac{1}{2}(b-a)(b+a)\,. \tag{6.12.4}$$

これは台形の面積を表す．

□

例 6.44 **(定積分の計算例)**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1\,. \tag{6.12.5}$$

□

例 6.45 **(定積分の計算例)**

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\mathrm{Tan}^{-1}x\Big]_0^1 = \mathrm{Tan}^{-1}(1) - \mathrm{Tan}^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}\,. \tag{6.12.6}$$

□

§ 6.13 定積分の計算

定理 6.46 **(置換積分)** 積分変数を $x=\phi(t)$ と置き換えると定積分は

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt=\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\frac{dx}{dt}dt \tag{6.13.1}$$

と表される.

□

例 6.47 **(置換積分の計算例)**

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^1\frac{\frac{dt}{dx}}{1+t^2}\frac{dx}{dt}dt=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2} \tag{6.13.2}$$

$$=\Big[\mathrm{Tan}^{-1}x\Big]_0^1=\mathrm{Tan}^{-1}(1)-\mathrm{Tan}^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}. \tag{6.13.3}$$

ここで $t=\sin x$ とおいた．このとき

$$\frac{dt}{dx}=\cos x,\quad \frac{dx}{dt}=\left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1}=\frac{1}{\cos x} \tag{6.13.4}$$

であることを用いた．また積分区間は $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ から $0=\sin(0)\le t\le 1=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ へと変わる.

□

定理 6.48 **(部分積分)**

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{6.13.5}$$

□

例 6.49 **(部分積分の計算例)**

$$I=\int_0^\pi x\sin x\,dx=\int_0^\pi x\,(-\cos x)'\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi 1\times(-\cos x)\,dx \tag{6.13.6}$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi+\Big[\sin x\Big]_0^\pi=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^\pi \tag{6.13.7}$$

$$=(-\pi\cos\pi+\sin\pi)-(-0\times\cos 0+\sin 0)=\pi. \tag{6.13.8}$$

□

定理 6.50 **（偶関数，奇関数の定積分）** 関数 $f(x)$ が偶関数のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,. \tag{6.13.9}$$

関数 $f(x)$ が奇関数のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,. \tag{6.13.10}$$

□

問 6.51 **（三角関数の定積分）** 自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = 0\,, \tag{6.13.11}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = 0\,, \tag{6.13.12}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \pi\delta_{n,m}\,, \tag{6.13.13}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,dx = 0\,, \tag{6.13.14}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \pi\delta_{n,m} \tag{6.13.15}$$

となることを示せ（ヒント：積和の公式）．ただし，$\delta_{n,m}$ は**クロネッカーのデルタ（Kronecker's delta）** である．

□

問 6.52 **（三角関数の定積分）** 定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.13.16}$$

は

$$I_n = J_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\varepsilon_n\,, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (n\text{: 偶数}) \\ 1 & (n\text{: 奇数}) \end{cases} \tag{6.13.17}$$

となることを示せ（ヒント: 例 6.34 を用いよ）．

□

例 6.53 **(双曲線関数を用いた定積分)** 定積分

$$I = \int_{-4}^{-2} \sqrt{x^2-1}\,dx \tag{6.13.18}$$

を考える．積分区間が $x: -4 \to -2$ であるから $x < 0$ である．このことに注意して変数変換を

$$x = -\cosh t < 0 \qquad \big(0 < t = \mathrm{Cosh}^{-1}(-x)\big) \tag{6.13.19}$$

とする．このとき積分区間は

$$t: \mathrm{Cosh}^{-1}(4) \to \mathrm{Cosh}^{-1}(2) \tag{6.13.20}$$

となる．また

$$\frac{dx}{dt} = -\sinh t \tag{6.13.21}$$

であることを用いると

$$I = \int_{\mathrm{Cosh}^{-1}(4)}^{\mathrm{Cosh}^{-1}(2)} \sqrt{\cosh^2 t - 1}(-\sinh t)\,dt \tag{6.13.22}$$

$$\text{(積分区間をひっくり返す．}\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1\text{ を用いて.)} \tag{6.13.23}$$

$$= -\int_{\mathrm{Cosh}^{-1}(2)}^{\mathrm{Cosh}^{-1}(4)} \sinh t \sqrt{\sinh^2 t}\,dt = \int_{\mathrm{Cosh}^{-1}(2)}^{\mathrm{Cosh}^{-1}(4)} \sinh t |\sinh t|\,dt \tag{6.13.24}$$

$$\text{(}\mathrm{Cosh}^{-1}(2) \le t \le \mathrm{Cosh}^{-1}(4)\text{ のとき }\sinh t > 0\text{ より.)} \tag{6.13.25}$$

$$= \int_{\mathrm{Cosh}^{-1}(2)}^{\mathrm{Cosh}^{-1}(4)} \sinh^2 t\,dt \tag{6.13.26}$$

$$\text{(}\sinh^2 t = (\cosh 2t - 1)/2\text{ を用いて.)} \tag{6.13.27}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathrm{Cosh}^{-1}(2)}^{\mathrm{Cosh}^{-1}(4)} (\cosh(2t) - 1)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh(2t) - t\right]_{\mathrm{Cosh}^{-1}(2)}^{\mathrm{Cosh}^{-1}(4)} \tag{6.13.28}$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2\,\mathrm{Cosh}^{-1}(4)) - \frac{1}{4}\sinh(2\,\mathrm{Cosh}^{-1}(2)) - \frac{1}{2}\mathrm{Cosh}^{-1}(4) + \frac{1}{2}\mathrm{Cosh}^{-1}(2) \tag{6.13.29}$$

となる．ここで

$$\mathrm{Cosh}^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \tag{6.13.30}$$

であることを用いる．このとき

$$\sinh(2\mathrm{Cosh}^{-1}(x)) = \frac{1}{2}\left(e^{2\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} - e^{-2\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right) \tag{6.13.31}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^2\right) \tag{6.13.32}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^2\right) \tag{6.13.33}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x^2-1}}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2} = 2x\sqrt{x^2-1} \tag{6.13.34}$$

より

$$\frac{1}{4}\sinh(2\mathrm{Cosh}^{-1}(4)) - \frac{1}{4}\sinh(2\mathrm{Cosh}^{-1}(2)) = \frac{2\times 4}{4}\sqrt{4^2-1} - \frac{2\times 2}{4}\sqrt{2^2-1} \tag{6.13.35}$$

$$= 2\sqrt{15} - \sqrt{3} \tag{6.13.36}$$

となる．また

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Cosh}^{-1}(4) + \frac{1}{2}\mathrm{Cosh}^{-1}(2) = -\frac{1}{2}\log\left(4+\sqrt{4^2-1}\right) + \frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{2^2-1}\right) \tag{6.13.37}$$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{4+\sqrt{15}}{2+\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\log\frac{2-\sqrt{3}}{4-\sqrt{15}} \tag{6.13.38}$$

である．よって

$$I = 2\sqrt{15} - \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log\frac{2-\sqrt{3}}{4-\sqrt{15}} \tag{6.13.39}$$

を得る．

□

§ 6.14 図形の面積

定理 6.54 **（図形の面積）** 曲線 $y = f(x), y = g(x)$ と直線 $x = a, x = b$ とで囲まれてできる領域の面積は

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \tag{6.14.1}$$

により求まる.

□

例 6.55 **（図形の面積の計算例）** 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の内部の領域の面積を求める．円の方程式は書き直すと

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \tag{6.14.2}$$

と表される．$y(x)$ は 2 価関数である．枝をそれぞれ

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = -\sqrt{1-x^2} \tag{6.14.3}$$

とおく．このとき円の面積は

$$S = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2}\right)\right) dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \tag{6.14.4}$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \tag{6.14.5}$$

$$(x = \cos t \text{ とおく．} dx/dt = -\sin t \text{ であり } x : 0 \to 1 \text{ は } t : \pi/2 \to 0 \text{ となる.}) \tag{6.14.6}$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\,dt \tag{6.14.7}$$

$$(\text{積分区間をひっくり返す．} \cos^2 t + \sin^2 = 1 \text{ を用いて.}) \tag{6.14.8}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t\,dt \tag{6.14.9}$$

$$(0 \le t \le \pi/2 \text{ のとき } \sin t \ge 0 \text{ より}) \tag{6.14.10}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt \tag{6.14.11}$$

$$(\sin^2 t = (1-\cos 2t)/2 \text{ を用いて.}) \tag{6.14.12}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt = \Big[2t - \sin 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \times \frac{\pi}{2} - 0 - \sin(\pi) + \sin(0) = \pi \tag{6.14.13}$$

と求まる.

□

§ 6.15 曲線の長さ

定理 6.56 **（曲線の長さ）** 区間 $[a,b]$ における関数 $y=f(x)$ のグラフの曲線の長さは

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{6.15.1}$$

により得られる. □

注意 6.57 **（曲線の長さ）** 曲線 s のうちある点 (x,y) のまわりの微小線分を ds とする. このとき ds を斜辺とする直角三角形を考える. その他の辺の長さを dx, dy とするとピタゴラスの定理より

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2 \tag{6.15.2}$$

が成り立つ. 数学的には厳密ではないが次の展開をすると微小線分 ds は

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{6.15.3}$$

と表される. 曲線の長さ s は微小線分 ds を全て足し合わせたものだから

$$s=\int_0^s ds=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{6.15.4}$$

となる. □

例 6.58 **（曲線の長さの計算例）** 単位円の円周の長さを考える. $x^2+y^2=1$ より $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ だから多価関数の枝を分けて

$$y_+=\sqrt{1-x^2},\quad y_-=-\sqrt{1-x^2} \tag{6.15.5}$$

とする. このとき

$$\frac{y_\pm}{dx}=\frac{\mp x}{\sqrt{1-x^2}},\quad \sqrt{1+\left(\frac{dy_\pm}{dx}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6.15.6}$$

が成り立つ. よって

$$s=\int_{-1}^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy_+}{dx}\right)^2}\,dx+\int_{-1}^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy_-}{dx}\right)^2}\,dx=2\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6.15.7}$$

$$=4\Big[\mathrm{Sin}^{-1}x\Big]_0^1=4\left(\mathrm{Sin}^{-1}(1)-\mathrm{Sin}^{-1}(0)\right)=4\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=2\pi \tag{6.15.8}$$

を得る. □

例 6.59 **（曲線の長さの計算例）** $-1 \leq x \leq 1$ における曲線 $y = x^2$ の長さ考える．$dy/dx = 2x$ であるから曲線の長さ s は

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2}\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx \tag{6.15.9}$$

と表される．積分を計算する．置換積分として

$$x = \frac{1}{2}\sinh t, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cosh t, \quad t : 0 \to \sinh^{-1}(2) \tag{6.15.10}$$

とおく．すると

$$s = \int_0^{\sinh^{-1}(2)} \cosh t \sqrt{1+\sinh^2 t}\, dt \tag{6.15.11}$$

となる．双曲線関数の性質

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \tag{6.15.12}$$

を用いると

$$s = \int_0^{\sinh^{-1}(2)} \cosh^2 t\, dt \tag{6.15.13}$$

となる．

$$\cosh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1) \tag{6.15.14}$$

を用いると

$$s = \frac{1}{2}\int_0^{\sinh^{-1}(2)} (\cosh 2t + 1)\, dt = \left[\frac{1}{4}\sinh 2t + \frac{t}{2}\right]_0^{\sinh^{-1}(2)} \tag{6.15.15}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sinh(2\sinh^{-1}(2)) - \sinh(2\sinh^{-1}(0))\right) + \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1}(2) - \sinh^{-1}(0)\right) \tag{6.15.16}$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2\sinh^{-1}(2)) + \frac{1}{2}\sinh^{-1}(2) \tag{6.15.17}$$

となる．ここで

$$\sinh^{-1} t = \log\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \tag{6.15.18}$$

であることを用いると

$$s = \frac{1}{4}\frac{e^{2\log(2+\sqrt{2^2+1})} - e^{-2\log(2+\sqrt{2^2+1})}}{2} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{2^2+1}) \tag{6.15.19}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5}) \tag{6.15.20}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5}) \tag{6.15.21}$$

$$= \frac{1}{8}\frac{(\sqrt{5}+2)^2 - (\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}-2)^2(\sqrt{5}+2)^2} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5}) = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5}) \tag{6.15.22}$$

を得る． □

§ 6.16 回転体の体積

定理 6.60 **（回転体の体積）** 曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a, x = b, y = 0$ とで囲まれてできる図形を x 軸の回りで 1 回転してできる立体の体積は

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx \tag{6.16.1}$$

により求まる.

□

例 6.61 **（回転体の体積）** $y = x^2$ と $x = 1, y = 0$ とで囲まれてできる領域を x 軸の回りで 1 回転してできる立体の体積は

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}. \tag{6.16.2}$$

□

問 6.62 **（回転体の体積）** $x^2 + (y-2)^2 = 1$ の内部の領域を x 軸の回りで 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

□

§ 6.17 広義積分

有限区間で連続な関数に対し定義される量が定積分である．不連続点を含む区間や無限区間における積分へ拡張する．この拡張された積分を**広義積分（improper integral）**という．

定義 6.63 **（不連続点を含む区間での広義積分）** 関数 $f(x)$ が $x=a$ で不連続で，$(a,b]$ で連続なとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{6.17.1}$$

$x=b$ で不連続で，$[a,b)$ で連続なとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{6.17.2}$$

$x=c$ $(a<c<b)$ で不連続で，$[a,b]$ で連続なとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{a+\varepsilon_1}^b f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_a^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx. \tag{6.17.3}$$

以上の極限が存在するとき**広義積分は収束する**という．

□

例 6.64 **（不連続点を含む広義積分の具体例）**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_{0+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2. \tag{6.17.4}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\log|x|\right]_{0+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(\log 1-\log\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\log\varepsilon = +\infty. \tag{6.17.5}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{0+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty. \tag{6.17.6}$$

□

定理 6.65 **（広義積分の収束次数）** 実数 $p>0$ に対して次の広義積分が成り立つ：

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & (0<p<1) \\ +\infty & (p\geq 1) \end{cases} \tag{6.17.7}$$

□

問 6.66 **（広義積分の収束次数）** これを示せ．

□

定義 6.67 **（無限区間での広義積分）**　関数 $f(x)$ が無限区間 $[a,\infty)$ で連続なとき,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.17.8}$$

無限区間 $(-\infty,b]$ で連続なとき,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.17.9}$$

無限区間 $(-\infty,\infty)$ で連続なとき,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.17.10}$$

以上の極限が存在するとき**広義積分は収束する**という. □

例 6.68 **（無限区間での広義積分の具体例）**

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty}\left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(\mathrm{Tan}^{-1}(b)-\mathrm{Tan}^{-1}(0)\right) \tag{6.17.11}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\mathrm{Tan}^{-1}(b) = \frac{\pi}{2}. \tag{6.17.12}$$

□

例 6.69 **（無限区間での広義積分の具体例）**　$\alpha>0$ に対して

$$\int_{-\infty}^0 e^{\alpha x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{\alpha x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\alpha}(1-e^{\alpha a}) = \frac{1}{\alpha}. \tag{6.17.13}$$

□

例 6.70 **（無限区間での広義積分の具体例）**

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right) = +\infty. \tag{6.17.14}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\left[\log x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}(\log b-\log 1) = \lim_{b\to\infty}\log b = +\infty. \tag{6.17.15}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1. \tag{6.17.16}$$

□

定理 6.71 **（広義積分の収束次数）**　実数 $p>0$ に対して次の広義積分が成り立つ：

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty & (0<p\le 1) \\ \dfrac{1}{1-p} & (p>1) \end{cases} \tag{6.17.17}$$

□

問 6.72 **（広義積分の収束次数）**　これを示せ. □

§ 6.18 コーシーの主値積分

定義 6.73 **(コーシーの主値積分)** 関数 $f(x)$ が $x=c$ $(a<c<b)$ で不連続で，有限区間 $[a,b]$ で連続なとき，

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right) \tag{6.18.1}$$

を c **におけるコーシーの主値積分（Cauchy's principal values of integral）**という．また関数 $f(x)$ が無限区間 $(-\infty,\infty)$ で連続なとき，

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\left(\int_{-a}^{a} f(x)\,dx\right) \tag{6.18.2}$$

を ∞ **におけるコーシーの主値積分**という．主値積分はまた

$$\mathrm{P}\int_a^b f(x)\,dx \tag{6.18.3}$$

とも表記する．

□

例 6.74 **(広義積分での計算例)**

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x}\right) \tag{6.18.4}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0}\Big[\log|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\Big[\log|x|\Big]_{\varepsilon_2}^{1} \tag{6.18.5}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0}(\log\varepsilon_1 - \log 1) + \lim_{\varepsilon_2\to+0}(\log 1 - \log\varepsilon_2) \tag{6.18.6}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0}\log\varepsilon_1 - \lim_{\varepsilon_2\to+0}\log\varepsilon_2 = -\infty+\infty. \qquad \cdots \text{不確定} \tag{6.18.7}$$

□

例 6.75 **(コーシーの主値積分での計算例)**

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \text{v.p.}\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \text{v.p.}\int_{0}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) \tag{6.18.8}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\log|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon} + \Big[\log|x|\Big]_{\varepsilon}^{1} \tag{6.18.9}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(\log\varepsilon - \log 1 + \log 1 - \log\varepsilon) \tag{6.18.10}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(\log\varepsilon - \log\varepsilon) = 0. \qquad \cdots \text{有限確定} \tag{6.18.11}$$

□

§ 6.19 級数と定積分

例 6.76 **(調和級数と定積分)** 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の面積を考える．範囲が $1\le x\le n+1$ のときの面積を S_n とする．また，幅が 1 で高さが $\dfrac{1}{k}$ の長方形の面積を $k=1,2,3,\cdots n$ まで足合わせたものを T_n とする．このときグラフを書けば明らかに

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > \int_0^{n+1}\frac{dx}{x} = \log(n+1) = T_n \tag{6.19.1}$$

が成り立つ．よって $n\to\infty$ のとき

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\quad T=\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty \tag{6.19.2}$$

である．$S>T$ であるから，調和級数 S は発散する． □

例 6.77 **(発散する級数と定積分)**

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots \quad > \quad T=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{n}}=\infty \tag{6.19.3}$$

である．よって級数 $S=\sum\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は発散する． □

例 6.78 **(収束する級数と定積分)**

$$1=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} \quad < \quad S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \quad < \quad 1+\int_2^{\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}=2 \tag{6.19.4}$$

が成り立つ．$1<S<2$ であるから $S=\sum\dfrac{1}{n^2}$ は収束する． □

問 6.79 **(級数の収束)**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{発散} & (0\le p\le 1)\\ \text{収束} & (p>1)\end{cases} \tag{6.19.5}$$

となることを示せ． □